

## ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБУ

1. Три теретна возила ( $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_3$ ) превезу 1645 тона робу из једног магацина у други. Друго и треће возило треба да обаве најмање по 25 вожњи свако, а укупни трошкови транспорта могу износити највише 865нј. Носивости возила су, редом, 10 т, 5 т и 20 т. Просечна времена вожње су, редом, 0,4 часа, 0,3 часа и 0,8 часова. Трошкови по једној вожњи, по појединим возилима су, редом, 4, 3 и 5нј.

- а) Потребно је формулисати математички модел проблема тако да се минимизира укупно време вожње, а да се транспортује сва роба,  
б) Одредити и образложити оптимално решење.

Постооптималном анализом испитати да ли долази до промене у структури оптималног решења за случајеве наведене под в), г). Ако долази до промене навести која променљива улази у базу, а која излази из базе.

в) Ако су просечна времена вожњи 0.5, 0.4 и 0.9,

г) Ако треба превести 2000 тона робе, а укупни трошкови транспорта могу износити највише 735 нј.

**РЕШЕЊЕ:** Минимално трајање вожње од 68300 часова остварује се ако се обаве 102 вожње теретним возилом  $T_1$  и по 25 вожњи теретним возилима  $T_2$  и  $T_3$ . При томе су трошкови транспорта за 248 новчаних јединица мањи од максимално дозвољених.

2. Једна пекара се специјализовала за производњу три врсте пецива: погаче од 400г, хлеба од 800г и кифле од 300г. Поизводња пецива се врши у две фазе: од припремљеног теста се на машини за мешење (М1) обликују одговарајућа пецива, а затим се пеку у пећи (П). Трајање (у минутима) мешења и печења ових пецива, као и јединични трошкови производње су дати у табели:

	М1	П	трошкови
погача	6	6	140
хлеб	7	5	190
кифла	7	7	150

Машина за печење може да ради 600 минута дневно, а машина за мешење, која представља уско грло у производњи и чији је капацитет увек у потпуности искоришћен, 560 минута дневно. Потребно је одредити количину погача, хлеба и кифли коју треба испећи за 5 дана, а која ће обезбедити минималне трошкове производње, ако се мора утрошити бар 160 кг теста.

- а) Формулисати математички модел и одредити сва његова оптимална решења и објаснити једно од њих,

Одредити да ли долази до промене оптималног решења ако је потребно:

- б) Максимизирати укупну количину пецива,  
в) Максимизирати искоришћеност капацитета машина,  
г) Утрошити најмање 200 кг теста.

**РЕШЕЊЕ:** Минимални трошкови производње од 63200 новчаних јединица се остварују производњом 280 погача и 160 кифли. Хлебове се не исплати производити. Са оваквим планом производње за 5 дана машина за печење 200 сати неће бити коришћена.

3. Фабрика “Спорт-Ваљево” производи гумене лопте за рекреацију. Фудбалске (Ф), кошаркашке (К), одбојкашке (О) и рукометне (Р) лопте се обрађују по 50, 50,50 и 40 минута респективно на машинама типа М1. Јединичне продајне цене лопти и утрошак гуме (у грамима) су дати у табели:

	Ф	К	О	Р
Продајна цена	900	890	760	630
Утрошак гуме	450	470	330	300

Цена сата производње на једној машини М1 износи 180нј., а капацитет машине који се мора потпуно искористити износи 7 сати по једној смени. Предузеће располаже са по 6 машина типа М1. Набавна цена једног килограма гуме износи 200нј., а месечно се може набавити 900 кг.

- а) Одредити оптималан план производње за следећу годину у циљу максимизације профита предузећа ако се зна да фабрика ради 20 дана месечно у две смене. Анализом тржишта је утврђено да треба производити исту количину одбојкашких и кошаркашких лопти, а фудбалских бар у истој количини као свих осталих.
- б) Одредити једно оптимално базно решење проблема и објаснити га детаљно.
- ц) Наћи друго оптимално базно решење. На основу оба базна оптимална решења испитати да ли се предузећу исплати да прихвати понуду од пословног партнера да потпише уговор по коме ће партнер куповати целокупну произведену количину лопти по наведеним ценама под условом да буде исти број фудбалских и рукометних лопти.

**РЕШЕЊЕ:** У следећој години је потребно произвести 1872 фудбалске, по 72 одбојкашке и кошаркашке лопте, а рукометашке лопте не треба производити. Такав план производње доноси максимални профит од 1321200 новчаних јединица.

4. Продавница посуђа има на залихама 2000 шоља за чај, 600 стаклених чинија и 502 керамичке чиније. Менаџер продавнице је проценио да се више исплати од овог посуђа правити комплете него продавати га на комад. Због тога је одлучио да направи комплете за 12 и за 8 особа. Комплет за 12 особа садржи 12 шоља и 5 чинија, а комплет за 8 особа 8 шоља и 3 чиније. Менаџер је одлучио да број комплета за 12 и за 8 особа буде једнак, и да у једном комплету треба да се налазе само чиније истог типа. Јединична продајна цена комплета за 12 особа са стакленим чинијама је 110нј, а са керамичким чинијама 120нј. Јединична продајна цена комплета за 8 особа са стакленим чинијама је 90нј, а са керамичким чинијама 80нј. Потребно је одредити колико комплета које врсте треба направити да би укупна продајна цена била максимална.

- а) Формулисати математички модел и објаснити значење променљивих у моделу,
- б) Одредити и објаснити оптимално решење модела под а),
- в) Колико шоља треба докупити да би се од преосталих стаклених чинија направили комплети за 12 особа? Колико таквих комплета може да се направи?
- г) Да ли се исплати правити комплете од 6 шоља, 2 стаклене и 2 керамичке чиније и продавати их по цени од 70нј?

**РЕШЕЊЕ:** Максимална укупна продајна цена од 21000 нј. се добија ако се производи 100 комплета за 12 особа са керамичким чинијама и 100 комплета за 8 особа са стакленим чинијама. При томе 300 стаклених и 2 керамичке чиније остају неупотребљене.

5. За производњу 3 врсте производа А, Б и Ц користе се 4 врсте ресурса. Јединични утрошци сировине и трошкови производње дати су у следећој табели:

	А	Б	Ц
P <sub>1</sub>	4	4	8
P <sub>2</sub>	2	6	6
P <sub>3</sub>	4	10	4
P <sub>4</sub>	6	16	2
Трошкови (нј.)	480	640	600

- а) Формулисати математички модел минимизације укупних трошкова производње ако предузеће има обавезу да утроши не мање од 80, 60, 80 и 120 јединица ове 4 врсте ресурса респективно,
- б) Формулисати дуални модел за задатак под а) и решити га,
- в) На основу решења дуалног задатка одредити и детаљно образложити решење задатка под а),
- г) Постоптималном анализом испитати да ли долази до промене у структури оптималног решења ако је предузеће у обавези да утроши бар 75 јединица ресурса P<sub>2</sub>.

**РЕШЕЊЕ:** Минимални трошкови од 8266.66 нј. се остварују производњом по 6.667 јединица производа Б и Ц. Производ А не треба производити. Утрошак ресурса P<sub>2</sub> је за 20 јединица, а ресурса P<sub>3</sub> за 13.333 јединица већи од минимално захтеваног.

6. Управа сајма је одлучила да једну халу површине  $2000\text{m}^2$  подели на 3 врсте локала следећих површина:  $10\text{m}^2$  (Л1),  $20\text{m}^2$  (Л2),  $40\text{m}^2$  (Л3). Локале ће издавати по месечној цени од 200нј по квадратном метру локала. Поред тога у цену издавања ће бити укључени годишњи трошкови електричне енергије и то 10000нј по локалу без обзира на врсту. Управа је анализом тржишта дошла до закључка да ће много лакше да се издају мали локали па је одлучила да број локала типа Л1 буде тачно дупло већи од броја локала друга два типа.

- Формулисати математички модел којим се максимизира укупан годишњи приход који управа сајма остварује издавањем локала и одредити колики број локала сваке врсте треба да се направи,
- До каквих промена долази у оптималном решењу (и написати ново решење ако постоји) ако управа сајма одлучи да закупце локала ослободи плаћања фиксног дела.

**РЕШЕЊЕ:** Управа сајма треба да подели халу на 100 локала површине  $10\text{m}^2$  и 50 локала површине  $20\text{m}^2$ , локале од  $40\text{m}^2$  не треба да прави. На тај начин ће се остварити укупан годишњи приход од 6300000 нј.

7. Потребно је одредити рецепт за производњу једне врсте смеше од 3 сировине А, Б и Ц, тако да та смеша садржи не мање од: 560 јединица компоненте  $K_1$ , 420 јединица компоненте  $K_2$ , 560 јединица компоненте  $K_3$  и 700 јединица компоненте  $K_4$ . Садржај ових компоненти у јединици сировина А, Б и Ц као и јединичне цене ових сировина дати су у следећој табели:

	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	Јед. цена
А	4	2	4	6	280
Б	4	6	10	16	440
Ц	8	6	4	2	600

- Формулисати математички модел за одређивање рецепта за производњу ове смеше са захтеваним квалитетом и са минималном укупном ценом, ако је потребно да у смеси буде сировина А тачно за 10 јединица више од сировина Б и Ц заједно,
- Наћи оптимално решење проблема под а) применом графичке методе,
- Формирати дуални модел модела под а), наћи и образложити његово оптимално решење, а затим на основу овог решења одредити оптимални садржај сировина у смеси и минималну укупну цену смеше.
- Одредити да ли долази до промене оптималног решења ако је потребно утрошити тачно 700 јединица компоненте  $K_4$ ,
- До којих промена у структури оптималног решења долази ако је минимални унос компоненте  $K_1$  580 јединица.

**РЕШЕЊЕ:** Да би укупна цена смеше била на минималном нивоу од 43600 нј., потребно је да смеша садржи 60 јединица сировине А, 20 јединица сировине Б и 30 јединица сировине Ц. На тај начин ће компоненте  $K_1$ ,  $K_2$  и  $K_3$  бити садржане у смеси на минималном нивоу, а компонента  $K_4$  40 јединица изнад минималног нивоа.

8. Менаџмент компаније која користи гас за покретање својих погона треба да направи план набавке гаса 2006 и 2007 годину. Компанија може да набави целокупну потребну количину гаса у текућем периоду или да купује унапред и складишти гас за следећи период. Зна се да је цена складиштења по 1 галона гаса 5нј. Потребна компаније у 2006. години износе 450 галона, а у 2007. години 550 галона. Набавна цена у 2006. години је 30, а у 2007. години 50нј.

- Написати математички модел за одређивање оптималног плана набавке (количину гаса коју треба набавити и количину која ће се складиштити у 2006. години и исте вредности за 2007. годину) који минимизира укупне трошкове у целокупном периоду. При томе треба водити рачуна о следећим условима:
  - Потребе у сваком планском периоду морају бити задовољене.
  - Складиште за гас је капацитета 200 галона годишње и нема залиха гаса на почетку 2006. године.
- Направити дуални модел, наћи оптимално решење проблема и објаснити га,
- Испитати да ли ће доћи до промене структуре оптималног решења ако се цена гаса у 2007. години смањи на 40нј.

**РЕШЕЊЕ:** Минималне трошкове набавке и складиштења гаса од 40250 нј. компанија ће остварити ако у 2006. години набави 650 галона а у 2007. години 350 галона гаса.

9. У прављењу смеше користе се три сировине  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$ . Смеша треба да обезбеди тачно 120 јединица компоненте  $K_1$  и не више од 140 јединица компоненте  $K_2$ . Учешће компоненти у смешама дато је у следећој табели:

	$C_1$	$C_2$	$C_3$
$K_1$	3	1	2
$K_2$	1	2	1

Цена сировина  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  је 15, 20 и 3 новчане јединице респективно. Неопходно је утрошити бар 20 јединица сировине  $C_2$  и најмање 40 јединица сировине  $C_3$

- Формирати математички модел минимизације трошкова смеше,
- Формирати дуални модел модела под а),
- Решити дуални задатак,
- Образложити решење задатка под а).

**РЕШЕЊЕ:** Да би укупни трошкови прављења смеше били на минималном нивоу од 550 нј., потребно је да смеша садржи 20 јединица сировине  $C_2$  и 50 јединица сировине  $C_3$ . На тај начин ће садржај компоненте  $K_2$  у смеси бити 50 јединица изнад минималног нивоа, а утрошак сировине  $C_3$  за 10 јединица већи од минимално захтеваног.

10. Једна ткачница производи три врсте тканина као мешавину памука и вуне. Један метар најтање тканине ( $T_1$ ) садржи 200г памука и 100г вуне; метар тканине средње дебљине ( $T_2$ ) садржи 100г памука и 300г вуне, а метар најдебље тканине ( $T_3$ ) садржи по 200г памука и вуне. У складишту ткачнице се налази 50 кг вуне, која се, због неодговарајућих услова складиштења, мора одмах потрошити и 40 кг памука. Трошкови производње по метру тканине  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_3$  износе 25, 30 и 26 новчаних јединица, респективно.

- Формулисати математички модел минимизације укупних трошкова производње тканина, ако се захтева да се произведе бар 10 метара више тканине типа  $T_1$  него типа  $T_2$ ,
- Формулисати дуални модел модела под а),
- Одредити оптимално решење модела под б), а затим одредити и објаснити оптимално решење модела под а).
- Испитати да ли долази до промене оптималног решења ако се захтева да укупна дужина тканина буде максимална,
- Испитати да ли долази до промене оптималног решења ако је количина вуне у складишту мања за 8 кг,
- Одредити оптимално решење ако је потребно да дужина најтање тканине буде најмање онолика колика је укупна дужина друге две тканине заједно.

**РЕШЕЊЕ:** Да би остварила минималне трошкове од 6950 нј., ткачница треба да произведе 120м тканине  $T_1$ , 110  $T_2$  и 25 метара тканине  $T_3$ . На тај начин ће бити потрошена сва вуна и памук које ткачница има на складишту.

11. Фабрика намештаја планира да пласира једнаке количине две врсте полица (полица А и полица Б са слике). Полице су комбинација дрвених дасака и металних стубића. Обе врсте полица се могу правити у две варијанте: од браон дасака, којих на складишту укупно има 500 и од црних дасака, којих има 600, али се не могу мешати даске различитих боја у једној полици. Фабрика располаже са укупно 2000 металних стубића. Јединична цена полица А је 100 новчаних јединица ако се прави у браон боји, а 110 ако је црна. Јединична цена браон полица Б је 80нј, а црне 90нј. Потребно је одредити колико полица које врсте и у којој боји фабрика треба да произведе да би укупна продајна цена полица била максимална.



- Формулисати математички модел ЛП,
- Одредити и објаснити оптимално решење модела под а),
- Одредити колико стубића треба докупити да би се од преосталих браон дасака направиле полица типа А,
- Да ли исплати производити полице од 6 стубића, 2 браон и 2 црне даске по цени од 70нј.

**РЕШЕЊЕ:** Да би од расположивог материјала постигла максималну укупну продајну цену од 19600 нј., фабрика намештаја треба да склопи 40 браон и 60 у црних полица А и 100 црних полица Б. Браон Б полице не треба склапати. На складшиту ће остати неутрошено 300 браон дасака.

12. Предузимач који гради тржни центар треба да изнајми машину за хобловање паркета (X), алат за финално украшавање зидова (З) и алат за израду гипсаних елемената (Г). Машином X један локал се обради за пола сата, алатом З за 15 минута, а алатом Г за 1 сат. Предузимач плаћа машине по сату и то X 120нј, З 100 новчаних јединица и Г 110нј. Власник машина и алата је условио предузимача да машину X мора да изнајми бар 10 сати дуже него алате З и Г заједно. Одредити на колико сати треба изнајмити сваку од машина да би укупна цена изнајмљивања била минимална, при чему сваки посао треба да буде завршен бар у 100 локала.

- Написати математички модел проблема,
- Решити проблем преко дуалног модела и детаљно објаснити решење проблема,
- Одредити колико се додатних локала може обрадити машином X, и на колико би додатних сати требало закупити алат З да би се у тим локалимa завршили и послови на зидовима,
- Испитати до којих промена долази у оптималном решењу ако цена изнајмљивања машине X опадне за 20 новчаних јединица по сату, а алата З и Г порасте за по 40 новчаних јединица по сату.

**РЕШЕЊЕ:** Предузимач треба да изнајми машину за хобловање паркета на 135 сати, алат за финално украшавање зидова на 25 сати и алат за израду гипсаних елемената на 100 сати. Укупна цена изнајмљивања износиће 29700 нј., у тачно 100 локала ће бити завршено украшавање зидова и гипсани елементи, а укупно 270 локала ће бити хобловано.

13. У предизборној кампањи политичка странка жели да емитује бар 130 пропагандних порука на 3 најјаче телевизије (Т1, Т2 и Т3). Једна порука приказана на телевизији Т1 траје пола минута, на Т2 15 секунди, а на Т3 1 минут. Одлучено је да се на телевизији Т1 емитује најмање 40 минута, на Т2 највише 50 минута, а на Т3 најмање 30 минута порука. Емитовање пропагандних порука се плаћа по утрошениом времену и то: на Т1 100 новчаних јединица по минути, на Т2 120 новчаних јединица по минути и на Т3 110 новчаних јединица по минути. Потребно је одредити колико минута на којој телевизији треба странка да се оглашава да би укупна цена оглашавања била минимална.

- Написати математички модел проблема,
- Решити проблем преко дуалног модела и детаљно објаснити решење проблема,
- Одредити до којих промена долази у прималном и дуалном моделу ако се горња граница емитовања на телевизији Т2 смањи на 5 минута,
- Написати до којих промена долази у оптималном решењу ако цена изнајмљивања времена на Т1 и Т2 опадне за по 20 новчаних јединица по минути, а на Т3 порасте за 40 новчаних јединица по минути.

**РЕШЕЊЕ:** Да би се остварили минимални трошкови емитовања од 7900нј, потребно је емитовати 40 минута порука на телевизији Т1, 5 минута на телевизији Т2 и 30 минута на телевизији Т3. При томе би на телевизији Т2 могло да се емитује још 45 минута порука.

14. Маркетиншка агенција «Компјутер маркетинг» је добила задатак да испита потенцијал тржишта у Србији за продају рачунарске опреме. Да би испитивање били валидно, менаџмент агенције је изабрао три града Суботица, Ниш и Београд у којима је потребно спровести анкету са најмање 300 испитаника. Због величине градова захтевано је да број анкетираних у Београду буде тачно за 50 већи од укупног броја анкетираних у друга два града. Анкетари у Суботици су проценили да им је потребно 2 сата за комплетну обраду једног анкетног листића, а анкетари у Нишу су проценили да могу исти посао да заврше за 3 сата. И једни и други су прихватили посао под условом да број радних сати у Нишу и Суботици буде бар по 120 сати. После анализе свих захтева утврђено је да целокупна обрада једног анкетног листића у Суботици кошта 50нј, у Нишу 60нј и у Београду 80нј.

- а) Написати математички модел за одређивање оптималног броја анкетираних у сва три града у циљу минимизације трошкова спровођења анкете,
- б) Направити дуални модел модела под а), одредити његово оптимално решење и објаснити га детаљно,
- в) Написати за колико је број анкета спроведених у Суботици, према оптималном решењу, већи од минималног могућег броја,
- г) Одредити да ли би дошло до промене минималних укупних трошкова ако се време обраде анкета у Нишу смањи за 30 минута.

**РЕШЕЊЕ:** Агенција треба да анкетира 85 испитаника у Суботици, 40 у Нишу и 175 у Београду. Тако ће минимални трошкови спровођења анкете бити 20650 нј. Број радних сати анкетара у Суботици ће бити за 50 сати већи од захтеваног.

15. Туристичка агенција «Лала» треба да направи годишњи план рада своја 3 агента која покривају 3 различите дестинације: Будимпешта, Праг и Куба. Жеља власника агенције је да укупан број тура буде најмање 300. Због атрактивности аранжмана предвиђено је да број тура за Кубу буде тачно за 50 већи од укупног броја тура на друге две дестинације. Агенту који води путнике у Будимпешту плаћа се 50њ. по тури, у Праг 60њ по тури и на Кубу 80њ. по тури. Једна тура за Праг подразумева 40 путника, а за Кубу 60 путника. Агенти који покривају ове две дестинације су прихватили посао под условом да број путника које воде буде бар по 2400.

- а) Написати математички модел за одређивање оптималног броја тура за све три дестинације који власнику туристичке агенције обезбеђује минималне трошкове плаћања агената,
- б) Одредити оптимално решење.

**РЕШЕЊЕ:** Туристичка агенција треба да организује 85 тура за Будимпешту, 40 тура за Праг и 175 тура за Кубу. Трошкови плаћања агената биће 20650 нј., а агенти који прате туре за Праг ће водити 1000 путника више од минималног броја који су захтевали.

16. Школа рачунара треба да направи план наставе за 2006. годину. Могуће је склопити уговор са 3 компаније (К1, К2 и К3) за обуку њихових запослених. У компанији К3 су у првој половини радног дана сви запослени веома заузети, тако да може да им се одобри само по пола радног дана дневно за обуку. Запослени компанија К1 и К2 могу да похађају обуку целог радног дана или по пола радног дана. Компанија К1 је заинтересована за највише 160, а компанија К2 за највише 140 целих дана обуке. У ове две компаније се 2 дана по пола радног времена рачунају као 1 цео радни дан. Запосленима компаније К3 је потребно бар 100 дана обуке од по пола радног времена.

Школа рачунара, која жели да ради што ефикасније, одлучила је да се обука одржава целог радног дана, тако да су могућа 4 начина рада: по цео радни дан обуке за запослене једне од компанија К1 и К2 или прва половина радног дана за запослене једне од компанија К1 и К2, а у другој половини дана за запослене компаније К3. Школа рачунара ће радити највише 11 месеци (220 радних дана), а у једном тренутку је могуће изводити само једну обуку.

Потребно је одредити колико ће дана у школи рачунара бити организована обука за раднике споменутих компанија, тако да укупна зарада школе буде максимална. Компанија К1 плаћа 60нј за цео радни дан обуке, односно 20 за пола дана, компанија К2 плаћа 50нј за цео радни дан обуке, односно 25 за пола дана, а компанија К3 плаћа 25нј по дану (пола радног времена).

- а) Формулисати математички модел проблема,

- б) Одредити оптимално решење модела формулисаног под а) и детаљно га објаснити,
- в) Испитати да ли би се променио план обуке ако би школа рачунара постигла да компанија К3 плаћа 30 новчаних јединица по дану (пола радног времена),
- г) У разговорима са компанијама отворила се још једна могућност за одржавање обуке: 2/3 радног времена би се обучавали запослени компаније К1 по цени од 45нј, а 1/3 запослени компаније К2 по цени од 20нј. Проверити да ли се школи рачунара исплати да укључи у план обуке такве радне дане.

**РЕШЕЊЕ:** Школа рачунара треба да склопи уговор са компанијом К1 за 120 целих радних дана обуке, са компанијом К2 уговор за 100 радних дана са пола дана обуке (прва половина дана) и са компанијом К3 уговор за 100 радних дана послеподневне обуке. На тај начин ће обука запослених компаније К1 трајати 40 дана краће од максималног трајања које ова компанија прихвата, а обука запослених компаније К2 90 дана краће. Укупна зарада школе рачунара ће износити 12200 нј.

17. Дипломирани инжењер ФОНа има могућност да се запосли у једној од 3 компаније (К1, К2 и К3). Међутим, он не жели одмах да се одлучи у којој ће радити, већ би да се пробним радом прво упозна са њиховим функционисањем. Одлучио је да за такав пробни рад издвоји највише 11 месеци (220 радних дана). У компанији К3 се пробни рад организује са пола радног времена, после подне, траје најмање 100 радних дана и плаћа се 25нј дневно. У компанији К1 могуће је бити на пробном раду са целим радним временом, што се плаћа 60нј дневно, али и са пола радног времена за 20нј дневно. Пробни рад у овој компанији може да траје највише 160 целих радних дана (2 дана по пола радног времена се рачунају као 1 цео радни дан). У компанији К2 је такође могуће бити на пробном раду са целим радним временом, што се плаћа 50нј дневно, али и са пола радног времена за 25нј дневно. Пробни рад у овој компанији може да траје највише 140 целих радних дана (2 дана по пола радног времена се рачунају као 1 цео радни дан).

Пошто жели да што боље искористи време за пробни рад, дипломирани инжењер ФОНа проценио је да пробни рад може да реализује на 4 начина: да читаво радно време проведе у некој од компанија К1 или К2, или да прву половину радног времена проведе у компанијама К1 или К2, а другу половину радног времена у компанији К3. Потребно је одредити колико ће дана у којој компанији он бити на пробном раду, ако жели да његова укупна зарада буде максимална.

- а) Формулисати математички модел проблема,
- б) Одредити оптимално решење модела формулисаног под а) и детаљно га објаснити,
- в) Одредити да ли би се променио план пробног рада ако би компанија К3 плаћала 30 нј. по дану (пола радног времена),
- г) У разговорима са компанијама отворила се још једна могућност за спровођење пробног рада: 2/3 радног времена би радио у компанији К1 за 45нј, а 1/3 у компанији К2 за 20нј. Проверити да ли се дипломираном инжењеру ФОНа исплати да укључи у план пробног рада такве радне дане.

**РЕШЕЊЕ:** Да би што ефикасније обавио пробни рад и упознао рад компанија, и при томе зарадио максималних 12200 нј., дипломирани инжењер ФОНа треба да ради свих 11 месеци (220 радних дана) и то: 120 целих радних дана да ради у компанији К1, а 100 радних дана пре подне у К2 а после подне у К3. Ако би и после тог времена био неодлучан, могао би да искористи још 40 дана за пробни рад у компанији К1 и 90 дана у компанији К2.

18. Градско комунално предузеће (ГКП), изненађено фебруарским снегом, није успело да адекватно реагује на велике падавине. Након анализе стања, утврђено је да нема довољно возила за чишћење снега и да мора да се обнови возни парк, и у ту сврху је из буџета издвојено 4500нј.. Управа је одлучила да набави изванредан број нових наменских возила – чистача снега, који коштају 40нј. Ови чистачи могу да чисте просечно 32км пута и ангажују 1 возача и 3 помоћна радника. Управа је, такође, утврдила да у гаражи ГКПа постоји 100 камиона на којима би по цени од 5нј по камиону могле да се уграде кашике за чишћење снега. Овакви камиони би могли да чисте у просеку 10км пута на сат, а ангажовали би по 2 радника (1 возача и 1 помоћног радника). Потребно је одредити колико камиона треба адаптирати, односно колико купити нових чистача, да би просечна ефикасност (очишћени километри по сату) новог возног парка била максимална. Новац из буџета се не мора потрошити, а у ГКП је запослено 130 возача и 400 неквалификованих радника.

- а) Формулисати математички модел описаног проблема,
- б) Формулисати дуални модел модела формулисаног под а),
- в) Одредити оптимална решења прималног и дуалног модела и детаљно објаснити оба решења.

Постооптималном анализом утврдити да ли долази до промене оптималног решења проблема при следећим променама, и ако долази, назначити која променљива улази а која излази из базе.

- г) Управа ГКП је накнадно утврдила да од камиона које има у гаражи, најмање 50 мора да адаптира за чишћење снега,  
д) Одлучено је да број нових чистача буде 3 пута већи од броја адаптираних камиона.

**РЕШЕЊЕ:** Да би постигла максималну ефикасност од 3720 очишћених километара по сату, управа ГКП треба да купи 110 чистача снега и да на 20 својих камиона угради кашике за чишћење снега. При томе 80 камиона остаје за коришћење у друге сврхе или за, евентуално, касније надограђивање (ако би се обезбедило још новца из буџета). 50 неквалификованих радника ће остати нераспоређено.

19. Мотоциклиста је решио да испита стање гума на свом мотору. Утврдио је да једна од њих (г1) може да се користи за још 15000 километара на погонском точку, друга (г2) може да се вози 20000 км на предњем точку. Трећа гума (г3) је у лошијем стању и може да се користи на предњем точку и то највише 10000 км. Од новца који је прикупио мотоциклиста је купио две нове гуме – гуму г4 која може да се користи 25000 км на погонском и гуму г5 која може да се користи 40000 км на предњем точку.

Сада, када има 5 гума, мотоциклиста може да их распореди на 4 различита начина: г2г4 (г2 на предњем, г4 на погонском точку), г5г1, г3г1 и г3г4. Колико километара мотоциклиста треба да вози на сваки од ових начина да би прешао максималан укупан број километара?

- а) Формулисати математички модел постављеног проблема,  
б) Одредити оптимално решење,  
в) Одредити колико километара ће свака од гума бити коришћена на погонском и предњем точку и коју гуму мотоциклиста може да баци након што пређе оптималну километражу.  
г) Написати колико има базних оптималних решења и да ли постоји решење по коме ће најлошија гума (г3) бити коришћена док се не истроши.

**РЕШЕЊЕ:** Максималан број километара који мотоциклиста може да пређе је 40000, и то ако 20000 км вози са гумом г2 на предњем а гумом г4 на погонском точку, 15000км са г5 на предњем а г1 на погонском точку и 5000км са г3 на предњем и г4 на погонском точку. Када пређе 40000 километара, гуме г1 и г2 више неће моћи да користе.

20. Власник агенције за обезбеђење треба да ангажује своје запослене на чувању неког објекта. Објекат треба чувати даноноћно, а број потребних радника обезбеђења зависи од доба дана и дат је следећом табелом:

Време	Минималан број радника обезбеђења
поноћ- 4.00	5
4.00-8.00	7
8.00-подне	15
подне-16.00	7
16.00-20.00	12
20.00-поноћ	9

Радници обезбеђења раде у сменама од по 8 часова, које су распоређене на следећи начин:

Смена	Почетак	Крај
1	поноћ	8.00
2	4.00	подне
3	8.00	16.00
4	подне	20.00
5	16.00	поноћ
6	20.00	4.00



Колики је минималан број радника које власник агенције за обезбеђење треба да ангажује на чувању објекта да би у сваком моменту објекат чувало бар онолико радника колико је захтевано?

- а) Формулисати математички модел постављеног проблема,
- б) Одредити оптимално решење,
- в) Власник агенције је анализирао плате својих запослених и утврдио да су дневнице у сменама 3 и 4 најниже, док су у сменама смене 5 и 6 оне два пута, а у сменама 1 и 2 три пута веће од њих. Због тога је закључио да критеријум у распоређивању не треба да му буде ангажовање што мањег броја запослених, већ што мањи трошак дневница. Одредити да ли долази до промене оптималног решења.

**РЕШЕЊЕ:** Потребне обезбеђења објекта се могу задовољити са 32 радника, и то: са 8 радника у смени од од 4 часа до поднева, 7 радника у смени од 8 до 16 часова, 12 радника од 16 часова до поноћи и 5 радника од 20 до 4 часа. У преостале 2 смене не треба ангажовати раднике. При томе ће у термину од 4 до 8 часова бити ангажовано 6, а у термину од 20 часова до поноћи 3 радника више.