

1. Data je matrica podataka sa podacima o različitim psihotičkim stanjima:

Stanje	HAMA	HAMD	HASA
Normalno stanje	0.60	0.15	0.22
Lične promene	1.40	0.20	0.00
Opsednutost	4.71	1.59	1.12
Psihopatija	3.81	1.84	0.81
Histerija	3.03	1.24	0.55
Nemirno stanje	2.93	1.67	0.73

Metodom nehijerarhijske klasifikacije podeliti date entitete u tri grupe sa početnim rešenjem najudaljenijih elemenata korišćenjem city block odstojanja. Odrediti:

- Finalno odstojanje između klastera
- Definisati elemente svakog klastera i imenovati svaki od dobijenih klastera
- Utvrditi migraciju centroida između inicijalnih i krajnjih rešenja klaster analize

2. Metodom hijerarhijske klasifikacije uz korišćenje city block odstojanja metodama minimalnog i maksimalnog povezivanja odrediti:

- Matricu hijerarhije
- Prikazati dendrograme i odrediti koja metoda je bolja za korišćenje
- Preseći dendrograme tako da se dobiju tri grupe
- Definisati imena navedenim grupama

3. Neka su poznati težinski koeficijenti drugog faktora i komunaliteti:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
F1	+	+	-	-	+	+
h^2	0.14	0.06	0.43	0.55	0.40	0.52
F2	-0.37	-0.24	+0.47	+0.52	+0.43	+0.47

- Izračunati težinske koeficijente prvog faktora
- Rotirati vektore za 45°
- Prikazati težinske koeficijente na osnovu rotacije
- Odrediti pripadnost elemenata na osnovu dobijene rotacije
- Imenovati faktore
- Da li su faktori definisani datom matricom rotacije ortogonalni

4. Neka su na osnovu uzorka veličine $n = 10$ izračunati koeficijenti korelacije vektora $X^T = (X_1, X_2, X_3)$: $r_{12} = 0.67$, $r_{13} = -0.1$ i $r_{23} = -0.29$. Neka je još poznato da druga glavna komponenta nosi 30.9% varijabiliteta i da je prvi svojstveni vektor $(0.64, 0.69, -0.34)^T$.

- Koliko procenata varijabiliteta nose prve dve glavne komponente?
- Koliki je varijabilitet treće glavne komponente?
- Kolika je generalizovana varijansa vektora X ?
- Izračunati ocenu korelacione matrice na osnovu prve glavne komponente.
- Izračunati korelaciju između prve i treće glavne komponente.

Zaodatak		X_1	X_2	X_3
Entiteti	Stanje	HAMA	HAMD	HA SA
e_1	Normalno stanje	0,60	0,15	0,22
e_2	Lične promene	1,40	0,20	0,00
e_3	Opsednutost	4,71	1,59	1,12
e_4	Psihopatija	3,81	1,84	0,81
e_5	Histerija	3,03	1,24	0,55
e_6	Nemirno stanje	2,93	1,67	0,73

- City Block odstojanje je zapravo korišćenje Minkovsk metrike gde je parametar jednak jedinici ($\lambda=1$)

$$M_{rs} = \left[\sum_{j=1}^p |X_{rj} - X_{sj}|^\lambda \right]^{\frac{1}{\lambda}}$$

iz čega sledi sledeća klasifikacija:

$$d_{11} = 0$$

$$d_{12} = |0,60 - 1,40| + |0,15 - 0,20| + |0,22 - 0,00| = 0,8 + 0,05 + 0,22 = 1,07$$

$$d_{13} = |0,60 - 4,71| + |0,15 - 1,59| + |0,22 - 1,12| = 4,11 + 1,44 + 0,9 = 6,45$$

$$d_{14} = |0,60 - 3,81| + |0,15 - 1,84| + |0,22 - 0,81| = 3,21 + 1,69 + 0,59 = 5,49$$

$$d_{15} = |0,60 - 3,03| + |0,15 - 1,24| + |0,22 - 0,55| = 2,43 + 1,09 + 0,33 = 3,85$$

$$d_{16} = |0,60 - 2,93| + |0,15 - 1,67| + |0,22 - 0,73| = 2,33 + 1,52 + 0,51 = 4,36$$

$$d_{21} = d_{12} = 1,07$$

$$d_{22} = 0$$

$$d_{23} = |1,40 - 4,71| + |0,20 - 1,59| + |0,00 - 1,12| = 3,31 + 1,39 + 1,12 = 5,82$$

$$d_{24} = |1,40 - 3,81| + |0,20 - 1,84| + |0,00 - 0,81| = 2,41 + 1,64 + 0,81 = 4,86$$

$$d_{25} = |1,40 - 3,03| + |0,20 - 1,24| + |0,00 - 0,55| = 1,63 + 1,04 + 0,55 = 3,22$$

$$d_{26} = |1,40 - 2,93| + |0,20 - 1,67| + |0,00 - 0,73| = 1,53 + 1,47 + 0,73 = 3,73$$

$$d_{31} = d_{13} = 6,45$$

$$d_{34} = |4,71 - 3,81| + |1,59 - 1,84| + |1,12 - 0,81| = 0,9 + 0,25 + 0,31 = 1,46$$

$$d_{32} = d_{23} = 5,82$$

$$d_{35} = |4,71 - 3,03| + |1,59 - 1,24| + |1,12 - 0,55| = 1,68 + 0,35 + 0,57 = 2,6$$

$$d_{33} = 0$$

$$d_{36} = |4,71 - 2,93| + |1,59 - 1,67| + |1,12 - 0,73| = 1,78 + 0,08 + 0,39 = 2,25$$

$$\begin{aligned}
 d_{41} &= d_{14} = 5,49 \\
 d_{42} &= d_{24} = 4,86 \\
 d_{43} &= d_{34} = 1,46 \\
 d_{44} &= 0 \\
 d_{45} &= |3,81 - 3,03| + |1,84 - 1,24| + |0,81 - 0,55| = 0,78 + 0,60 + 0,26 = 1,64 \\
 d_{46} &= |3,81 - 2,93| + |1,84 - 1,67| + |0,81 - 0,73| = 0,88 + 0,17 + 0,08 = 1,13 \\
 d_{51} &= d_{15} = 3,85 \\
 d_{52} &= d_{25} = 3,22 \\
 d_{53} &= d_{35} = 2,6 \\
 d_{54} &= d_{45} = 1,64 \\
 d_{55} &= 0 \\
 d_{56} &= |3,03 - 2,93| + |1,24 - 1,67| + |0,55 - 0,73| = 0,1 + 0,43 + 0,18 = 0,71
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_{61} &= d_{16} = 4,36 \\
 d_{62} &= d_{26} = 3,73 \\
 d_{63} &= d_{36} = 2,25 \\
 d_{64} &= d_{46} = 1,13 \\
 d_{65} &= d_{56} = 0,71 \\
 d_{66} &= 0
 \end{aligned}$$

\Rightarrow matrica rastojanja $D =$

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
e_1	0	1,07	<u>6,45</u>	5,49	3,85	4,36
e_2		0	5,82	4,86	3,22	3,73
e_3			0	1,46	2,6	2,25
e_4				0	1,64	1,13
e_5					0	0,71
e_6						0

Simetrična u odnosu na gl. dijagonalu

posto koristimo metodu najudaljenijih elemenata iz ~~total~~ matrice rastojanja možemo da vidimo da su entiteti e_1 i e_3 međusobno najudaljeniji od svih parova u matrici D . To rastojanje iznosi 6,45. Sada nam e_1 i e_3 predstavljaju prva dva centroida.

Da bismo našli treći centroid potrebno je izračunamo razlike odstojaanja odnosno udaljenosti početnih centroida e_1 i e_3 i ostalih entiteta. Onaj entitet čija je razlika odstojaanja u odnosu na centroide najmanja postać će treći centroid. On je podjednako udaljen od svakog centroida.

	e_1	e_3	$ e_1 - e_3 $
e_2	1,07	5,82	4,75
e_4	5,49	1,46	4,03
<u>e_5</u>	3,85	2,6	<u>1,25</u>
e_6	4,36	2,25	2,11

\rightarrow entitet e_5 ima najmanju razliku odstojaanja od centroida e_1 i e_3 i podjednako je udaljen od oba centroida u odnosu na ostale entitete pa samim tim e_5 postaje centroid.

Sada imamo početne centroide:

$$\begin{aligned}
 (e_1) \ A^0 &= (0,60; 0,15; 0,22) \\
 (e_3) \ B^0 &= (4,71; 1,59; 1,12) \\
 (e_5) \ C^0 &= (3,03; 1,24; 0,55)
 \end{aligned}$$

- sada računamo odstojanja entiteta i centroida i posmatramo da li će se centriodi pomeriti.

$$d(e_1, A^0) = |0,60 - 0,60| + |0,15 - 0,15| + |0,22 - 0,22| = 0$$

$$d(e_2, A^0) = |1,40 - 0,60| + |0,20 - 0,15| + |0,00 - 0,22| = 0,8 + 0,05 + 0,22 = 1,07$$

$$d(e_3, A^0) = |4,21 - 0,60| + |1,59 - 0,15| + |1,12 - 0,22| = 4,11 + 1,44 + 0,9 = 6,45$$

$$d(e_4, A^0) = |3,81 - 0,60| + |1,84 - 0,15| + |0,81 - 0,22| = 3,21 + 1,69 + 0,59 = 5,49$$

$$d(e_5, A^0) = |3,03 - 0,60| + |1,24 - 0,15| + |0,55 - 0,22| = 2,43 + 1,09 + 0,33 = 3,85$$

$$d(e_6, A^0) = |2,93 - 0,60| + |1,62 - 0,15| + |0,73 - 0,22| = 2,33 + 1,52 + 0,51 = 4,36$$

$$d(e_1, B^0) = |0,60 - 4,21| + |0,15 - 1,59| + |0,22 - 1,12| = 4,11 + 1,44 + 0,9 = 6,45$$

$$d(e_2, B^0) = |1,40 - 4,21| + |0,20 - 1,59| + |0,00 - 1,12| = 3,31 + 1,39 + 1,12 = 5,82$$

$$d(e_3, B^0) = |4,21 - 4,21| + |1,59 - 1,59| + |1,12 - 1,12| = 0$$

$$d(e_4, B^0) = |3,81 - 4,21| + |1,84 - 1,59| + |0,81 - 1,12| = 0,9 + 0,25 + 0,31 = 1,46$$

$$d(e_5, B^0) = |3,03 - 4,21| + |1,24 - 1,59| + |0,55 - 1,12| = 1,68 + 0,35 + 0,57 = 2,6$$

$$d(e_6, B^0) = |2,93 - 4,21| + |1,62 - 1,59| + |0,73 - 1,12| = 1,28 + 0,03 + 0,39 = 2,25$$

$$d(e_1, C^0) = |0,60 - 3,03| + |0,15 - 1,24| + |0,22 - 0,55| = 2,43 + 1,09 + 0,33 = 3,85$$

$$d(e_2, C^0) = |1,40 - 3,03| + |0,20 - 1,24| + |0,00 - 0,55| = 1,63 + 1,04 + 0,55 = 3,22$$

$$d(e_3, C^0) = |4,21 - 3,03| + |1,59 - 1,24| + |1,12 - 0,55| = 1,68 + 0,35 + 0,57 = 2,6$$

$$d(e_4, C^0) = |3,81 - 3,03| + |1,84 - 1,24| + |0,81 - 0,55| = 0,78 + 0,60 + 0,26 = 1,64$$

$$d(e_5, C^0) = |3,03 - 3,03| + |1,24 - 1,24| + |0,55 - 0,55| = 0$$

$$d(e_6, C^0) = |2,93 - 3,03| + |1,62 - 1,24| + |0,73 - 0,55| = 0,1 + 0,43 + 0,18 = 0,71$$

Formiramo novu tabelu i grupiramo entitete u određene grupe odnosa pridruženo ih centroidima od kojih su najmanje udaljeni:

entiteti	A ⁰	B ⁰	C ⁰	min
e ₁ Normalno stanje	0	6,45	3,85	A ⁰
e ₂ Lične promene	1,07	5,82	3,22	A ⁰
e ₃ Opsednutost	6,45	0	2,6	B ⁰
e ₄ Psihopatija	5,49	1,46	1,64	B ⁰
e ₅ Histerija	3,85	2,6	0	C ⁰
e ₆ Nemirno stanje	4,36	2,25	0,71	C ⁰

- Na osnovu pridruženih entiteta formiramo nove centre:

$$A'(e_1, e_2) \left(\frac{0,60 + 1,40}{2}, \frac{0,15 + 0,20}{2}, \frac{0,22 + 0,00}{2} \right) = (1,0; 0,175; 0,11)$$

$$B'(e_3, e_4) \left(\frac{4,21 + 3,81}{2}, \frac{1,59 + 1,84}{2}, \frac{1,12 + 0,81}{2} \right) = (4,26; 1,715; 0,965)$$

$$C'(e_5, e_6) \left(\frac{3,03 + 2,93}{2}, \frac{1,24 + 1,62}{2}, \frac{0,55 + 0,73}{2} \right) = (2,98; 1,455; 0,64)$$

...da računamo oostojanja entiteta od novih centroida:

(12)

$$d(e_1, A') = |0,6-1| + |0,15-0,175| + |0,22-0,11| = 0,4 + 0,025 + 0,11 = 0,535$$

$$d(e_2, A') = |1,4-1| + |0,20-0,175| + |0,00-0,11| = 0,4 + 0,25 + 0,11 = 0,535$$

$$d(e_3, A') = |4,21-1| + |1,59-0,175| + |1,12-0,11| = 3,21 + 1,415 + 1,01 = 6,135$$

$$d(e_4, A') = |3,81-1| + |1,84-0,175| + |0,81-0,11| = 2,81 + 1,665 + 0,7 = 5,175$$

$$d(e_5, A') = |3,03-1| + |1,24-0,175| + |0,55-0,11| = 2,03 + 1,065 + 0,44 = 3,535$$

$$d(e_6, A') = |2,93-1| + |1,67-0,175| + |0,73-0,11| = 1,93 + 1,495 + 0,62 = 4,045$$

$$d(e_1, B') = |0,6-4,26| + |0,15-1,215| + |0,22-0,965| = 3,66 + 1,065 + 0,745 = 5,92$$

$$d(e_2, B') = |1,4-4,26| + |0,20-1,215| + |0,00-0,965| = 2,86 + 1,015 + 0,965 = 5,34$$

$$d(e_3, B') = |4,21-4,26| + |1,59-1,215| + |1,12-0,965| = 0,05 + 0,375 + 0,155 = 0,73$$

$$d(e_4, B') = |3,81-4,26| + |1,84-1,215| + |0,81-0,965| = 0,45 + 0,625 + 0,155 = 0,73$$

$$d(e_5, B') = |3,03-4,26| + |1,24-1,215| + |0,55-0,965| = 1,23 + 0,025 + 0,415 = 2,12$$

$$d(e_6, B') = |2,93-4,26| + |1,67-1,215| + |0,73-0,965| = 1,33 + 0,455 + 0,235 = 1,61$$

$$d(e_1, C') = |0,6-2,98| + |0,15-1,455| + |0,22-0,64| = 2,38 + 1,305 + 0,42 = 4,105$$

$$d(e_2, C') = |1,4-2,98| + |0,20-1,455| + |0,00-0,64| = 1,58 + 1,255 + 0,64 = 3,475$$

$$d(e_3, C') = |4,21-2,98| + |1,59-1,455| + |1,12-0,64| = 1,23 + 0,135 + 0,48 = 2,345$$

$$d(e_4, C') = |3,81-2,98| + |1,84-1,455| + |0,81-0,64| = 0,83 + 0,385 + 0,17 = 1,385$$

$$d(e_5, C') = |3,03-2,98| + |1,24-1,455| + |0,55-0,64| = 0,05 + 0,215 + 0,09 = 0,355$$

$$d(e_6, C') = |2,93-2,98| + |1,67-1,455| + |0,73-0,64| = 0,05 + 0,215 + 0,09 = 0,355$$

Opet formiramo tabelu:

Entiteti	A'	B'	C'	min
e ₁ Normalno stanje	0,535	5,92	4,105	A'
e ₂ Lične promene	0,535	5,34	3,475	A'
e ₃ Opsednutost	6,135	0,73	2,345	B'
e ₄ Psihopatija	5,175	0,73	1,385	B'
e ₅ Histerija	3,535	2,12	0,355	C'
e ₆ Nenirno stanje	4,045	1,61	0,355	C'

Posto je redosled isti kao i u početnoj iteraciji postupak se završava.

FINALNI CENTROIDI:

$$A(1; 0,175; 0,11)$$

$$B(4,26; 1,215; 0,965)$$

$$C(2,98; 1,455; 0,64)$$

Ⓐ Finalno odstojanje između klastera

Ⓐ

$$d(A, B) = |1 - 4,26| + |0,125 - 1,215| + |0,11 - 0,965| = 3,26 + 1,54 + 0,855 = \underline{5,655}$$

$$d(A, C) = |1 - 2,98| + |0,125 - 1,455| + |0,11 - 0,64| = 1,98 + 1,28 + 0,53 = \underline{3,79}$$

$$d(B, C) = |4,26 - 2,98| + |1,215 - 1,455| + |0,965 - 0,64| = 1,28 + 0,26 + 0,325 = \underline{1,865}$$

Ⓑ Definirati elemente svakog klastera i imenovati svaki od dobijenih klastera

I grupa (A) - "Normalno psihološko stanje" = $\{ \overset{e_1}{\text{Normalno stanje}}, \overset{e_2}{\text{Lične promene}} \}$

II grupa (B) - "Teško psihološko stanje" = $\{ \overset{e_3}{\text{Opsesivnost}}, \overset{e_4}{\text{Psihopatija}} \}$

III grupa (C) - "Anksiozno psihološko stanje" = $\{ \overset{e_5}{\text{Histerija}}, \overset{e_6}{\text{Neurosko stanje}} \}$

Ⓒ Utvrditi migraciju centroida između inicijalnih i krajnjih rešenja kluster analize

$$d(e_1, A) = |0,6 - 1| + |0,15 - 0,175| + |0,22 - 0,11| = 0,4 + 0,025 + 0,11 = \underline{0,535}$$

$$d(e_3, B) = |4,21 - 4,26| + |1,59 - 1,215| + |1,12 - 0,965| = 0,05 + 0,375 + 0,155 = \underline{0,58}$$

$$d(e_5, C) = |3,03 - 2,98| + |1,24 - 1,455| + |0,55 - 0,64| = 0,05 + 0,215 + 0,09 = \underline{0,355}$$

2. Pósto se u prethodnom zadatku računalo city block
odstojanje nađ istim podacima, što se traži i u ovom zadatku.
početna matrica odstojanja je ista kao i u prethodnom
zadatku. Označena entiteta e_j $j=1,6$ ima isto značenje

$$D_0 = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1,07 & 6,45 & 5,43 & 3,85 & 4,36 \\ & 0 & 5,82 & 4,86 & 3,22 & 3,73 \\ & & 0 & 1,46 & 2,6 & 2,25 \\ & & & 0 & 1,64 & 1,13 \\ & \text{simetrično} & & & 0 & 0,71 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

pronalazimo
najmanji element

(a) Najmanje rastojanje je 0,71 između entiteta e_5 i e_6 i oni se grupišu.
- metoda maksimalnog povezivanja

$$D_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & (e_5, e_6) \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ (e_5, e_6) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1,07 & 6,45 & 5,43 & 4,36 \\ & 0 & 5,82 & 4,86 & 3,73 \\ & & 0 & 1,46 & 2,6 \\ & & & 0 & 1,64 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

elementi uzimaju vrednost iz $\max(e_5, e_6)$

$$D_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} (e_1, e_2) & e_3 & e_4 & (e_5, e_6) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (e_1, e_2) \\ e_3 \\ e_4 \\ (e_5, e_6) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 5,82 & 4,86 & 3,73 \\ & 0 & 1,46 & 2,6 \\ & & 0 & 1,64 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$D_3 = \begin{matrix} & \begin{matrix} (e_1, e_2) & (e_3, e_4) & (e_5, e_6) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (e_1, e_2) \\ (e_3, e_4) \\ (e_5, e_6) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 5,82 & 3,73 \\ & 0 & 2,6 \\ & & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$D_4 = \begin{matrix} & \begin{matrix} (e_1, e_2) & (e_3, e_4, e_5, e_6) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (e_1, e_2) \\ (e_3, e_4, e_5, e_6) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 5,82 \\ & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

- metoda minimalnog povezivanja

$$D_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & (e_5, e_6) \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ (e_5, e_6) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1,07 & 6,45 & 5,43 & 3,85 \\ & 0 & 5,82 & 4,86 & 3,73 \\ & & 0 & 1,46 & 2,25 \\ & & & 0 & 1,13 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

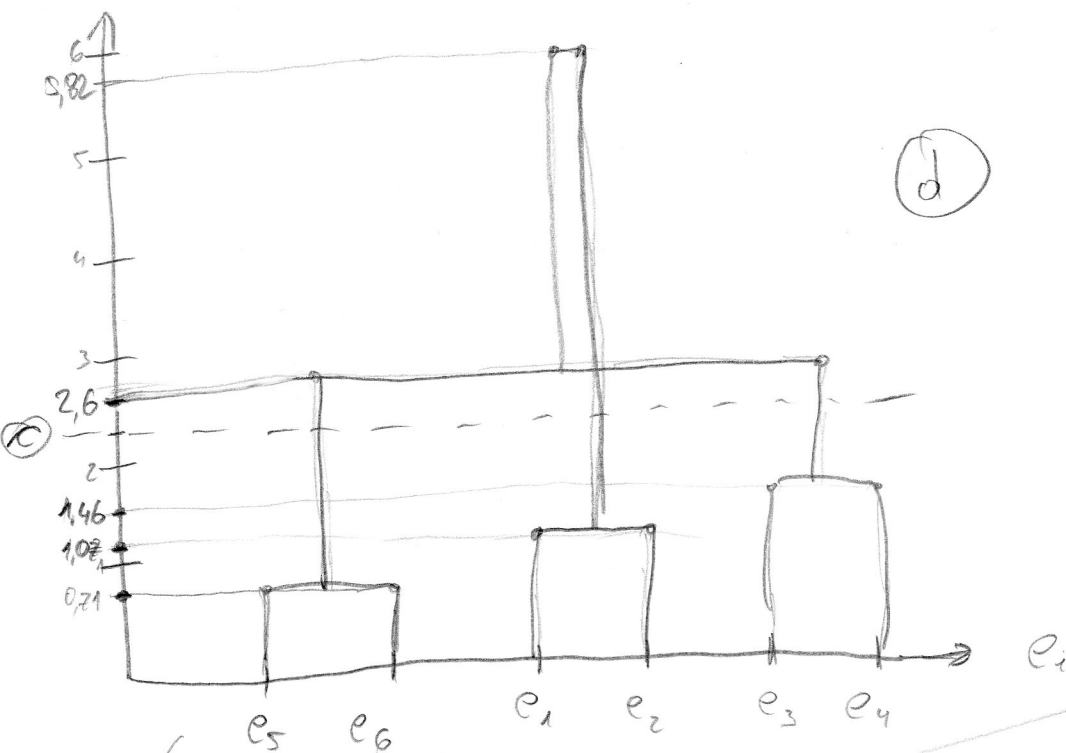
elementi uzimaju vrednost iz $\min(e_5, e_6)$

$$D_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} (e_1, e_2) & e_3 & e_4 & (e_5, e_6) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (e_1, e_2) \\ e_3 \\ e_4 \\ (e_5, e_6) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 5,82 & 4,86 & 3,85 \\ & 0 & 1,46 & 2,25 \\ & & 0 & 1,13 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$D_3 = \begin{matrix} & \begin{matrix} (e_1, e_2) & e_3 & (e_4, e_5, e_6) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (e_1, e_2) \\ e_3 \\ (e_4, e_5, e_6) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 5,82 & 3,85 \\ & 0 & 1,46 \\ & & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$D_4 = \begin{matrix} & \begin{matrix} (e_1, e_2) & (e_3, e_4, e_5, e_6) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (e_1, e_2) \\ (e_3, e_4, e_5, e_6) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 3,85 \\ & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

2) Dendrogram metode maksimalnog povezivanja



JPEG

D_{max}

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
e_1	0	1.02	5.82	5.82	5.82	5.82
e_2		0	5.82	5.82	5.82	5.82
e_3			0	1.46	2.6	2.6
e_4				0	2.6	2.6
e_5					0	0.71
e_6						0

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
$ D - D_{max} $	0	1.02	6.45	5.45	5.85	4.35
e_1		0	5.82	4.86	3.22	3.73
e_2			0	1.46	2.6	2.25
e_3				0	1.46	1.13
e_4					0	0.71
e_5						0
e_6						

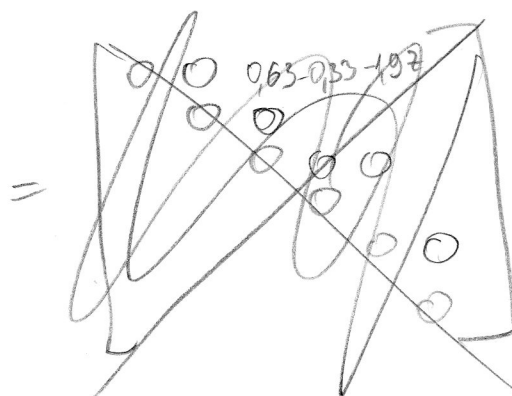
I grupa = $\{e_1, e_2\}$ - "normalno psih. stanje"

II grupa = $\{e_3, e_4\}$ - "teško psih. stanje"

$\{e_5, e_6\}$ - "akutno psih. stanje"

$\{e_3, e_4, e_5, e_6\}$ - "nenormalno psih. stanje" "svi"

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
$ D - D_{max} $	0	1.02	5.82	5.82	5.82	5.82
e_1		0	5.82	5.82	5.82	5.82
e_2			0	1.46	2.6	2.6
e_3				0	2.6	2.6
e_4					0	0.71
e_5						0
e_6						



	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
$ D - D_{max} $	0	0.65	0.33	1.97	1.46	
e_1		0	0	0.96	2.6	2.09
e_2			0	0	0.35	
e_3				0	0.96	1.47
e_4					0	0
e_5						0
e_6						

$\Rightarrow \sum |D - D_{max}| = 12.82$
isto to i za min

$D_{min} =$

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
e_1	102	385	385	385	385	
e_2		385	385	385	385	
e_3			146	146	146	
e_4				113	113	
e_5					0,71	
e_6						



$|D - D_{min}| =$

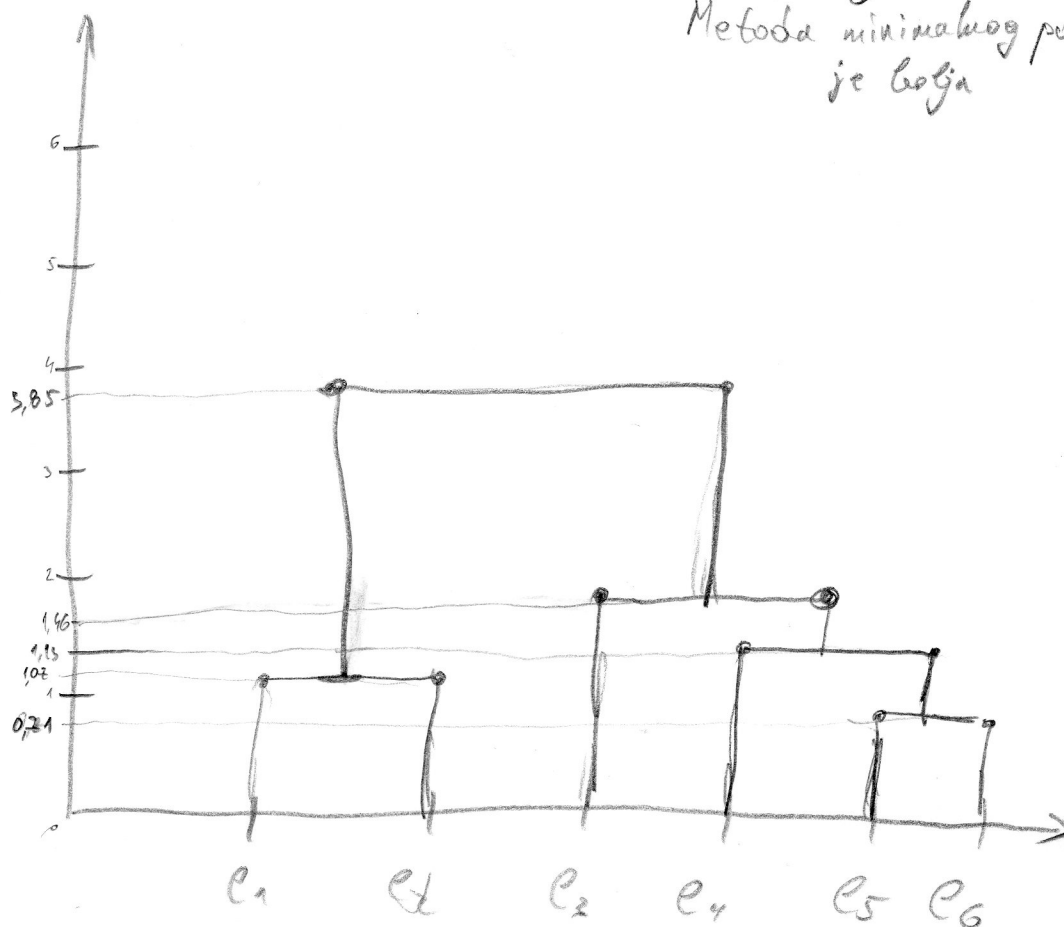
0	102	6,45	5,49	3,85	4,36	
	582	486	322	373		
		1,16	2,6	1,25		
			1,64	1,13		
				0,71		

0	0	2,6	1,64	0	0,51	
	0	1,97	1,01	0,63	0,12	
		0	0	1,14	0,79	
			0,51	0		
				0		
					0	

$$\sum |D - D_{min}| = 10,92$$

$$\sum |D - D_{min}| = 10,92 < \sum |D - D_{max}| = 12,82$$

Metoda minimalnog preživljavanja je bolja



3. zadatak

Posto je $h_i^2 = \sum_{j=1}^n \beta_{ij}^2 \quad i=\overline{1,m}$

\Downarrow
 $h_1^2 = 0,14 = \beta_{11}^2 + (-0,32)^2 \Rightarrow \beta_{11} = \sqrt{0,14 - (-0,32)^2} = \sqrt{0,14 - 0,1024} = \sqrt{0,0376}$
 $= 0,05567 \approx 0,056$ stavljam pozitivan znak jer je tako naznačeno u tablici

$h_2^2 = 0,06 = \beta_{12}^2 + (-0,24)^2 \Rightarrow \beta_{12} = \sqrt{0,06 - (-0,24)^2} = \sqrt{0,06 - 0,0576} = \sqrt{0,0024} =$

$= 0,0189 \approx 0,019$

$h_3^2 = 0,43 = \beta_{13}^2 + (0,42)^2 \Rightarrow \beta_{13} = \sqrt{0,43 - (0,42)^2} = \sqrt{0,43 - 0,1764} = \sqrt{0,2536} =$

$= 0,4572 \approx 0,457$

$h_4^2 = 0,55 = \beta_{14}^2 + (0,52)^2 \Rightarrow \beta_{14} = \sqrt{0,55 - 0,52^2} = \sqrt{0,55 - 0,2704} = \sqrt{0,2796} =$

$= 0,52877 \approx 0,529$

$h_5^2 = 0,40 = \beta_{15}^2 + (0,43)^2 = \sqrt{0,40 - 0,43^2} = \sqrt{0,40 - 0,1849} = \sqrt{0,2151} =$

$= 0,46378 \approx 0,464$

$h_6^2 = 0,52 = \beta_{16}^2 + (0,42)^2 = \sqrt{0,52 - 0,42^2} = \sqrt{0,52 - 0,1764} = \sqrt{0,3436} =$

$= 0,5469 \approx 0,547$

$B =$

F_1	F_2
0,056	-0,32
0,019	-0,24
-0,457	0,42
-0,529	0,52
0,464	0,43
0,547	0,42

Ⓟ Rotacija za 45°

$$\cos 45 = \sin 45 = 0,7071 \approx 0,707$$



matrica rotacije

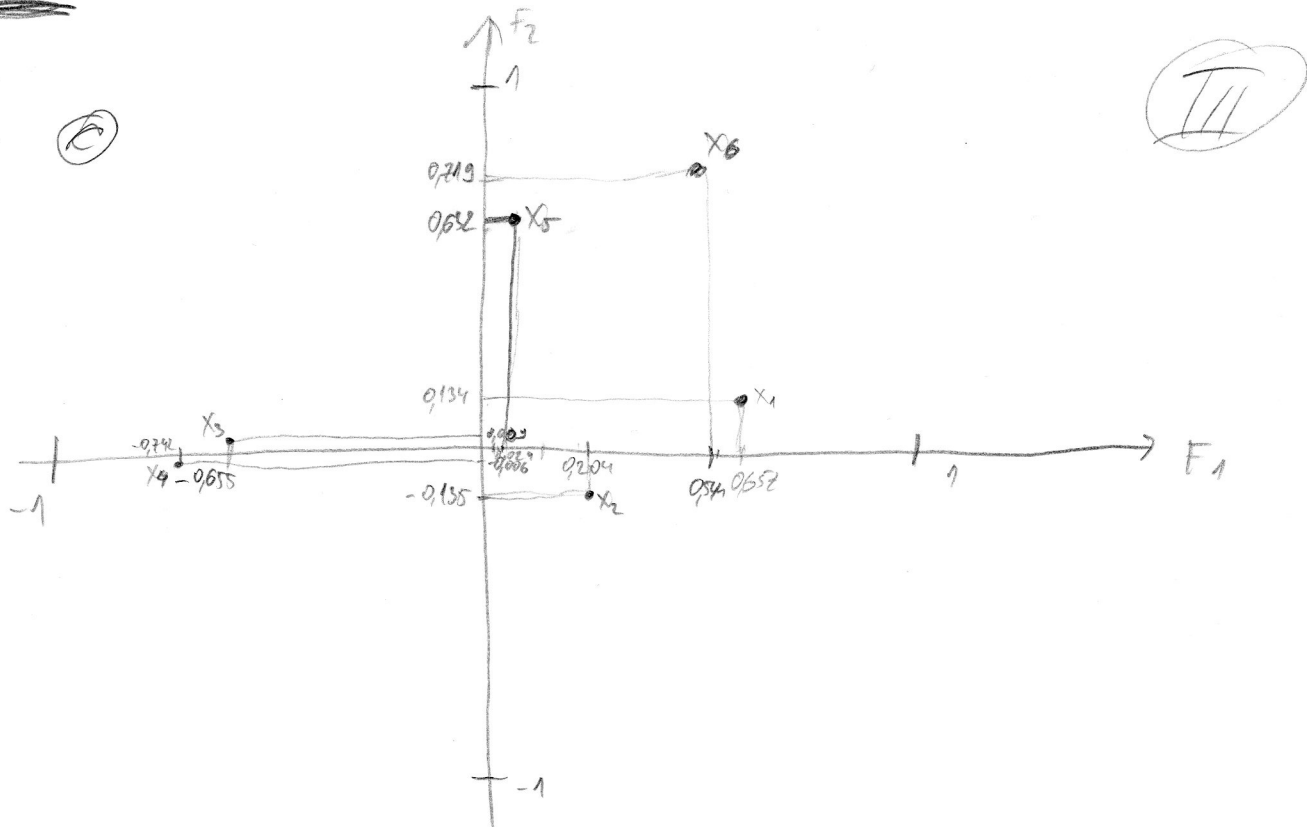
$$M_1 = \begin{bmatrix} \cos 45 & \sin 45 \\ -\sin 45 & \cos 45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,707 & 0,707 \\ -0,707 & 0,707 \end{bmatrix}$$

$$F_1 = B \cdot M_1 = \begin{bmatrix} 0,056 & -0,37 \\ 0,049 & -0,24 \\ -0,457 & 0,47 \\ -0,529 & 0,52 \\ 0,464 & 0,43 \\ 0,547 & 0,47 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,707 & 0,707 \\ -0,707 & 0,707 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0,056 \cdot 0,707 + (-0,37) \cdot (-0,707) & 0,056 \cdot 0,707 + (-0,37) \cdot 0,707 \\ 0,049 \cdot 0,707 + (-0,24) \cdot (-0,707) & 0,049 \cdot 0,707 + (-0,24) \cdot 0,707 \\ -0,457 \cdot 0,707 + 0,47 \cdot (-0,707) & -0,457 \cdot 0,707 + 0,47 \cdot 0,707 \\ -0,529 \cdot 0,707 + 0,52 \cdot (-0,707) & -0,529 \cdot 0,707 + 0,52 \cdot 0,707 \\ 0,464 \cdot 0,707 + 0,43 \cdot (-0,707) & 0,464 \cdot 0,707 + 0,43 \cdot 0,707 \\ 0,547 \cdot 0,707 + 0,47 \cdot (-0,707) & 0,547 \cdot 0,707 + 0,47 \cdot 0,707 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0,65751 \approx 0,657 & 0,13433 \approx 0,134 \\ 0,39592 + 0,26159 & 0,39592 - 0,26159 \\ 0,034643 + 0,16968 & -0,135032 \approx -0,135 \\ -0,323099 + 0,33229 & 0,009191 \approx 0,009 \\ -0,24463 \approx -0,242 & -0,006361 \approx -0,006 \\ -0,324003 - 0,36764 & -0,324003 + 0,36764 \\ 0,024038 \approx 0,024 & 0,632058 \approx 0,632 \\ 0,328048 - 0,30401 & 0,328048 + 0,30401 \\ 0,054439 \approx 0,544 & 0,21019 \approx 0,219 \\ 0,386229 - 0,3229 & 0,386229 + 0,3229 \end{bmatrix} =$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0,657 & 0,134 \\ 0,204 & -0,135 \\ -0,655 & 0,009 \\ -0,242 & -0,006 \\ 0,024 & 0,632 \\ 0,544 & 0,219 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix}$$



d) Prvom faktoru F_1 pripadaju elementi X_1, X_2, X_3 i X_4 što se može videti sa grafika.

Drugom faktoru F_2 pripadaju elementi X_5, X_6

e) F_1 - faktor prva četiri elementa (ukoliko bi koristili matricu iz d) zadatka - faktor normalnih i testnih ps. st.)
 F_2 - faktor poslednja dva elementa (-11 - faktor anksioznih ps. st.)

f) Da bi faktori bili ortogonalni za matricu rotacije M treba da važi $M \cdot M^T = E$

$$M = \begin{bmatrix} 0,707 & 0,707 \\ -0,707 & 0,707 \end{bmatrix} \quad M \cdot M^T = \begin{bmatrix} 0,707 & 0,707 \\ -0,707 & 0,707 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,707 & -0,707 \\ 0,707 & 0,707 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

\Rightarrow rotacija sa M matricom je ortogonalna rotacija

(4.)

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0,67 & -0,1 \\ & 1 & -0,29 \\ \text{sim.} & & 1 \end{bmatrix}$$

Predpostavimo da su komponente dolijene preko korelacije R matrice

$$\Rightarrow \text{tr}(1) = 3$$

(1)

~~$$|R - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0,67 & -0,1 \\ 0,67 & 1-\lambda & -0,29 \\ -0,1 & -0,29 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0,67 \\ 0,67 & 1-\lambda \\ -0,1 & -0,29 \end{vmatrix}$$~~

$$= (1-\lambda)^3 + 0,67 \cdot (-0,29) \cdot (-0,1) + (-0,1) \cdot 0,67 \cdot (-0,29)$$

$$= (1-\lambda)(-0,1)^2 + (1-\lambda)(-0,29)^2 + (1-\lambda) \cdot 0,67^2 =$$

$$= (1-2\lambda+\lambda^2)(1-\lambda) + 0,03886 - (1-\lambda)(0,01+0,0841+0,4489) =$$

$$= 1-2\lambda+\lambda^2-\lambda+2\lambda^2-\lambda^3 + 0,03886 - (1-\lambda) \cdot 0,543 =$$

$$= -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1,03886 - 0,543 + 0,543\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2,457\lambda + 0,49586 = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2,457\lambda - 0,49586 = 0 \quad (2)$$

Pošto nam je poznato da je $\frac{\lambda_2}{\text{tr}(1)} = 30,9\% \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\lambda_2}{3} = 30,9\% \Rightarrow \lambda_2 = \frac{3 \cdot 30,9\%}{100\%} = \frac{92,7}{100} = 0,927$$

Pa dalje (2) rešavamo:

$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2,457\lambda + 0,49586 : \lambda - 0,927 = -\lambda^2 + 2,073\lambda + 0,535$$

$$\pm \lambda^3 \mp 0,927\lambda^2$$

$$0 + 2,073\lambda^2 - 2,457\lambda$$

$$-2,073\lambda^2 \pm 1,922\lambda$$

$$0 \quad -0,535\lambda + 0,496$$

$$\pm 0,535\lambda \mp 0,496$$

0

Dalje rešavamo

(1)

$$-\lambda^2 + 2,073\lambda - 0,535 = 0$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{-2,073 \pm \sqrt{(2,073)^2 - 4(1) \cdot (-0,535)}}{-2} =$$

$$= \frac{-2,073 \pm \sqrt{4,297 - 2,14}}{-2} = \frac{-2,073 \pm \sqrt{2,157}}{-2} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \frac{-2,073 + 1,469}{-2} = 0,302 \\ \frac{-2,073 - 1,469}{-2} = 1,771 \end{array} \right\}$$

redamo λ korene
↓ od najvećeg
ka najmanjem

$$\lambda_1 = 1,771$$

$$\lambda_2 = 0,927$$

$$\lambda_3 = 0,302$$

a) Proverat varijabiliteta ~~u~~ prve 2 glavne komponente

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\text{tr}(\Lambda)} = \frac{1,771 + 0,927}{3} = \frac{2,698}{3} = 0,899333 \approx 0,8993$$

Prve dve glavne komponente nose 89,93% ukupnog varijabiliteta

$$b) \frac{\lambda_3}{\text{tr}(\Lambda)} = \frac{0,302}{3} = 0,10066 \approx 0,101 \Leftrightarrow 1 - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\text{tr}(\Lambda)}$$

c) Generalizovana varijansa

Posto se generalizovana varijansa može predstaviti
preko rang matrice $\Lambda \Rightarrow \text{tr}(\Lambda) = 3$

⑥ Ocena korelacione matrice na osnovu prve glavne komponente

iznosi $\hat{S} = \lambda_1 \cdot L_1 \cdot L_1^T = 1,771 \cdot \begin{bmatrix} 0,64 \\ 0,69 \\ -0,34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,64 & 0,69 & -0,34 \end{bmatrix}$

$$= 1,771 \cdot \begin{bmatrix} 0,4096 & 0,4416 & -0,2176 \\ 0,64 \cdot 0,64 & 0,64 \cdot 0,69 & 0,64 \cdot (-0,34) \\ 0,4416 & 0,4761 & -0,2346 \\ 0,69 \cdot 0,64 & 0,69 \cdot 0,69 & 0,69 \cdot (-0,34) \\ -0,2176 & -0,2346 & 0,1156 \\ (-0,34) \cdot 0,64 & (-0,34) \cdot 0,69 & (-0,34)^2 \end{bmatrix} \quad (=)$$

$$\Rightarrow \hat{S} = \begin{bmatrix} 0,7254 & 0,7821 & -0,3854 \\ 0,7821 & 0,8432 & -0,4155 \\ -0,3854 & -0,4155 & 0,2047 \end{bmatrix}$$

⑦ Prema osobinama glavnih komponenti

korelacija između prve i treće glavne komponente je jednaka $\text{Cov}(Y_1, Y_3) = 0$