



УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

Општи проблем нелинеарног програмирања



Радна недеља	Тематска целина		Циљ
11.	5. Нелинеарно програмирање		Упознавање са основним моделима нелинеарног програмирања и методама за њихово решавање
	Тематска јединица	5.1 Општи проблем нелинеарног програмирања	Општи облик проблема нелинеарног програмирања и његове особине
	Тематска јединица	5.2 Безусловна оптимизација	Методологија за решавање проблема нелинеарног програмирања без ограничења
	Тематска јединица	5.3 Класични проблем условног екстремума	Методе за решавање проблема нелинеарног програмирања са ограничењима типа једнакости

Општи проблем нелинеарног програмирања



Радна недеља	Тематска јединица	ЦИЉ УЧЕЊА
11.	5.1 Општи проблем нелинеарног програмирања	Општи облик проблема нелинеарног програмирања и његове особине

НАСТАВНИ МЕТОД: ПРЕДАВАЊЕ

Општи проблем нелинеарног програмирања



OPŠTI PROBLEM NELINEARNOG PROGRAMIRANJA

Opšti oblik problema nelinearnog programiranja:

$$\begin{aligned} \text{(NLP)} \quad & \min(\max) f(x_1, \dots, x_n) \\ & g_i(x_1, \dots, x_n) \leq 0, i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

gde je f - funkcija cilja, g_i - funkcije ograničenja.

Vektorski zapis: $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$, $f: R^n \rightarrow R$, $g_i: R^n \rightarrow R$

$$\begin{aligned} \text{(NLP)} \quad & \min(\max) f(x) \\ & g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Treći (najkraći) zapis:

$$\begin{aligned} \text{(NLP)} \quad & \min(\max) f(x) \\ & x \in X \end{aligned}$$

gde je $X = \{x \in R^n \mid g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m\}$ dopustivi skup.

Општи проблем нелинеарног програмирања



Ako je $X = R^n$ (NLP) se naziva *problem bezuslovne optimizacije* ili *bezuslovnog ekstremuma*

$$\begin{array}{ll} \text{(BO)} & \min(\max) f(x) \\ & x \in R^n \end{array}$$

Ako je $X \neq R^n$ (NLP) se naziva *problem uslovne optimizacije* ili *uslovnog ekstremuma*

Napomena 1: Problem maksimizacije se može svesti na problem minimizacije. Rešava se pomoćni problem

$$\begin{aligned} &\min(-f(x)) \\ &x \in X \end{aligned}$$

i optimalna vrednost funkcije cilja se množi sa -1 . U daljem radimo samo sa problemima minimizacije.

Напомена 2: Допустиви skup je bez umanjenja opštosti definisan preko ograničenja tipa \leq . Zaista, ograničenje $h(x) = 0$ može da se zameni sa dve nejednačine $h(x) \leq 0$, $h(x) \geq 0$, tj. sa nejednačinama $h(x) \leq 0$, $-h(x) \leq 0$, dok se ograničenje tipa $v(x) \geq u(x)$ može zapisati u obliku $u(x) - v(x) \leq 0$. Na primer, skup zadat sa

$$x_1^2 + x_2^2 = x_3 - 1, \quad x_1 \geq x_2$$

možemo opisati na sledeći način:

$$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3 + 1 \leq 0$$

$$g_2(x) = -x_1^2 - x_2^2 + x_3 - 1 \leq 0$$

$$g_3(x) = x_2 - x_1 \leq 0.$$

Напомена 3: Ако у опису проблема учествују само једначине ради се о *tzv. klasičnom problemu uslovnog ekstremuma*

$$\begin{array}{ll} \text{(KLP)} & \min f(x_1, \dots, x_n) \\ & h_i(x_1, \dots, x_n) = 0, i = 1, \dots, m \end{array}$$

Овај проблем је познат одавно, и третира се директно, без сводjenja на ограничења типа \leq .

Pojam dopustivog i optimalnog rešenja.

Svako $x \in X$ se naziva *dopustivo rešenje*. Koncept optimalnosti je složeniji i obuhvata više pojmova.

$x^* \in X$ je *globalni minimum* problema (NLP) ako je $f(x^*) \leq f(x)$ za sve $x \in X$.

$x^* \in X$ je *strogi globalni minimum* problema (NLP) ako je $f(x^*) < f(x)$ za sve $x \in X$ različite od x^* .

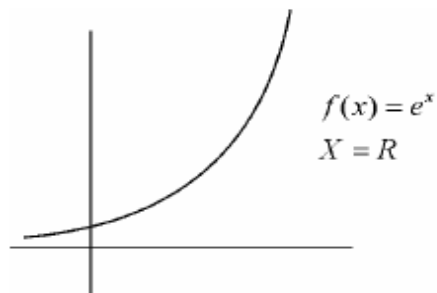
Napomena 4: Za globalni minimum se koriste i termini *globalni optimum*, tj. *globalni ekstremum* (isti termini se koriste i za globalni maksimum).

Napomena 5: Ako je f neprekidna funkcija, a skup X zatvoren i ograničen postoji (bar jedan) globalni minimum $x^* \in X$.

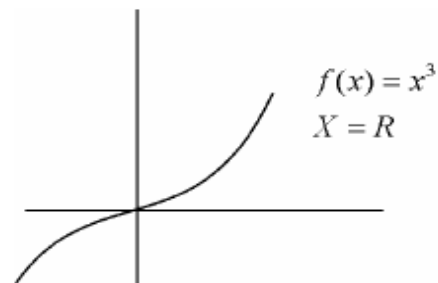
Општи проблем нелинеарног програмирања



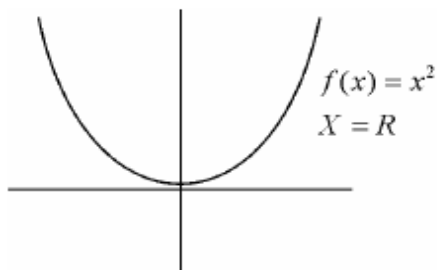
Primer 1. Globalni minimum



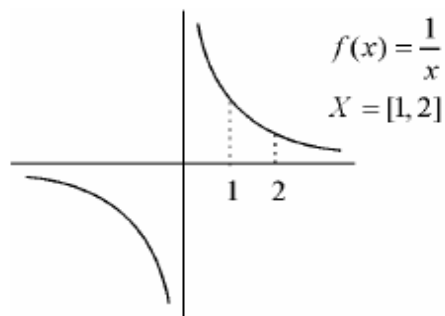
ne postoji globalni minimum
(f ograničena odozdo)



ne postoji globalni minimum
(f nije ograničena odozdo)



$x^* = 0$ je strogi globalni minimum



$x^* = 2$ je strogi globalni minimum

Таčka $x^* \in X$ је *lokalni minimum* problema (NLP) ако је најбоља у некој својој допустивој околини, тј. постоји $\delta > 0$ такво да за свако $x \in X$ које припада δ – околини таčke x^* важи да је $f(x^*) \leq f(x)$.

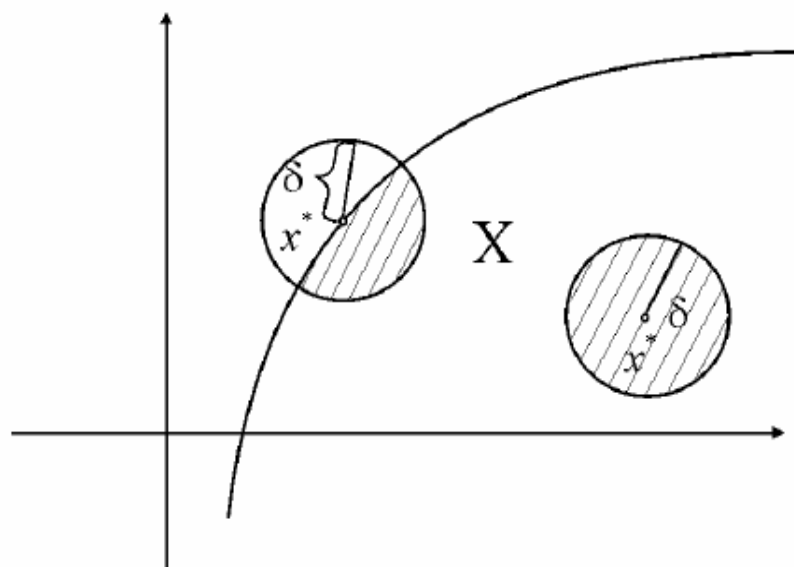
Напомена 6: Подсећамо да се δ – околina таčke $x^* \in R^n$ дефинише као skup свих таčака $x \in R^n$ таквих да је $\|x - x^*\| < \delta$. Подразумева се да је

$$\|x - x^*\| = \sqrt{(x_1 - x_1^*)^2 + \cdots + (x_n - x_n^*)^2}.$$

Општи проблем нелинеарног програмирања



Geometrijska interpretacija dopustive okoline date tačke u R^2 data je na slici.



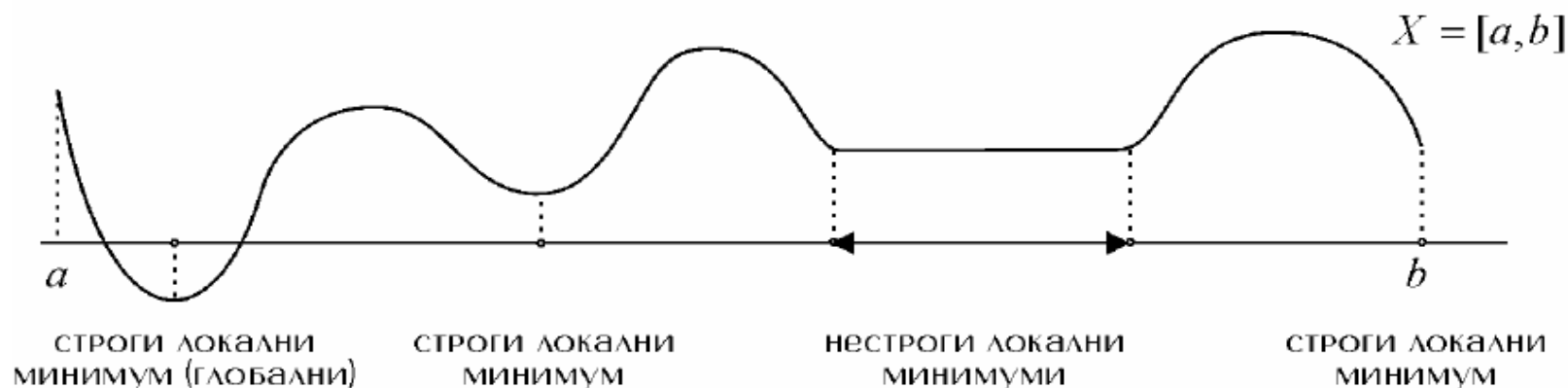
Dopustiva okolina tačke

Tačka $x^* \in X$ je *strogi lokalni minimum* problema (NLP) ako postoji $\delta > 0$ takvo da za svako $x \in X$, $x \neq x^*$, koje pripada δ -okolini tačke x^* važi da je $f(x^*) < f(x)$.

Општи проблем нелинеарног програмирања



Примери наведених појмова у случају функције једне променљиве дати су на слици.



Stanje teorije u oblasti NLP

- 1) Postoji karakterizacija lokalnih minimuma (neophodni i dovoljni uslovi za optimalnost).
- 2) Karakterizacija globalnih minimuma ne postoji, osim u specijalnim slučajevima, kao što je linearno programiranje, konveksno programiranje, itd.

- 3) *Metode nelinearnog programiranja* su postupci za efektivno nalaženje lokalnih minimuma.
- 4) *Metode globalne optimizacije* kombinuju metode nelinearnog programiranja sa raznim tehnikama pretraživanja dopustivog skupa u cilju nalaženja globalnih minimuma. Ako se radi o problemima malih dimenzija sa zatvorenim i ograničenim dopustivim skupom u principu se mogu naći svi lokalni minimumi i od njih odabrati najbolji. U praksi se obično radi sa problemima velikih dimenzija, tako da se problemi globalne optimizacije rešavaju uglavnom heurističkim metodama.

Општи проблем нелинеарног програмирања



ПИТАЊА:

1. Како се дефинише општи облик проблема нелинеарног програмирања?
2. Како се класификују проблеми нелинеарног програмирања?
3. Шта је локални, а шта глобални минимум (максимум) ?



УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА