



УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

Радна недеља	Тематска целина		Циљ
11.	5. Нелинеарно програмирање		Упознавање са основним моделима нелинеарног програмирања и методама за њихово решавање
	Тематска јединица	5.1 Општи проблем нелинеарног програмирања	Општи облик проблема нелинеарног програмирања и његове особине
	Тематска јединица	5.2 Безусловна оптимизација	Методологија за решавање проблема нелинеарног програмирања без ограничења
	Тематска јединица	5.3 Класични проблем условног екстремума	Методе за решавање проблема нелинеарног програмирања са ограничењима типа једнакости

Радна недеља	Тематска јединица	ЦИЉ УЧЕЊА
11.	5.2 Безусловна оптимизација	Методологија за решавање проблема нелинеарног програмирања без ограничења

НАСТАВНИ МЕТОД: ПРЕДАВАЊЕ

BEZUSLOVNA OPTIMIZACIJA

Problem:

$$\begin{array}{ll} \text{(BO)} & \min f(x) \\ & x \in R^n \end{array}$$

Pretpostavka: f dvaput neprekidno diferencijabilna na R^n .

Metodologija:

1) Traže se rešenja sistema

$$(S) \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

To su tzv. *stacionarne tačke*, kandidati za ekstremum.

2) Traži se matrica drugih izvoda

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

3) Neka je x^* rešenje sistema (S). Računa se $\nabla^2 f(x^*)$ i nalaze glavni minori D_1, \dots, D_n .

(i) Ako je $D_1 > 0, D_2 > 0, \dots, D_n > 0 \Rightarrow x^*$ je strogi lokalni minimum

(ii) Ako je $D_1 < 0, D_2 > 0, \dots, (-1)^n D_n > 0 \Rightarrow x^*$ je strogi lokalni maksimum

Navedena metodologija se zasniva na sledećim rezultatima:

Teorema 1 (Neophodni uslovi za lokalni minimum). Ako je x^* lokalni minimum funkcije f , tada $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*) = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^*) = 0$,
t.j. *gradijent* $\nabla f(x) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x))$ je jednak 0 u tački x^* .

Teorema 2 (Dovoljni uslovi za strogi lokalni minimum). Ako je $\nabla f(x^*) = 0$ i ako je matrica $\nabla^2 f(x^*)$ pozitivno definitna, tada je x^* je strogi lokalni minimum funkcije f .

(Podsećanje: Simetrična matrica $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ je pozitivno definitna ako je

$$y^T A y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} y_i y_j > 0 \quad \text{za svako } y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$$

Teorema 3 (Silvestrov kriterijum). $\nabla^2 f(x^*)$ je pozitivno definitna matrica $\Leftrightarrow D_1 > 0, \dots, D_n > 0$.

(Podsećanje: *Glavni minori* simetrične matrice $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ su

$$a_{11} \text{ , } \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ , } \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ , } \dots \text{ , } \det A \text{)}$$

Primer 1.

$$f(x) = x_1^4 + x_2^4 - x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 4x_1^3 - 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 4x_2^3 - 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 4x_1^3 = 4x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$4x_1^3 - 4x_1 = 0 \Rightarrow$$

$$x_1 = 0 \quad x^1 = (0, 0)$$

$$x_1 = 1 \quad x^2 = (1, 1)$$

$$x_1 = -1 \quad x^3 = (-1, -1)$$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 12x_1^2 - 2 & -2 \\ -2 & 12x_2^2 - 2 \end{bmatrix}$$

$$x^1 = (0, 0), \quad \nabla^2 f(x^1) = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad D_1 = -2, \quad D_2 = 0 \quad \text{bez zaključka}$$

$$x^2 = (1, 1), \quad \nabla^2 f(x^2) = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}, \quad D_1 = 10, \quad D_2 = 96 \quad \text{strogi lok. min.}$$

$$x^3 = (-1, -1), \quad \nabla^2 f(x^3) = \nabla^2 f(x^2), \quad \text{strogi lok. min.}$$

Šta ako su narušeni uslovi (i), (ii)?

Važi sledeće pravilo:

- 1) Ako postoji glavni minor parnog reda koji je $< 0 \Rightarrow x^*$ nije ekstremum.
- 2) Ako postoje dva glavna minora neparnog reda različitog znaka $\Rightarrow x^*$ nije ekstremum.

3) Ако је $D_1 \geq 0, \dots, D_n \geq 0$ (бар један $=0$) или $D_1 \leq 0, \dots, (-1)^n D_n \geq 0$ (бар један $=0$) треба evaluirati sve minore simetrične u odnosu na glavnu dijagonalu.

3.1) Ако постоји симетричан minor парног реда који је $< 0 \Rightarrow x^*$ nije ekstremum.

3.2) Ако постоје два симетрична minora непарног реда различитог знака $\Rightarrow x^*$ nije ekstremum.

(Podsećanje: Minor k -tog reda *simetričan u odnosu na glavnu dijagonalu* је determinanta podmatrice matrice $\nabla^2 f(x^*)$ određene članovima na preseku k proizvoljnih redova i njima odgovarajućih kolona ove matrice.)

Šta ako su narušeni i uslovi 1), 2), 3.1), 3.2)?

Onda nema odgovora na pitanje da li se radi o ekstremumu. To se vidi već na primeru funkcija jedne promenljive. Tačka $x^* = 0$ je stacionarna tačka funkcija $f(x) = x^4$ i $g(x) = x^3$ i važi $f''(0) = 0$, $g''(0) = 0$. Ova tačka jeste minimum funkcije f , a nije ekstremum (ni minimum ni maksimum) funkcije g .

Napomena 1: Broj glavnih minora jednak je n , dok broj simetričnih minora raste eksponencijalnom brzinom u odnosu na n . Zato 3.1) i 3.2) ima smisla koristiti samo za probleme malih dimenzija

Primer 2. $\nabla^2 f(x^1) = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$

Svi minori simetrični u odnosu na glavnu dijagonalu su

$$\left. \begin{array}{l} \Delta_1 = -2 \quad (\text{vrsta 1, kolona 1}) \\ \Delta_2 = -2 \quad (\text{vrsta 2, kolona 2}) \\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \end{array} \right\} \text{ i dalje nema odgovora}$$

Direktna analiza: x^1 nije ekstremum.

Питања:

1. Шта су неопходни услови за локални екстремум проблема безусловне оптимизације?
2. Шта су довољни услови за строги локални минимум (максимум) проблема безусловне оптимизације?



УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА