Drugi dio teorije iz matematike 2

22. Појам интегралне суме. Дефиниција одређеног интеграла.

Одређени интеграли – појам интегралне суме

Дефиниција. Криволинијски трапез представља фигуру ограничену осом Ox, линијом $y = f(x)$, с којом праве које су паралелне са осом Oy могу да се секу највише у једној тачки, и правама $x=a$ и $x=b$; одсечак $[a, b]$ се назива основицом криволинијског трапеза.

Означимо са $m = \min\{f(x) : x \in [a,b]\}$ и $M = \max\{f(x) : x \in [a,b]\}$.

Поделимо одсечак $[a, b]$ на n делова (који не морају бити једнаки) тачкама

$a=x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n=b$, таквим да је $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n$;

ставимо да је

$$x_1 - x_0 = \Delta x_1, \quad x_2 - x_1 = \Delta x_2, \ \ldots \ , x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$$

и означимо са

$$m_1 = \min\{f(x) : x \in [x_0, x_1]\}, \qquad M_1 = \max\{f(x) : x \in [x_0, x_1]\}$$
$$m_2 = \min\{f(x) : x \in [x_1, x_2]\}, \qquad M_2 = \max\{f(x) : x \in [x_1, x_2]\}$$

....

$$m_n = \min\{f(x) : x \in [x_{n-1}, x_n]\}, \quad M_n = \max\{f(x) : x \in [x_{n-1}, x_n]\}.$$

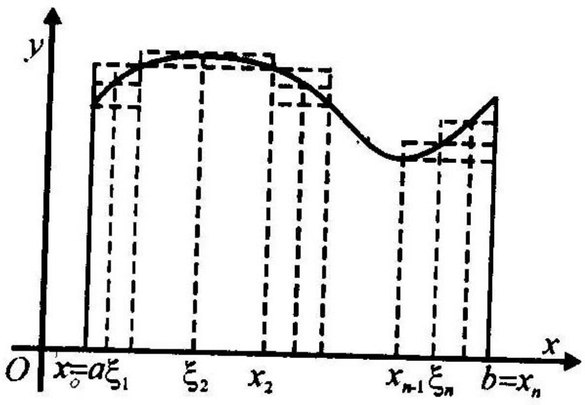
Очигледно је да се површина датог криволинијског трапеза може приближно представити помоћу израза

$$\underline{S}_n = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \ldots + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$$

и

$$\overline{S}_n = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \ldots + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$$

Збир $\underline{S}_n$ је доња интегрална сума, а $\overline{S}_n$ је горња интегрална сума.



Тада важи:

1. $\underline{S}_n \le \overline{S}_n$, јер је $m_i \le M_i$, $i = 1, \ldots, n$;

2. $\underline{S}_n \ge m(b-a)$, јер је $\underline{S}_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \ge \sum_{i=1}^{n} m\Delta x_i = m(b-a)$;

3. $\overline{S}_n \le M(b-a)$, јер је $\overline{S}_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M\Delta x_i = M(b-a)$.

Из претходног следи да је $m(b-a) \le \underline{S}_n \le \overline{S}_n \le M(b-a)$.

На сваком од одсечака $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ... , $[x_{n-1}, x_n]$ изаберимо произвољне тачке $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, такве да је $x_0 \le \xi_1 \le x_1, \ldots, x_{n-1} \le \xi_n \le x_n$, и израчунајмо $f(\xi_1)$, $f(\xi_2)$, ..., $f(\xi_n)$. Саставимо интегралну суму за функцију $f(x)$ на одсечку $[a, b]$

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\,.$$

Пошто за произвољно $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ важи $m_i \le f(\xi_i) \le M_i$ и $\Delta x_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, то је $m_i\Delta x_i \le f(\xi_i)\,\Delta x_i \le M_i\Delta x_i$,

$i = 1, \ldots, n$, па је

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \quad \text{тј. } \underline{S}_n \le S_n \le \overline{S}_n\,.$$

Очигледно, интегрална сума S_n зависи од начина поделе одсечка $[a, b]$ на одсечке $[x_{i-1}, x_i]$ и од избора $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Нека је $\max\,[x_{i-1}, x_i]$ највећи од одсечака $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$. Разматраћемо само оне поделе одсечка $[a, b]$ код којих $\max[x_{i-1}, x_i] \to 0$ (тада важи $n \to \infty$). За сваку такву поделу, изабравши одговарајуће вредности ξ_i можемо саставити интегралну суму S_n.

Дефиниција. Ако за било какву поделу одсечка $[a, b]$ на одсечке $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, у којој $\max\,[x_{i-1}, x_i] = \max \Delta x_i \to 0$ $(n \to \infty)$, и за произвољно изабране тачке ξ_i на одсечцима $[x_{i-1}, x_i]$ интегрална сума S_n тежи једној одређеној вредности S, тада се та гранична вредност назива одређени интеграл функције $f(x)$ на одсечку $[a, b]$ и означава $\int_a^b f(x)dx$.

По дефиницији $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = S = \int\limits_a^b f(x)dx$, тј. (*)

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \max|\Delta x_k| < \delta \Rightarrow \left| S - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \right| < \varepsilon .$$

Функција $f(x)$ је интегранд, број a је доња граница интеграла, број b је горња граница интеграла, x је интеграциона промењива, одсечак $[a, b]$ је одсечак интеграције.

Дефиниција. Ако постоји гранична вредност (*) за неку функцију $f(x)$, тада се каже да је таква функција интеграбилна на одсечку $[a, b]$ у Римановом смислу, или *R*–интеграбилна.

- Доња и горња интегрална сума $\underline{S}_n$ и $\overline{S}_n$ су само специјални случајеви интегралне суме S_n, што значи да ако је $f(x)$ интеграбилна, обе имају исту граничну вредност S, тј.

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \underline{S}_n = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = S = \int_a^b f(x)dx$$

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \overline{S}_n = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = S = \int_a^b f(x)dx .$$

- Ако је $f(x) > 0$, онда одређени интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ изражава бројну вредност површине криволинијског трапеза са основицом $[a, b]$

$$P = \int_a^b f(x)dx .$$

- За $f(x) < 0$ важи $\int\limits_a^b f(x)dx = -P$.

Дефиниција. За дату функцију $y = f(x)$, поделу одсечка $[a, b]$

$$\pi[a, b] = \pi[a = x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \xi_2 \le x_2 \le \ldots \le x_{n-1} \le \xi_n \le x_n = b]$$

ћемо назвати одговарајућом броју ε (ε произвољни мали позитиван број), ако за сваки пар x' и x'' тачака које припадају истом одсечку $[x_{i-1}, x_i]$ важи неједнакост

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon .$$

Дефиниција. Подела $\pi'[a, b] = \pi'[a = x'_0 \le \xi'_1 \le x'_1 \le \xi'_2 \le x'_2 \le \ldots \le x'_{p-1} \le \xi'_p \le x'_p = b]$ се назива потподелом поделе $\pi[a, b] = \pi[a = x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \xi_2 \le x_2 \le \ldots \le x_{n-1} \le \xi_n \le x_n = b]$, ако свака од тачака $x_0, \ldots, x_n$ припада скупу тачака $\{x'_0, \ldots, x'_p\}$, тј. скуп $\{x'_0, \ldots, x'_p\}$ се добија кад се скупу $\{x_0, \ldots, x_n\}$ додају неке деоне тачке; при томе су тачке ξ_k и ξ'_k одабране произвољно.

- Очигледно, ако подела π одговара броју ε, онда истом броју ε одговара и свака потпедела π' поделе π.

Дефиниција. Број $d(\pi) = \max \Delta x_k$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ назива се дијаметар поделе π.

- Означимо интегралну суму функције $f(x)$ која одговара подели π одсечка $[a, b]$ са $S_\pi(f)$: $S_\pi(f) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$. Тада можемо и овако формулисати дефиницију:

Дефиниција. Реални број J се назива одређеним интегралом функције $y = f(x)$ на одсечку $[a, b]$, ако за свако произвољно мало позитивно ε постоји такав довољно мали број $\delta > 0$, да за сваку поделу π за коју је $d(\pi) < \delta$, важи неједнакост

$$\left|J - S_\pi(f)\right| < \varepsilon.$$

- Из ове дефиниције да ако J постоји, тада за сваки низ подела $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n, \ldots$ одсечка $[a, b]$, у коме $d(\pi_n) \to 0$; $n \to \infty$, важи да је

$$J = \lim_{n\to\infty} S_{\pi_n}(f).$$

Теорема. Ако подела π одсечка $[a, b]$ одговара броју ε, тада за сваку њену потподелу π' важи неједнакост

$$\left|S_{\pi'}(f) - S_\pi(f)\right| < \varepsilon(b-a).$$

Доказ. Нека је $\pi[a=x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \xi_2 \le x_2 \le \ldots \le x_{n-1} \le \xi_n \le x_n=b]$ и $\pi'[a=x'_0 \le \xi'_1 \le x'_1 \le \xi'_2 \le x'_2 \le \ldots \le x'_{m-1} \le \xi'_m \le x'_m=b]$ и $m \ge n$; тада

$$\left|S_{\pi'}(f) - S_\pi(f)\right| = \left|\sum_{k=1}^{m} f(\xi'_k)\Delta x'_k - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{m} f(\xi'_k)\Delta x'_k - \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)\Delta x'_k\right| =$$

$$\left|\sum_{k=1}^{m}\left(f(\xi'_k) - f(\xi_k)\right)\Delta x'_k\right| \le \sum_{k=1}^{m}\left|f(\xi'_k) - f(\xi_k)\right|\Delta x'_k < \varepsilon(b-a).$$

Теорема. Ако две произвољне поделе π_1 и π_2 одсечка $[a, b]$ одговара броју ε, тада је

$$\left|S_{\pi_1}(f) - S_{\pi_2}(f)\right| < 2\varepsilon(b-a).$$

Доказ. Образујмо нову поделу π_3 одсечка $[a, b]$, која садржи све подеоне тачке подела π_1 и π_2. На основу претходне теореме

$$\left|S_{\pi_1}(f) - S_{\pi_2}(f)\right| \le \left|S_{\pi_1}(f) - S_{\pi_3}(f)\right| + \left|S_{\pi_3}(f) - S_{\pi_2}(f)\right| < 2\varepsilon(b-a)$$

23. Теорема о интеграбилности непрекидне функције. Доказ.

Теорема. Ако је функција $f(x)$ непрекидна на одсечку $[a, b]$, тада је она на том интервалу и R–интеграбилна.

Доказ. Функција која је непрекидна на одсечку, је и равномерно непрекидна, тако да је $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, |x'' - x'| < \delta, |f(x'') - f(x')| < \varepsilon$.

Посматрајмо низ подела π_1, π_2, ... таквих да $d(\pi_n) \to 0$, докажимо да низ $\{S_{\pi_n}\}$ конвергира. Ако је за поделу π_n са m_n подинтервала, $\varepsilon_n = \max|f(x'') - f(x')|$ за сваки пар тачака x', $x'' \in [x_{k-1}, x_k]$, $k \in \{1,..., m_n\}$, онда π_n одговара броју ε_n.

Из услова равномерне непрекидности за дато $\varepsilon > 0$, нађимо одговарајуће $\delta > 0$, а затим N_0, такво да је $\forall n \geq N_0 \Rightarrow d(\pi_n) < \delta$. Очигледно је $\varepsilon_n < \varepsilon$, $\forall n \geq N_0$ што значи да $\varepsilon_n \to 0$, кад $n \to \infty$. Како на основу претходне теореме важи $|S_{\pi_n}(f) - S_{\pi_m}(f)| < 2\varepsilon(b-a)$, низ $\{S_{\pi_n}\}$ је Кошијев, па према томе конвергира.

Одатле следи да је непрекидна функција $y = f(x)$ R–интеграбилна.

Пример. Диришлеова функција $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \in R / Q \end{cases}$ **није** R–интеграбилна.

24. Особине одређеног интеграла.

1) $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$, јер је криволинијски трапез одсечак $0 \le f(x) \le f(a)$ чија је површина 0.

2) $\int\limits_a^b c\, f(x)dx = c\int\limits_a^b f(x)dx$, c = const.

Добија се на основу одговарајуће особине за интегралне суме.

3) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$.

Ако је $a < b$, дужине одсечка $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} > 0$, али кад се сумира од b до a, тада је $x_{i-1} - x_i = -(x_i - x_{i-1}) < 0$, па је

$$\int\limits_a^b f(x)dx = -\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_{i-1} - x_i) = -\int\limits_b^a f(x)dx,$$ где $\Delta x_i \to 0$, $n \to \infty$.

4) $\int\limits_a^b [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_m(x)]dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx + \int\limits_a^b f_2(x)dx + \ldots + \int\limits_a^b f_m(x)dx$.

Ако $\Delta x_i \to 0$, кад $n \to \infty$, онда

$$\int\limits_a^b \left(\sum_{k=1}^{m} f_k(x)\right)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} f_k(\xi_i)\right)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\Delta x_i + \ldots + \sum_{i=1}^{n} f_m(\xi_i)\Delta x_i\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f_k(\xi_i)\Delta x_i\right) = \sum_{k=1}^{m}\int\limits_a^b f_k(x)dx.$$

Последица: $\int\limits_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int\limits_a^b f(x)dx - \int\limits_a^b g(x)dx$.

5) **Теорема.** Ако интегранд $f(x)$ у интервалу $[a, b]$ не мења знак, тада $\int\limits_a^b f(x)dx$ има исти знак као и $f(x)$.

Доказ. Ако је $f(x) \ge 0$, $x \in [a, b]$, тада су у интегралној суми S_n сви сабирци ненегативни, па је, због непрекидности функције $f(x)$ и $\int\limits_a^b f(x)dx \ge 0$, као гранична вредност непрекидне функције S_n.

Последица: $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$ само ако је непрекидна функција која не мења знак $f(x) \equiv 0$.

6) Ако $f(x) \leq g(x)$ за свако $x \in [a, b]$, онда $\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx$.

Доказ. $g(x) - f(x) \geq 0$, па на основу последице особине 4) и претходне теореме следи

$$\int\limits_a^b g(x)dx - \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b \left[g(x) - f(x)\right] dx \geq 0.$$

7) **Оцена одређеног интеграла.** Ако је $m = \min f(x)$ и $M = \max f(x)$, где је $f(x)$ интеграбилна функција на одсечку $[a, b]$ тада је

$$m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Доказ. Из $m \leq f(x) \leq M$, следи $\int\limits_a^b m\,dx \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b M\,dx$. При томе,

$$\int\limits_a^b m\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m \cdot \Delta x_i = \lim_{n\to\infty} m \cdot \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = m(b-a)$$ и слично

$$\int\limits_a^b M\,dx = M(b-a).$$

8) **Теорема (о средњој вредности).** Ако је функција $f(x)$ непрекидна на одсечку $[a, b]$, тада постоји тачка ξ, $a < \xi < b$, за коју је

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Доказ. Ако је $m = \min f(x)$ и $M = \max f(x)$, $x \in [a, b]$, тада на основу 7) следи

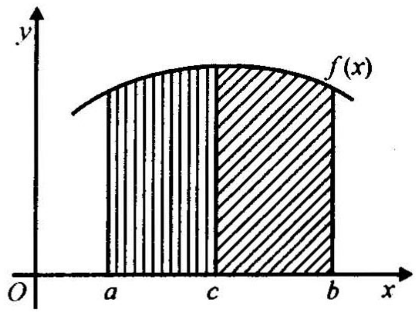
$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M \text{, тј. } \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \mu \text{, } m \leq \mu \leq M.$$

Како је $f(x)$ непрекидна на одсечку $[a, b]$, према Коши-Болцановој теореми узима све вредности између m и M, тј. за неко ξ, $a < \xi < b$ важи $f(\xi) = \mu$, па

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(\xi) \text{, тј. } \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

26. Теорема о подели интервала интеграције. Доказ.

9) **Теорема (о подели интервала интеграције).** За произвољне три тачке *a*, *b*, *c* важи једнакост $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, под претпоставком да сва три интеграла постоје.



Доказ. Нека је $a < c < b$. Саставимо интегралну суму за функцију $f(x)$ на $[a, b]$, тако да је c увек једна од подеоних тачака. Тада важи

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \quad x_m = c.$$

Кад се пређе на граничну вредност, кад $\max \Delta x_i \to 0$, добија се тражена једнакост за случај $a < c < b$.

Нека је $a < b < c$. На основу већ доказаног $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$, тј.

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx$. Према 3) важи $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, па се и у овом случају добија $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Слично се тражена једнакост доказује за било који распоред тачака *a*, *b*, *c*.

27. Појам неодређеног интеграла.

- Нека је у одређеном интегралу $\int_a^b f(x)dx$ доња граница фиксирана, а горња променљива; у том случају ће се мењати и вредност интеграла у зависности од горње границе. Ако означимо горњу границу са *x*, а независно променљиву са *t*, добићемо интеграл $\int_a^x f(t)dt$, који ће представљати функцију Φ(*x*) горње границе *x*.

Дефиниција. Интеграл $$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

се назива неодређени интеграл функције *f*(*x*); неодређен се зове зато што му нису обе границе одређене (фиксиране).

- Уместо доње границе *a* смо могли узети и неку другу константу α, добили би смо неодређени интеграл

$$F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt.$$

Тада за $a < x < \alpha$, како је $\int_a^\alpha f(t)dt = C = \mathrm{const}$, добијамо

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^\alpha f(t)dt + \int_\alpha^x f(t)dt, \quad \text{тј.} \quad \Phi(x) = F(x) + C,$$

што значи да се различити неодређени интеграли исте функције разликују само за адитивну константу.

Напомена. Неодређени интеграл се може посматрати и као функције доње границе

$\Psi(x) = \int_x^b f(t)dt$, јер је $\int_x^b f(t)dt = -\int_b^x f(t)dt$. Уобичајено је означавање неодређеног интеграла у облику $\int f(x)dx$, тј. $\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt = \Phi(x) + C$.

28. Основна теорема диференцијалног и интегралног рачуна. Доказ.

Теорема. Неодређени интеграл
$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

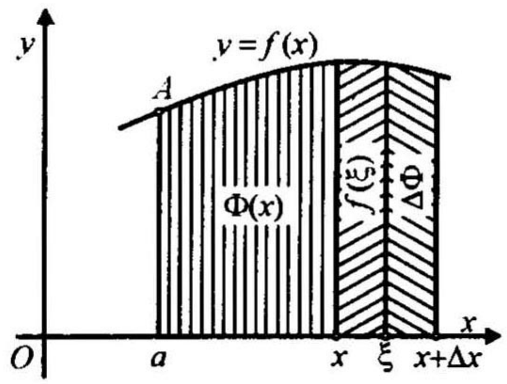
непрекидне функције $f(x)$ задовољава релацију $\Phi'(x) = f(x)$, односно

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x),$$

што значи да диференцирање неодређеног интеграла непрекидне функције даје опет ту исту функцију.

Доказ. Према теореми о подели интервала интеграције

$$\Phi(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$



па је прираштај $\Delta\Phi$ функције $\Phi(x)$ једнак

$$\Delta\Phi = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$$

тј. $$\Delta\Phi = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Применом теореме о средњој вредности интеграла

$$\Delta\Phi = f(\xi)(x+\Delta x - x) = f(\xi)\Delta x,$$ ξ је између x и $x+\Delta x$,

одакле следи

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} = f(\xi),$$ тј. $$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} f(\xi).$$

Како је ξ између x и $x+\Delta x$, то када $\Delta x\to 0$, $\xi\to x$, па је због непрекидности функције $f(x)$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(\xi)=\lim\limits_{\xi\to x} f(\xi)=f(x)$, што значи да је $\Phi'(x)=f(x)$.

- Према теореми важе једнакости

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x) \qquad \text{и} \qquad d\int_a^x f(t)dt=f(x)dx.$$

DODATNO O PRIMITIVNIM FUNKCIJAMA (Valjda ne treba):

Дефиниција. Примитивна (првобитна) функција дате функције $f(x)$, назива се функција $F(x)$ за коју је

$$F'(x)=f(x).$$

Дакле, неодређени интеграл $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ је примитивна функција интегранда $f(x)$. Према томе, због теореме о егзистенцији интеграла непрекидне функције, важи следеће тврђење:

Теорема. Свака непрекидна функција има своју примитивну функцију, чак има и бесконачно много својих примитивних функција које се једна од друге разликују за константу.

Доказ. Нека је $\Phi(x)$ примитивна функција функције $f(x)$, тј. $\Phi'(x)=f(x)$, тада је и свака функција облика $\Phi(x)+C$, $C=\text{const}$, такође примитивна функција функције $f(x)$, јер је $(\Phi(x)+C)'=\Phi'(x)=f(x)$.

Ако за неку функцију $F(x)$, важи $F'(x)=f(x)$, тада је

$$(F(x)-\Phi(x))'=F'(x)-\Phi'(x)=0\Rightarrow F(x)-\Phi(x)=C\Rightarrow F(x)=\Phi(x)+C,$$

што значи да ако је $\Phi(x)$ произвољна примитивна функција функције $f(x)$, онда се било која друга примитивна функција од ње разликује за константу C, тј.

$$F(x)=\Phi(x)+C, \text{ или } \int f(x)dx=\Phi(x)+C.$$

- Интеграција је операција инверзна диференцирању.
- Наћи неодређени интеграл функције, значи наћи све њене примитивне функције.
- График примитивне функције је интегрална крива.
- Неодређени интеграл је скуп свих интегралних кривих, које се добијају паралелним померањем једне од њих у правцу Oy осе.
- Важи следеће: $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$, $\quad d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx$,

$$\int f'(x)dx=f(x)+C, \qquad \int df(x)dx=f(x)+C.$$

- На основу таблице извода основних елементарних функција, може се саставити таблица интеграла основних елементарних функција.

29. Њутн-Лајбницова формула. Доказ.

Теорема. (*Њутн – Лајбницова формула*) Вредност одређеног интеграла $\int_a^b f(x)dx$ једнака је разлици вредности произвољне примитивне функције $F(x)$ интегранда $f(x)$, узета у горњој и доњој граници датог интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad F'(x) = f(x).$$

Доказ. Нека је $F(x)$ примитивна функција интегранда $f(x)$. Како је и $\int_a^x f(t)dt$, такође примитивна функција, важи $\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$, за неку константу C и за свако x. Та једнакост важи и за $x = a$, тј. $\int_a^a f(t)dt = F(a) + C$, одакле $0 = F(a) + C$, $C = -F(a)$. То значи да је

$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$, а за $x = b$ добија се Њутн – Лајбницова формула

$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$, тј. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

30. Смена променљиве у одређеном интегралу. Доказ.

Теорема. Нека је дат одређени интеграл $\int_a^b f(x)dx$ непрекидне функције $f(x)$ на одсечку $[a, b]$. Ако се уведе нова променљива t формулом $x = \varphi(t)$ и ако важе услови:

1. $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$,
2. $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ су непрекидне функције на одсечку $[\alpha, \beta]$,
3. сложена функција $f[\varphi(t)]$ је непрекидна на одсечку $[\alpha, \beta]$, тада је

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Доказ. Ако је $F(x)$ примитивна функција интегранда $f(x)$, тада важе једнакости

$$\int_a^x f(x)dx = F(x) + C \quad \text{и} \quad \int_\alpha^t f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)] + C,$$

одакле следи тврђење, јер је

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a).$$

Метода смене (??ovo je bilo razdvojeno od gornjeg)

Ако се при одређивању интеграла $\int f(x)dx$ не може лако наћи примитивна функција, а знамо да постоји може се применити метода смене $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ мора бити непрекидна и диференцијабилна функција за коју је $\varphi'(t) \neq 0$ и која има своју инверзну функцију. У том случају ће бити $dx=\varphi'(t)dt$, па

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Доказ. Тада је <u>извод леве</u> стране: $\left(\int f(x)dx\right)'_x = f(x)$.

<u>Извод десне</u> страна: због $t = \varphi^{-1}(x)$, $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{\varphi'(t)}$ је

$$\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)'_x = \frac{d}{dt}\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)\cdot\frac{dt}{dx} = f[\varphi(t)]\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = f[\varphi(t)] = f(x).$$

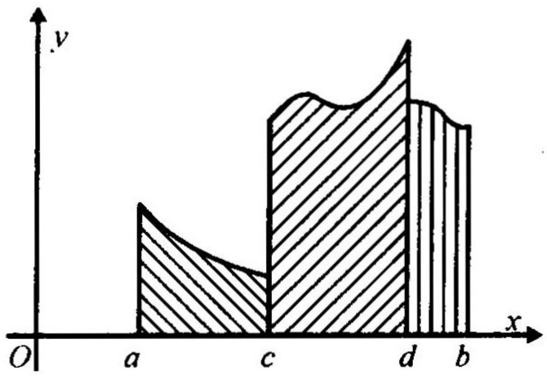
Напомена: Смена се може увести у облику $t = \psi(x)$, тада је $dt = \psi'(x)dx$.

31. Уопштени интеграли са бесконачним интервалом интеграције.

Уопштени (несвојствени) интеграл

Можемо уопштити појам обичног интеграла непрекидне функције, на функцију која на коначном одсечку има коначно много тачака прекида прве врсте, тзв. део по део непрекидна функција. У том случају интеграл такве функције је збир интеграла над подинтервалима на којима је функција непрекидна:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx.$$



Међутим, ако је интервал интеграције неограничен, или на одсечку коначне дужине има тачака у чијој околини функција *f*(*x*) неограничено расте, тада је реч о уопштеном (несвојственом) интегралу.

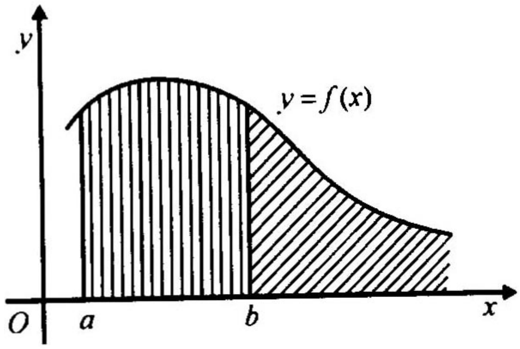
Уопштени интеграл са бесконачним интервалом интеграције

Нека је функција *f*(*x*) дефинисана и непрекидна за сваку вредност аргумента *x*, $a \le x < \infty$. Тада је $\int_a^b f(x)dx$ дефинисан за свако $b > a$. Ако се горња граница *b* мења, овај интеграл је непрекидна функција од *b*.

Дефиниција. Ако постоји коначна гранична вредност $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$, тада се она назива уопштеним или несвојственим интегралом функције *f*(*x*) на интервалу и означава са

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

У том случају кажемо да интеграл постоји или конвергира. Ако интеграл нема коначну граничну вредност кад $b\to\infty$, тада се каже да не постоји или да дивергира.



Напомена. Аналогно се могу дефинисати уопштени интеграли

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx \qquad \text{и} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx.$$

Теорема 1. Ако за свако $x \geq a$, $0 \leq f(x) \leq g(x)$ и ако $\int_{a}^{+\infty} g(x)dx$ конвергира, тада ће конвергирати и $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ и при томе је

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx \leq \int_{a}^{+\infty} g(x)dx.$$

Теорема 2. Ако за свако $x \geq a$, $0 \leq f(x) \leq g(x)$ и ако $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ дивергира, дивергираће и $\int_{a}^{+\infty} g(x)dx$.

Теорема 3. Ако $\int_{a}^{+\infty} |f(x)|dx$ конвергира, конвергираће и $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$.

32. Уопштени интеграли са неограниченим интеграндом.

Дефиниција. Ако је функција $f(x)$ непрекидна на интервалу $a \le x < b$, а $f(x) \to \infty$ кад $x \to b$, $x < b$, и ако постоји коначна гранична вредност $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ ($\varepsilon > 0$), тада се та гранична вредност назива уопштени (несвојствени) интеграл функције $f(x)$ на одсечку $[a, b]$ и означава са

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Тада кажемо да уопштени интеграл постоји, тј. конвергира. У супротном, ако интеграл нема коначну граничну вредност, он не постоји, односно дивергира.

На сличан начин, ако је функција $f(x)$ непрекидна на интервалу $a < x \le b$, и ако постоји коначна гранична вредност

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx, \text{ тада је } \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

1. Интеграл: $\int_1^\infty \frac{dx}{x^a}$, $a > 0$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^a} = \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^a} = \frac{1}{1-a} \lim_{b \to \infty} \left(b^{1-a} - 1\right), \quad a \ne 1$$

- За $a > 1$ $\lim\limits_{b \to \infty} \left(b^{1-a} - 1\right) = -1$, па је у овом случају $\int_1^\infty \frac{dx}{x^a} = \lim\limits_{b \to \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^a} = \frac{1}{a-1}$.
- За $0 < a < 1$ $\lim\limits_{b \to \infty} \left(b^{1-a} - 1\right) = +\infty$, па је интеграл $\int_1^\infty \frac{dx}{x^a} = +\infty$, тј. дивергира.
- Ако је $a = 1$ $\int_1^\infty \frac{dx}{x^a} = \lim\limits_{b \to \infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b \to \infty} (\ln x)\Big|_1^b = \lim\limits_{b \to \infty} \ln b = \infty$, па $\int_1^\infty \frac{dx}{x^a}$ дивергира.

2. Интеграл: $\int_0^1 \frac{dx}{x^a}$, $a > 0$

- За $0 < a < 1$ $\int_0^1 \frac{dx}{x^a} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^a} = \frac{1}{1-a} \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left(\varepsilon^{1-a} - 1\right) = \frac{1}{1-a}$, интеграл конвергира.
- Може се закључити да за $a \ge 1$, интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^a}$ дивергира.

33. Метода парцијалне интеграције.

Метода парцијалне интеграције

Нека су $u(x)$ и $v(x)$ диференцијабилне функције, тада је

$$d(uv) = u\,dv + v\,du, \text{ тј. } u\,dv = d(uv) - v\,du$$

Интеграцијом леве и десне стране последњег израза добија се формула парцијалне интеграције

$$\int u dv = \int d(uv) - \int v du \quad \Rightarrow \quad \int u dv = uv - \int v du\,.$$

Основна таблица интеграла

- Извод функције добијене од основних елементарних функције у *коначном* облику је такође функција у *коначном* облику добијена од основних елементарних функција.
- Одређени интеграл за непрекидну функцију на коначном одсечку постоји.
- За неодређени интеграл елементарне функције у општем случају се *не може* добити елементарна функције у коначном облику. За случајеве када може, неодређени интеграли се налазе (рачунају) помоћу табличних вредности (добијених на основу таблице извода) и методом смене и парцијалне интеграције.
- *Приближна вредност* са потребном тачношћу за одређене интеграле елементарних функција се увек може израчунати.

ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛА

1) $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \ (a \neq -1)$;

2) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \ (x \neq 0)$;

3) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \ (a \neq 1)$;

4) $\int e^x dx = e^x + C$;

5) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$;

6) $\int \cos dx = \sin x + C$;

7) $\int \sinh x\, dx = \cosh x + C$;

8) $\int \cosh dx = \sinh x + C$;

9) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;

10) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{ctg} x + C$;

11) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C' \end{cases}$;

12) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C' \end{cases}$;

13) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arsinh} x + C = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C$;

14) $\int \frac{dx}{\pm\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcosh} x + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + C, \quad |x| > 1$;

15) $\int \frac{dx}{x^2-1} = \begin{cases} \operatorname{artgh} x + C = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + C, & |x| < 1; \\ -\operatorname{arctgh} x + C = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} + C, & |x| > 1. \end{cases}$

На основу основне таблице изводе се интеграли који се појављују у проширеним таблицама интеграла. Напр.

- $\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$,

- $$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C.$$

<u>Примери</u> елементарних функција чији интеграли се *не могу* изразити у *коначном* облику помоћу елементарних функција:

1) $\int e^{-x^2}dx$; 2) $\int \frac{e^x dx}{x}$; 3) $\int \frac{dx}{\ln x}$ (интегрални логаритам);

4) $\int \frac{\sin x}{x}dx$, $\int \frac{\cos x}{x}dx$ (интегрални синус и косинус);

5) $\int \sin x^2 dx$, $\int \cos x^2 dx$ (Френелови интеграли).

Нека својства неодређеног интеграла

<u>Теорема 1.</u> Неодређени интеграл алгебарског збира коначно много непрекидних функција једнак је алгебарском збиру њихових интеграла

$$\int [f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \ldots + \int f_n(x)dx.$$

<u>Доказ.</u> Нека су $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., $F_n(x)$ примитивне функције функција $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, тада је

$[F_1(x) + F_2(x) + \ldots + F_n(x)]' = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$, тј.

$$\int [f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)]dx = F_1(x)+F_2(x)+\ldots+F_n(x)+C,$$

како је

$$\int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \ldots + \int f_n(x)dx = F_1(x)+F_2(x)+\ldots+F_n(x)+C_1+C_2+\ldots+C_n$$

са $C_1+C_2+\ldots+C_n = C$, добија се тражена једнакост.

<u>Теорема 2.</u> $\int c\, f(x)dx = c\int f(x)dx$, c = const.

<u>Доказ.</u> Ако је $F(x)$ примитивна функција функције $f(x)$, тада $F'(x) = f(x)$, па је $[c\,F(x)]' = c\,f(x)$, што значи да је

$$\int f(x)dx = F(x)+C, \qquad \int c\, f(x)dx = cF(x)+C_1$$

где су C и C_1 произвољне константе, узевши $C_1 = cC$, из претходних једнакости

$$\int c\, f(x)dx = c[F(x)+C] = c\int f(x)dx.$$

Теорема 3. Свака интеграциона формула не мења свој облик ако се у њој независно промењлива замени неком диференцијабилном функцијом, тј. ако је

$$\int f(x)dx = F(x) + C \text{, тада је и } \int f(u)du = F(u) + C$$

где је $u = g(x)$ произвољна диференцијабилна функција.

Доказ. Како је $\int f(x)dx = F(x) + C$, то је $F'(x) = f(x)$. Посматрајмо функцију $F(u) = F[g(x)]$. Због инваријантности првог диференцијала сложене функције, имамо да је

$$dF(u) = F'(u)\,du = f(u)\,du \qquad \Rightarrow \qquad \int f(u)du = \int dF(u) = F(u) + C.$$

34. Интеграција простих рационалних функција.

Интеграција рационалних функција

Сваку рационалну функцију можемо представити као количник два полинома

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}.$$

Ако је степен бројиоца мањи од степена имениоца, разломак је прави (правилан), а ако степен бројиоца није мањи од степена имениоца, неправилан.

Када разломак није прави, може се написати у облику

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=M(x)+\frac{N(x)}{P(x)},$$

где је $\frac{N(x)}{P(x)}$ прави разломак, а $M(x)$ неки полином. Размотримо интеграцију правих рационалних функција.

Основна теорема алгебре. Свака алгебарска једначина n-тог степена

$$x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$$

где су коефицијенти a_i, $i=1, 2, \ldots, n$, реални бројеви, има n корена (реалних или комплексних).

Последица. Сваки полином n-тог степена може се представити у облику производа

$$x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$$

где су $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ корени решења једначине $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$.

Ако међу коренима има једнаких $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_k=\alpha$, ($k$-тоструки корен), тада се одговарајућих k множилаца замењује са $(x-\alpha)^k$, а сваки пар коњуговано комплексних корена $\alpha=c+id$ и $\overline{\alpha}=c\text{-}id$ се може заменити са $x^2+px+q=(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})$.

На основу претходног се може доказати да важи

Теорема. Постоје такви бројеви A_i, B_j, C_j, $i = 1,2,\dots,k$, $j = 1,2,\dots,r$ да важи идентитет

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \dots + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \frac{A_1}{x-\alpha} + \dots$$

$$\dots + \frac{B_r x + C_r}{(x^2+px+q)^r} + \dots + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2+px+q)^2} + \frac{B_1 x + C_1}{x^2+px+q} + \dots$$

разломци $\dfrac{A_k}{(x-\alpha)^k}$ су тзв. прости разломци прве врсте, а разломци $\dfrac{B_r x + C_r}{(x^2+px+q)^r}$ су прости разломци друге врсте. При томе сваком k-тоструком реалном корену полинома $P(x)$ одговара збир од k простих разломака прве врсте

$$\frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \dots + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \frac{A_1}{x-\alpha},$$

а сваком r-тоструком пару конјуговано комплексних корена $(\alpha, \overline{\alpha})$ одговара r простих разломака друге врсте

$$\frac{B_r x + C_r}{(x^2+px+q)^r} + \dots + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2+px+q)^2} + \frac{B_1 x + C_1}{x^2+px+q}.$$

Дефиниција. Прави (правилни) разломци облика:

(I) $\dfrac{A}{x-a}$,

(II) $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, $k \geq 2$, $k \in N$,

(III) $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, $\dfrac{p^2}{4} - q < 0$, (тј. корени имениоца су конјуговано комплексни)

(IV) $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, $\dfrac{p^2}{4} - q < 0,\ k \geq 2,\ k \in N$, (тј. корени имениоца су конјуговано комплексни)

називају се простим разломцима I, II, III и IV типа.

Интеграцијом простих разломака I, II, III и IV типа добија се следеће:

(I) $\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C.$

(II)

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k}dx = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C.$$

(III) $$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}dx =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

(IV) $$\int \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^k} = \frac{A}{2}J + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)J_k$$

Ако се уведе смена $x^2+px+q=t,\ (2x+p)dx=dt$, имамо да је

$$J = \int \frac{2x+p}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx = \int \frac{dt}{t^k} = \int t^{-k}dt = \frac{t^{1-k}}{1-k} + C = \frac{1}{(1-k)\left(x^2+px+q\right)^{k-1}} + C\cdot$$

Ако се у интегралу J_k уведе смена $x + \frac{p}{2} = t,\ dx = dt$ и означи $q - \frac{p^2}{4} = m^2$ (по претпоставци $q - \frac{p^2}{4} > 0$) онда је

$$J_k = \int \frac{dx}{\left(x^2 + px + q\right)^k} = \int \frac{dx}{\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)\right]^k} = \int \frac{dt}{\left(t^2 + m^2\right)^k} =$$

$$= \frac{1}{m^2} \int \frac{(t^2 + m^2) - t^2}{\left(t^2 + m^2\right)^k} dt = \frac{1}{m^2} \left(\underbrace{\int \frac{dt}{\left(t^2 + m^2\right)^{k-1}}}_{J_{k-1}} - \int \frac{t^2}{\left(t^2 + m^2\right)^k} dt \right)$$

применом парцијалне интеграције

$$\int \frac{t^2}{\left(t^2 + m^2\right)^k} dt = \int t \frac{t}{\left(t^2 + m^2\right)^k} dt = \frac{1}{2} \int t \frac{d(t^2 + m^2)}{\left(t^2 + m^2\right)^k} =$$

$$= -\frac{t}{2(k-1)\left(t^2 + m^2\right)^{k-1}} + \frac{1}{2(k-1)} \underbrace{\int \frac{dt}{\left(t^2 + m^2\right)^{k-1}}}_{J_{k-1}},$$

па је

$$J_k = \frac{1}{m^2}\left(J_{k-1} + \frac{t}{2(k-1)\left(t^2 + m^2\right)^{k-1}} - \frac{1}{2(k-1)} J_{k-1} \right) = \frac{t}{2m^2(k-1)\left(t^2 + m^2\right)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2m^2(k-1)} J_{k-1}$$

Слично би смо изразили J_{k-1} преко J_{k-2}, итд. На крају би смо добили $J_1 = \int \frac{dt}{t^2 + m^2} = \frac{1}{m} \operatorname{arctg} \frac{t}{m} + C$. Враћањем смене за t и m добија се интеграл IV типа изражен преко променљиве x и датих бројева A, B, p, q.

- Закључујемо да се интеграли простих разломака изражавају помоћу елементарних функција, па према томе то важи и за произвољну рационалну функцију. При томе је треба прво разложити на просте разломке.
- Коефицијенти у изразу за разлагање на просте разломке, из горње теореме, се могу добити тзв. методом неодређених коефицијената: Израз из теореме представља идентитет (тј. важи за свако x за које је израз дефинисан), што значи да, ако се разломци у њему доведу на заједнички иминилац, добијају се идентични полиноми у бројиоцима разломака на левој и десној страни израза. Изједначавањем коефицијената који се налазе уз исте степене променљиве x, добија се систем једначина, из кога се одређују коефицијенти израза.

35. Интеграција функција облика $R(\sin x, \cos x)$ где је R рационална функција.

Интеграција неких класа тригонометријских функција

Претпоставимо да је дат израз који представља рационалну функцију аргумената који су тригонометријске функције. Такав израз ћемо означавати са $R(\sin x, \cos x)$, јер се све тригонометријске функције рационално изражавају преко функција sin *x*, cos *x*. Важи следећа теорема:

Теорема. Интеграл $R(\sin x, \cos x)$ трансформише се у интеграл рационалне функције сменом $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Доказ. Коришћењем тригонометријских формула

- $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, тј. $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$

  (јер је $1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = 1 + \dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \dfrac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$).

- $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} - \dfrac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, тј. $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

- Због $x = 2\operatorname{arctg} t$, важи $dx = \dfrac{1}{1+t^2}dt$.

  Дакле, $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\dfrac{2t}{1+t^2}, \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)\dfrac{2}{1+t^2}dt$, интегранд је рационална функција од *t*.

Интеграли специјални случајеви функција $R(\sin x, \cos x)$, се могу једноставније решити другим сменама:

1. Интеграл облика $\int R(\sin x)\cos x dx$ се најједноставније решава сменом sin *x* = *t*, cos *x dx* = *dt*, која дати интеграл своди на $\int R(t)dt$.
2. Слично, интеграл $\int R(\cos x)\sin x dx$ се може решавати сменом cos *x* = *t*, sin *x dx* = *dt*, чиме се своди на $\int R(t)dt$.

3. За интеграл облика $\int R(\operatorname{tg} x)dx$ погодна је смена tg $x = t$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$, којом се своди на $\int R(t)\dfrac{dt}{1+t^2}$.

4. Смена tg $x = t$, се користи и у случајевима кад се функције sin x и cos x појављују са парним степенима у интегранду $R(\sin x, \cos x)$.

5. **Напомена.** Интеграл IV типа се своди на $J_k = \int \dfrac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^k}$, који се може, осим на већ описани начин решавати и сменом $t = m \operatorname{tg} z,\ dz = \dfrac{mdt}{t^2+m^2}$. Тада је

$$J_k = \int \frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^k} = \frac{1}{m}\int \frac{\dfrac{mdt}{t^2+m^2}}{\left(t^2+m^2\right)^{k-1}} = \frac{1}{m}\int \frac{dz}{m^{2(k-1)}(\operatorname{tg}^2 z+1)^{k-1}} =$$

$$\frac{1}{m^{2k-1}}\int \frac{dz}{\left(\dfrac{1}{\cos^2 z}\right)^{k-1}} = \frac{1}{m^{2k-1}}\int \cos^{2(k-1)} z\, dz.$$

Последњи интеграл се може поједноставити снижавањем степена помоћу $\cos^2 z = \dfrac{1+\cos 2z}{2}$.

36. Интеграција ф-ја облика $R(x, \sqrt{ax+b})$ где је R рационална ф-ја.

37. Интеграција ф-ја облика $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ где је R рационална ф-ја.

Интеграција ирационалних функција облика

$$R\left(x, \sqrt{\alpha x+\beta}\right) \text{ и } R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}}\right)$$

своди се, респективно, сменама $t=\sqrt{\alpha x+\beta}$ и $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}}$ на интеграле рационалних функција.

38. Интеграција функција облика $R(x, x^{m/n}, \ldots, x^{r/s})$ где је R рационална функција.

Нека је у интегралу $\int R(x, x^{m/n}, \ldots, x^{r/s})dx$, k најмањи заједнички именилац разломака m/n, ..., r/s, тада се сменом $x = t^k$ интегранд трансформише у рационалну функцију.

DODATNO (NE TREBA VALJDA):

Интеграли облика $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ израчунавају се помоћу следећих трансформација:

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2x+b)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{A}{2a}J_1+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)J_2$$

При чему се интеграл J_1 решава сменом $ax^2+bx+c=t,\ (2ax+b)dx=dt$:

$$\int \frac{(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}+C = 2\sqrt{ax^2+bx+c}+C,$$

а трансформација интеграла J_2 даје таблични интеграл:

$$J_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \begin{cases} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}}, & a>0, \\ \int \frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}}, & a<0. \end{cases}$$

39. Интеграција функција облика $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$ где је R рационална функција.

1. ***Интеграција ирационалних функција типа*** $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$

Издвајањем потпуног квадрата у поткореном изразу интеграл

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$$

се своди на један од интеграла

$$(1) \qquad \int R(y, \sqrt{1-y^2})dy$$

$$(2) \qquad \int R(y, \sqrt{y^2-1})dy$$

$$(3) \qquad \int R(y, \sqrt{1+y^2})dy.$$

(1) Увођењем смене $y = \sin z$ добија се

$$\int R(y, \sqrt{1-y^2})dy = \int R(\sin z, \cos z)\cos z\, dz.$$

(2) Смена $y = \dfrac{1}{\sin z}$ даје $\displaystyle\int R(y, \sqrt{y^2-1})dy = -\int R\left(\frac{1}{\sin z}, \frac{\cos z}{\sin z}\right)\frac{\cos z}{\sin^2 z}dz.$

(3) Применом смене $y = \operatorname{tg} z$, $\displaystyle\int R(y, \sqrt{1+y^2})dy = \int R\left(\frac{\sin z}{\cos z}, \frac{1}{\cos z}\right)\frac{1}{\cos^2 z}dz.$

Интеграли добијени овим сменама се могу свести на интеграле рационалних функција. Полазни интеграли су могли и директно да се сведу на рационалне функције следећим сменама:

$$(1) \qquad y = \sin z = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$(2) \qquad y = \frac{1}{\sin z} = \frac{1+t^2}{2t}$$

$$(3) \qquad y = \operatorname{tg} z = \frac{2t}{1-t^2}.$$

DODATNO: Неке примене интегралног рачуна (VALJDA NE TREBA)

1) Израчунавање површине равних фигура (квадратура)

- Према дефиницији одређеног интеграла ако је $f(x)\geq 0$, $x\in[a, b]$, тада површина криволинијског трапеза ограниченог кривом $y = f(x)$, осом Ox и паралелним правим $x= a$ и $x = b$

$$P=\int_a^b f(x)dx\cdot$$

Ако је $f(x)\leq 0$, $x\in[a, b]$, онда је и $\int_a^b f(x)dx\leq 0$, а по својој апсолутној вредности је једнак површини одговарајућег криволинијског трапеза.

Када $f(x)$ коначан број пута мења знак на задатом одсечку $[a, b]$, тада се $\int_a^b f(x)dx$ разлаже на збир интеграла дате функције над одсечцима у којима је $f(x)$ сталног знака. Добија се да је интеграл на целом одсечку $[a, b]$ функције са променљивим знаком, разлика одговарајућих површина које леже изнад и испод Ox осе. Да би се добила цела површина, треба израчунати збир апсолутних вредности интеграла над поменутим одсечцима, тако да је

$$P=\int_a^b |f(x)|dx\cdot$$

- Ако треба да се израчуна површина између кривих $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ и правих $x= a$, $x = b$, тада ако је $f_1(x) \leq f_2(x)$, онда је

$$P=\int_a^b f_2(x)dx-\int_a^b f_1(x)dx=\int_a^b\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx\cdot$$

- Ако је крива дата у параметарском облику

$$x=\varphi(t),\ \ y=\psi(t),\ \ \alpha\leq t\leq\beta,\ \varphi(\alpha)=a,\ \ \varphi(\beta)=b$$

тада површина датог криволинијског трапеза представља вредност одређеног интеграла

$$P=\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt$$

јер је $x=\varphi(t),\ \ dx=\varphi'(t)dt,\ \ y=f(x)=f\left[\varphi(t)\right]=\psi(t).$

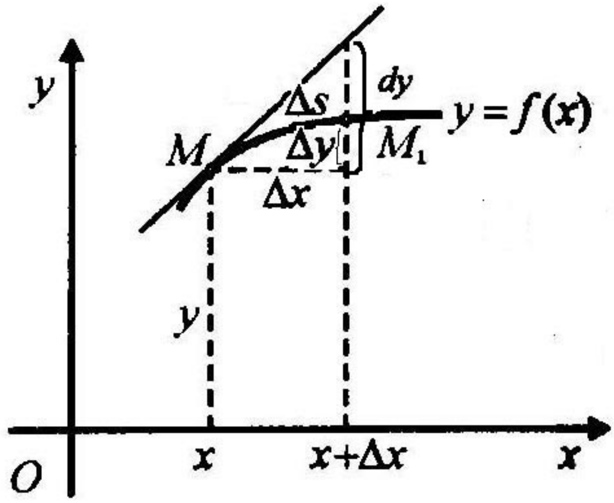
40. Израчунавање дужине лука криве. Доказ.

2) Израчунавање дужине лука криве (ректификација)

- За део Δs лука криве $y = f(x)$ између тачака $M(x, y)$ и $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y)$ важи

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \le \Delta s \le \sqrt{(\Delta x)^2 + (dy)^2} + (dy - \Delta y),$$

где је $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ дужина одсечка MM_1.



Ако је $f(x)$ непрекидно диференцијабилна функција, онда се може показати, уз претпоставку да је $\Delta x>0$, да је

$$\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \le \frac{\Delta s}{\Delta x} \le \sqrt{1+\left(\frac{dy}{\Delta x}\right)^2} + \frac{\varepsilon}{\Delta x},$$

јер је за диференцијабилне функције $dy - \Delta y = o(\Delta x)$. Преласком на граничне вредности добија се

$$\lim_{\Delta x\to 0}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \le \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta x} \le \lim_{\Delta x\to 0}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{\Delta x}\right)^2},\ \varepsilon = o(\Delta x),$$

значи $$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$ тј. $$ds = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

Према томе ако се формирају одговарајуће интегралне суме, добија се да је дужина лука криве $y = f(x)$ над одсечком $x\in[a, b]$ једнака вредности одређеног интеграла

$$s = \int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

Слично, дужина лука криве $y = f(x)$ над одсечком $[a, x]$ промењљиве дужине је

$$s=\int_a^x \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

- Ако је једначина криве дата у параметарском облику $x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad \alpha \le t \le \beta,$

тада се дужина лука дате криве рачуна помоћу интеграла

$$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{1+\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2}\,\varphi'(t)\,dt,$$ тј.

$$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2}\,dt.$$

41. Израчунавање запремине ротационог тела. Доказ.

3) Израчунавање запремине тела (кубатура)

- Ако је Ω неко (тродимензионо) тело за које нам је позната површина сваког пресека са равнима ортогоналним на осу Ox, тада ће та површина зависити од положаја пресечне равни, тј. од x, $P = P(x)$.

Ако поставимо равни $x = x_0 = a$, $x = x_1$, $x = x_2$, ... , $x = x_n = b$, где је $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, тада смо тело Ω разложили на слојеве који представљају тзв. елементарне цилиндре, чија је запремина

$$V_k = P(\xi_k)\Delta x_k\,,\ \ x_{k-1} \le \xi_k \le x_k\,,$$

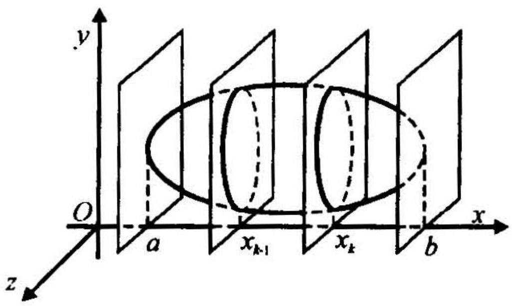
где је површина попречног пресека $P(\xi_k)$ основа цилиндра, а Δx_k његова висина.

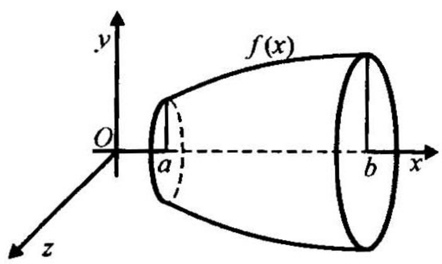
Запремина свих ових цилиндара ће бити

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} P(\xi_k)\Delta x_k\,,$$

а гранична вредност интегралне суме кад $n\to\infty$, тј. кад $\max \Delta x_k \to 0$, уколико постоји, представља запремину датог тела Ω

$$V_n = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b P(x)dx\,.$$





- ***Запремина ратационог тела***

Ако је Ω тело образовано ротацијом око осе Ox криволинијског трапеза ограниченог кривом $y = f(x)$, осом Ox и правама $x = a$, $x = b$, онда је попречни пресек круг чија је површина

$$P = \pi[f(x)]^2 = \pi\, y^2$$

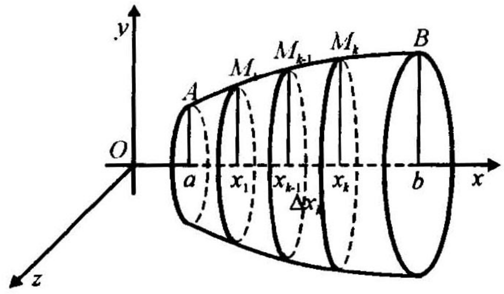
па ће његова запремина бити

$$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi\int_a^b y^2 dx\,.$$

42. Израчунавање површине ротационе површи. Доказ.

4) Израчунавање површине ротационе површи (компланација)

- Нека је дата површ образована ротацијом криве $y = f(x)$ око осе Ox и нека је $f(x)$ непрекидна и диференцијална функција у свим тачкама одсечка $[a, b]$.



Свака тетива лука Δs_k, $k = 1, ..., n$ при ротацији образује конусну површ чија је површина

$$\Delta P_k = 2\pi \frac{y_{k-1} + y_k}{2} \Delta s_k ,$$

где је
$$\Delta s_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2} \cdot \Delta x_k .$$

Према Лагранжевој теореми

$$\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(\xi_k),\ x_{k-1} \le \xi_k \le x_k ,$$

па је
$$\Delta s_k = \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \cdot \Delta x_k ,$$
$$\Delta P_k = 2\pi \frac{y_{k-1} + y_k}{2} \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \cdot \Delta x_k ,$$

а укупна површина ротационе површи израчуната на овај начин је

$$P_n = \pi \sum_{k=1}^{n} \left(f(x_{k-1}) + f(x_k)\right) \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \cdot \Delta x_k .$$

Преласком на граничну вредност добија се

$$P = \lim_{\substack{\max \Delta x_k \to 0 \\ (n \to \infty)}} \pi \sum_{k=1}^{n} 2\left(f(\xi_k)\right) \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \cdot \Delta x_k$$

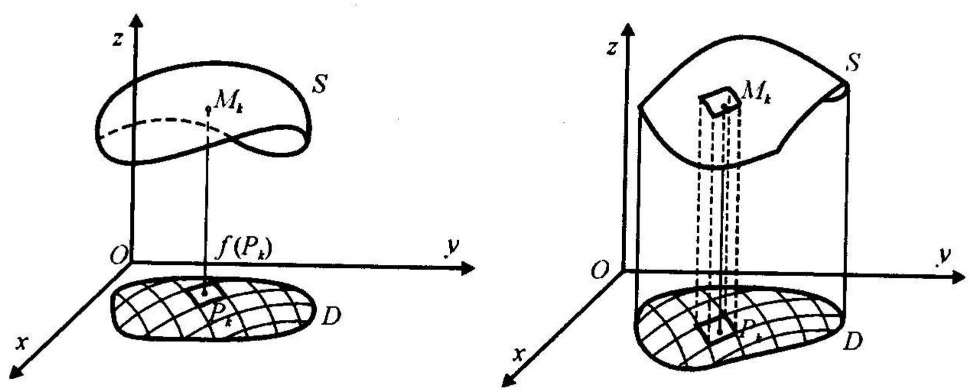
тј.
$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx .$$

43. Дефиниција и особине двојног интеграла.

Интеграли функција двеју и више промењљивих

ДЕФИНИЦИЈА ДВОЈНОГ ИНТЕГРАЛА

Нека је D просто повезана затворена област у равни Oxy и нека је функција $z = f(x, y)$ дефинисана и непрекидна у области D, при чему је се S означена површ задата функцијом $f(x, y)$. Поделимо на произвољан начин област D на елементарне подобласти $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$, ..., $\Delta\sigma_n$ и у свакој од ових подобласти уочимо по једну тачку P_1, P_2, ..., P_n и одговарајућу вредност функције $f(P_1)$, $f(P_2)$, ..., $f(P_n)$.



Сума
$$V_n = \sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta\sigma_k$$

назива се n-том интегралном сумом за функцију $f(x, y)$ у области D која одговара датој подели $D = \cup\Delta\sigma_k$. Ако је $f(x, y) \geq 0$, $\forall(x, y) \in D$, тада величина $\Delta V_k = f(P_k)\sigma_k$ представља запремину призматичног стубића са основом $\Delta\sigma_k$ и висином $f(P_k)$, тако да у том случају интегрална сума V_n представља суму запремина вертикалних призматичних стубића чије основе $\Delta\sigma_k$ ($k = 1, ..., n$) прекривају област D. При томе $\Delta\sigma_{k_1}$ и $\Delta\sigma_{k_2}$, $k_1 \neq k_2$, немају заједничких тачака.

Дефиниција. Нека је $f(x, y)$ (непрекидна) функција у затвореној просто повезаној области D и нека је D на произвољан начин подељена на елементарне области $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$, ..., $\Delta\sigma_n$. Ако постоји гранична вредност интегралне суме V_n када највећи пречник елементарних области тежи ка нули (ознака $d(\Delta\sigma_k)$), тада се та гранична вредност назива двојним интегралом функције $f(x, y)$ на области D и означава

$$\lim_{\substack{\max d(\Delta\sigma_k)\to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta\sigma_k = \iint_D f(P)d\sigma.$$

Постојање граничне вредности за непрекидне функције гарантује следећа теорема:

Теорема. За n-ту интегралну суму V_n која одговара коначној области D и непрекидној функцији $f(x, y)$, постоји гранична вредност кад највећи пречник елементарних области $\Delta\sigma_k$ ($k = 1, ..., n$) тежи ка нули (тј. $n \to \infty$). Та гранична вредност не зависи од од начина поделе области D на елементарне области, ни од избора тачака P_k.

Ако је $f(x, y) \geq 0$, $\forall (x, y) \in D$, тада двојни интеграл геометријски представља запремину вертикалног цилиндричног тела, чија је доња основа D, а горња S.

$$V = \iint_D f(x, y) d\sigma .$$

Кад је $f(x, y) \leq 0$, $\forall (x, y) \in D$, тада је двојни интеграл негативан и једнак $-V$, јер одговарајуће тело лежи испод равни Oxy.

44. Дефиниција и особине тројног интеграла.

Нека је W просто повезана затворена област подељена на елементарне подобласти Δw_1, Δw_2, ..., Δw_n, а $f(P)$, $P \in W$, непрекидна функција у области W. Тада суму

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta w_k$$, (где је $P_k \in \Delta w_k$, произвољно изабрана тачка)

називамо n-том интегралном сумом. Ако постоји гранична вредност те суме кад највећи дијаметар подобласти Δw_k тежи нули, $\max d(w_k) \to 0$ (тј. $n \to \infty$), тада је та гранична вредност:

1. једнодимензиони интеграл
$$J = \int_W f(P)dW$$ (када је W линија)

2. дводимензиони интеграл
$$J = \iint_W f(P)dW$$ (када је W површ)

3. тродимензиони интеграл
$$J = \iiint_W f(P)dW$$ (када је W тело)

4. n-димензиони интеграл $$J = \iint\limits_W \dots \int f(P)dW$$

(када је W просто повезана затворена n-димензиона област)

Посебно, ако је W одсечак осе имамо обичан одређени интеграл, ако је W област у координатној равни имамо двојни интеграл, а ако је W тело, имамо тзв. тројни интеграл, који ћемо означавати са

$$J = \iiint_\Omega f(P)d\omega.$$

Дефиниција. Нека је $f(x, y, z)$ (непрекидна) функција у затвореној просто повезаној области Ω која је на произвољан начин подељена на елементарне области $\Delta\omega_k$. Изаберимо произвољне тачке $P_k \in \Delta\omega_k$ и означимо одговарајуће вредности дате функције са $f(P_k)$, $k = 1, \dots, n$. Ако постоји гранична вредност суме $\sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta\omega_k$ када највећи пречник елементарних области $\Delta\omega_k$ такође тежи нули (тј. $n\to\infty$) тада се та гранична вредност назива тројни интеграл функције $f(x, y, z)$ по области Ω и означава се

$$\lim_{\substack{\max d(\Delta\omega_k)\to 0\\ (n\to\infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta\omega_k = \iiint_\Omega f(P)d\omega.$$

DODATNO (MOGUCE DA TREBA U OKVIRU PREDHODNA DVA PITANJA):

ОСНОВНА СВОЈСТВА ДВОЈНОГ И ТРОЈНОГ ИНТЕГРАЛА

1) Ако су функције $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$,...,$f_m(x, y)$ (односно $f_1(x, y, z)$, $f_2(x, y, z)$,..., $f_m(x, y, z)$) непрекидне у затвореној просто повезаној области D (тј. у тродимензионој области Ω), тада је

$$\iint_D [f_1(P)+\ldots+f_m(P)]d\sigma = \iint_D f_1(P)d\sigma + \ldots + \iint_D f_m(P)d\sigma,$$

$$\iiint_\Omega [f_1(P)+\ldots+f_m(P)]d\omega = \iiint_\Omega f_1(P)d\omega + \ldots + \iiint_\Omega f_m(P)d\omega,$$

где је $f_i(P) = f_i(x, y)$, односно $f_i(P) = f_i(x, y, z)$, $i = 1, \ldots, m$.

2) Ако је функција $f(P)$ непрекидна у области D тј. Ω, тада је

$$\iint_D c\cdot f(P)d\sigma = c\iint_D f(P)d\sigma \quad (c = \text{const.}),$$

$$\iiint_\Omega c\cdot f(P)d\omega = c\iiint_\Omega f(P)d\sigma\omega \quad (c = \text{const.}),$$

3) Ако непрекидна функција $f(P)$ у области D односно Ω, не мења знак, тада је $\iint_D f(P)d\sigma$ односно $\iiint_\Omega f(P)d\omega$ истог знака као и $f(P)$.

Доказ: Нека је $f(P) \geq 0$. Тада је $\sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta\sigma_k \geq 0$ односно $\sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta\omega_k \geq 0$. Како је функција $f(P)$ непрекидна и граничне вредности ових сума су ненегативни.

4) Ако је $D = D_1 \cup D_2$ односно $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, где подобласти D_1 и D_2, односно Ω_1 и Ω_2 немају заједночких тачака, тада је

$$\iint_D f(P)d\sigma = \iint_{D_1} f(P)d\sigma + \iint_{D_2} f(P)d\sigma,$$ тј.

$$\iiint_\Omega f(P)d\omega = \iiint_{\Omega_1} f(P)d\omega + \iiint_{\Omega_2} f(P)d\omega.$$

Последица: Ако је $D = \bigcup_{i=1}^{m} D_i$, тада је $\iint_D f(P)d\sigma = \sum_{i=1}^{m} \iint_{D_i} f(P)d\sigma$,

односно ако је $\Omega = \bigcup_{i=1}^{m} \Omega_i$, тада је $\iiint_\Omega f(P)d\omega = \sum_{i=1}^{m} \iiint_{\Omega_i} f(P)d\omega$,

где подобласти D_i односно Ω_i немају заједничких тачака.

5) **Теорема (о процени вредности двојног интеграла).** Ако су m и M најмања, односно највећа вредност функције $f(P)$ у области D, а $S(D)$ површина области D, тада је

$$mS(D) \le \iint_D f(P)d\sigma \le MS(D).$$

Доказ.

$$f(P) \le M \Rightarrow \iint_D (M - f(P))d\sigma \ge 0 \Rightarrow \iint_D f(P)d\sigma \le M\iint_D d\sigma = MS(D)$$

$$f(P) \ge m \Rightarrow \iint_D (f(P) - m)d\sigma \ge 0 \Rightarrow \iint_D f(P)d\sigma \ge m\iint_D d\sigma = mS(D),$$

одатле следи $$mS(D) \le \iint_D f(P)d\sigma \le MS(D).$$

Теорема (о процени вредности тројног интеграла). Ако је $m = \min\limits_{P\in\Omega} f(P)$ и $M = \max\limits_{P\in\Omega} f(P)$, а $V(\Omega)$ запремина тродимензионе области, тада је

$$mV(\Omega) \le \iiint_\Omega f(P)d\omega \le MV(\Omega).$$

Последица. Ако је $\varphi(P) \le f(P) \le \psi(P)\ \forall P \in D$ (тј. $\forall P \in \Omega$), тада је

$$\iint_D \varphi(P)d\sigma \le \iint_D f(P)d\sigma \le \iint_D \psi(P)d\sigma,$$

$$\iiint_\Omega \varphi(P)d\omega \le \iiint_\Omega f(P)d\omega \le \iiint_\Omega \psi(P)d\omega.$$

6) **Теорема (о средњој вредности двојног интеграла).** Ако је $f(P) = f(x, y)$ непрекидна функција у затвореној области D равни Oxy, тада постоји унутрашња тачка $P_* = P_*(\xi,\eta)$ области D таква да је

$$\iint_D f(P)d\sigma = f(P_*)S(D) = f(\xi,\eta)\iint_D d\sigma.$$

Доказ. Према претходној теореми $m \le \dfrac{1}{S(D)}\iint_D f(P)d\sigma \le M$, а како је $f(P)$ непрекидна функција, на основу Коши-Болцанове теореме следи да постоји унутрашња тачка $P_* \in D$ таква да је

$$\frac{1}{S(D)}\iint_D f(P)d\sigma = f(P_*),$$

тако да је
$$\iint_D f(P)d\sigma = f(P_*)\cdot S(D) = f(\xi,\eta)\,S(D),$$

где је $P_* = P_*(\xi,\eta)$.

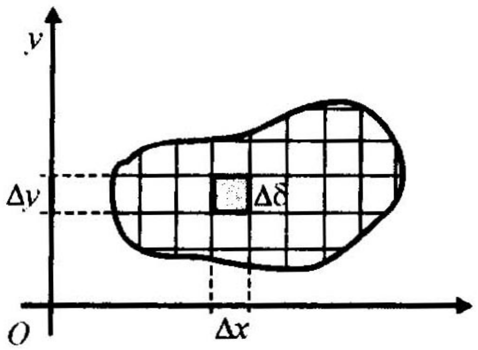
Теорема (о средњој вредности тројног интеграла). Ако је $f(P) = f(x, y, z)$ непрекидна функција у затвореној тродимензионој области Ω, тада постоји унутрашња тачка $P_* = P_*(\xi,\eta,\zeta)$ области Ω таква да је

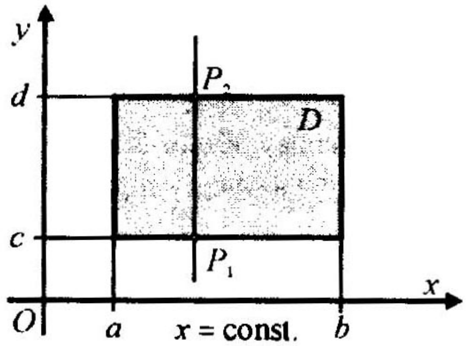
$$\iiint_\Omega f(P)d\omega = f(P_*)V(\Omega) = f(\xi,\eta,\zeta)\iint_\Omega d\omega.$$

45. Свођење двојног интеграла на двоструки.

ИЗРАЧУНАВАЊЕ ДВОЈНОГ ИНТЕГРАЛА ПО ПРАВОУГАОНОЈ ОБЛАСТИ

Нека је област *D* правоугаоник $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, покривен правоугаоном праволинијском мрежом *x*, *y* = const, тако да је површина елемента те области $\Delta\sigma = \Delta x \Delta y$, одакле је, при преласку на граничну вредност $d\sigma = dxdy$.

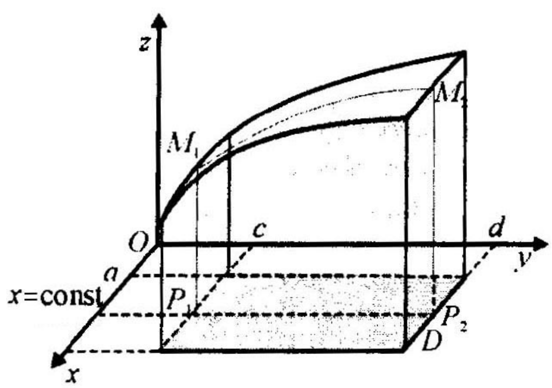




Како двојни интеграл геометријски представља запремину цилиндричног тела чије су основе област *D* у равни *Oxy* и површ $z = f(x, y)$, интеграција се састоји у томе да тачка $P(x, y)$ прође кроз све тачке области *D*. То се може урадити тако да се привремено сматра да је *x* = const., тако да интегранд $f(x, y)$ зависи само од *y*, па је

$$\int_c^d f(x, y)dy = F(x)$$

површина криволинијског трапеза $P_1P_2M_2M_1$ при чему је *x* параметар, а $P(x, y)$ пролази кроз све тачке одсечка P_1P_2.



Ако пустимо да одсечак P_1P_2 пролази транслаторно кроз све тачке области *D*, криволинијски трапез ће проћи кроз све тачке посматраног цилиндричног тела, па

$V = \int_a^b F(x)dx$, тј. $V = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx$, дакле,

$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy$, где је на десној страни израза тзв. двоструки интеграл, односно на два обична интеграла функције једне променљиве.

У интегралу по правоугаоној области *D* може се изменити поредак интеграције (фиксирањем променљиве *y*), при чему границе интеграције остају неизмењене:

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx.$$

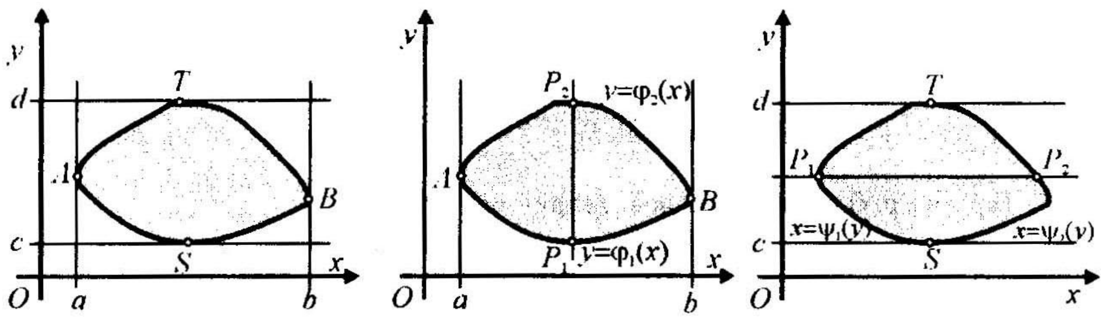
DODATNO (MISLIM NE TREBA):

ИЗРАЧУНАВАЊЕ ДВОЈНОГ ИНТЕГРАЛА ПО ПРОИЗВОЉНОЈ ОБЛАСТИ

Свака ограничена просто повезана област *D* у равни *Oxy* се може сместити у правоугаоник

$$D = \{(x, y) : a \le x \le b, c \le y \le d\}.$$

Нека је област *D* таква да праве *x* = const и *y* = const, орјентисане као *Ox*, односно *Oy* оса, секу њену границу (*C*) највише у по двема тачкама. Тачка P_1 у којој права улази у област, зове се улазна тачка, а друга тачка P_2 је излазна. Скуп свих улазних тачака је доњи (односно леви) лук границе (*C*), а скуп свих изланих тачака је горњи (односно десни) лук границе (*C*).



Преко ових лукова се област *D* може задати на два начина

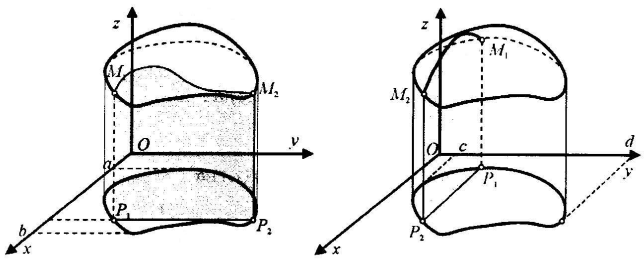
$$(A): \quad D = \{(x, y) : a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\};$$

$$(B): \quad D = \{(x, y) : \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y), c \le y \le d\}.$$

Тачка *P*(*x*, *y*) може проћи кроз све тачке области *D*, тако што ће најпре проћи кроз тачке тетиве P_1P_2, а затим тетива која има крајеве на граници (*C*), кроз све тачке области *D*, крећући се паралелно са осом *Ox* (односно *Oy*).

Ако двојни интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ рачунамо слично као и код правоугаоне области, прво фиксирањем *x* = const, тада у интегралу имамо само променљиву *y* која се мења у границама од $y=\varphi_1(x)$ до $y=\varphi_2(x)$, па је тада површина трапеза $P_1P_2M_2M_1$ једнака

$$\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy = F(x), \qquad \text{а} \qquad \iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b F(x)dx.$$



Ако фиксирамо *y* = const, тада се *x* мења у границама од $x=\psi_1(y)$ до $x=\psi_2(y)$, па је површина криволинијског трапеза $P_1P_2M_2M_1$ једнака

$$\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx = F(y) \qquad \text{и тада је} \qquad \iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d F(y)dy.$$

Према томе, $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx.$

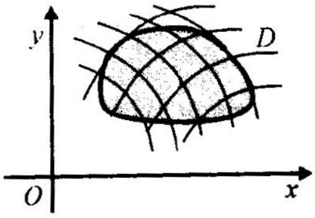
46. Смена променљивих у двојном интегралу. Поларне координате.

ОПШТИ СЛУЧАЈ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ ПРОМЕНЉИВИХ У ДВОЈНОМ ИНТЕГРАЛУ

Ако уместо Декартових координата x, y уведемо нове променљиве u, v које су са x и y везане датим релацијама

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),$$

где су $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$ непрекидне и диференцијалне функције у некој области D^* променљивих u и v, тада дату област D у равни покривамо криволинијском мрежом која не мора бити ортогонална, а кроз сваку тачку области D пролази само по једна линија од сваке породице кривих u = const, v = const (при чему се допушта коначно много изузетака).



Диференцирањем горњих једнакости добија се

$$\begin{aligned} dx &= x_u du + x_v dv \\ dy &= y_u du + y_v dv \end{aligned}, \quad \text{тј.} \quad \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}.$$

У квадратној матрици су функције од u и v, а одговара јој функционална детерминанта, која се зове Јакобијан

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}.$$

При томе $|J|$ је коефицијент деформације при пресликавању $(x, y) \longrightarrow (u, v)$, где се D пресликава у D^*. Дакле

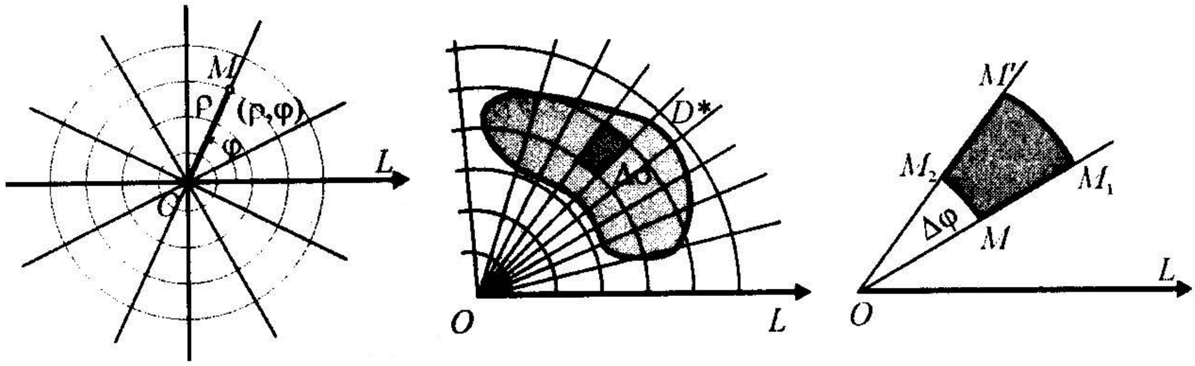
$$dxdy = |J|\, dudv,$$

па је, уз претпоставку да је $J \neq 0$

$$\iint\limits_{D} f(x, y)dxdy = \iint\limits_{D^*} f(x(u,v),\ y(u,v))\,|J|\,dudv.$$

ТРАНСФОРМАЦИЈА ДЕКАРТОВИХ У ПОЛАРНЕ КООРДИНАТЕ

У поларном координатном систему, положај сваке тачке M у равни једнозначно је одређен растојањем $\rho = OM$ од тачке O – почетне тачке координатне полуосе OL у тој равни, и орјентисаним углом $\varphi = \angle(OL, OM)$. При томе $\rho \in [0, \infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Координатну раван покрива мрежа координатних линија: $\rho =$ const (концентрични кругови са центром O) и $\varphi =$const (полуправе са заједничким почетком O). Свака тачка изузев O налази се у пресеку једног круга са центром у тачки O и једне полуправе са почетком у тачки O.



У двојном интегралу $\iint_D f(x, y)dxdy$ Декартове координате x, y тачке P замењујемо поларним ρ, φ помоћу следећих веза

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi .$$

Одатле добијамо да је

$$\begin{aligned} dx &= \cos\varphi\, d\rho - \rho\sin\varphi\, d\varphi \\ dy &= \sin\varphi\, d\rho + \rho\cos\varphi\, d\varphi \end{aligned}, \qquad \text{тј.}$$

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\rho \\ d\varphi \end{bmatrix}$$

па је

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = \rho ,$$

а елемент површине је $d\sigma = dxdy = \rho\, d\rho\, d\varphi$. На основу тога је

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho\, d\varphi = \iint_{D^*} f^*(\rho, \varphi)\rho\, d\rho\, d\varphi$$

O TROJNOM INTEGRLU (NEMA PITANJE):

ИЗРАЧУНАВАЊЕ ТРОЈНОГ ИНТЕГРАЛА

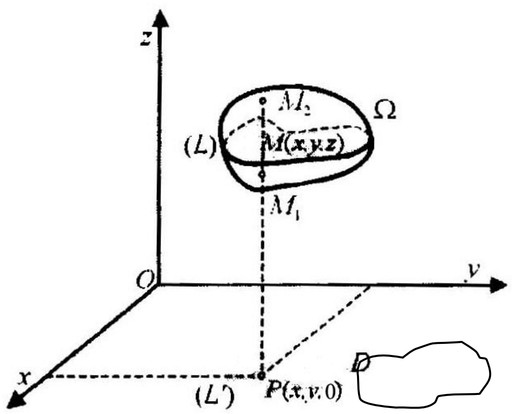
Тродимензиону простоповезану област Ω у простору *Oxyz* делимо на елементарне области низом равни паралелних координатним равнима тако да им је запремина $\Delta\omega = \Delta x \Delta y \Delta z$, а при преласку на граничну вредност $d\omega = dxdydz$.

Претпоставимо да је Ω затворена тродимензиона област чију границу (S) праве паралелне координатним осама секу највише у двема тачкама.

Процес интеграције се састоји у томе да тачка $M(x, y, z)$ прође кроз све тачке области Ω. Прво ћемо око области Ω описати цилиндрични омотач са генератрисама ортогоналним на једну координатну раван, на пр. *Oxy*. Он исеца у тој равни област D, чија је контура (L') пројекција додирне криве (L) цилиндричног омотача и тела Ω. Крива (L) дели површ (S) на доњи и горњи део на којима је променљива z једнозначна непрекидна функција независних променљивих x и y:

$$z = z_1(x, y),\ \ z = z_2(x, y),\ \ (x, y) \in D,$$

тј.
$$\Omega = \{(x, y, z) : (x, y) \in D,\ z_1(x, y) \le z \le z_2(x, y)\}.$$



Ако прво сматрамо да су x и y константне, најпре се врши интеграција функције $f(x, y, z)$ дуж одсечка M_1M_2, променљиве дужине, чији се крајеви налазе на доњем, односно горњем делу површи (S). Тако се добија

$$F(x, y) = \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz.$$

Кад тачка $P(x, y, 0)$ (пројекција тачке $M(x, y, z)$) прође кроз све тачке области D, одсечак M_1M_2 ће проћи кроз све тачке тела Ω. Зато је

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z) dxdydz = \iint\limits_{D} F(x, y) dxdy = \iint\limits_{D} dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz.$$

Ако је $D = \{(x, y) : a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$, онда је

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,,$$

где је на десној страни тзв. троструки интеграл.

НАПОМЕНА: Постоји 6 могућих поредака интеграције тројног интеграла. Промена поретка повлачи промену граница интеграције, осим ако је Ω паралелопипед са странама паралелним координатним равнима,

$$\Omega = \{(x,y,z) : a \le x \le b, c \le y \le d\,, p \le z \le q\}$$

када су границе интеграције за сва три аргумента константе

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_p^q f(x,y,z)\,dz\,.$$

47. Смена промењивих у тројном интегралу. Цилиндричне координате.

ОПШТИ СЛУЧАЈ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ ПРОМЕНЉИВИХ У ТРОЈНОМ ИНТЕГРАЛУ

Ако уместо Декартових координата x, y, z уведемо нове променљиве u,v,w преко релација

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w),$$

где су $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ непрекидне и диференцијалне функције по u, v, w у области $\Omega' = \{(u, v, w)\}$, тада је

$$\begin{aligned} dx &= x_u du + x_v dv + x_w dw \\ dy &= y_u du + y_v dv + y_w dw, \\ dz &= z_u du + z_v dv + z_w dw \end{aligned} \qquad \text{тј.}$$

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{bmatrix}$$

Квадратна матрица је матрица трансформације променљивих, а њена детерминанта је функционална и зове се Јакобијан

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}.$$

Коефицијент деформације тродимензионе области је $|J|$, па је

$d\omega = dxdydz = |J|\, dudvdw$, а уз претпоставку да је $J \neq 0$,

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)\,dxdydz = \iiint_{\Omega^*} f^*(u, v, w)\,|J|\,dudvdw,$$

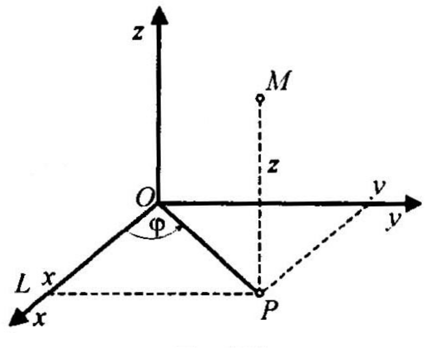
где је
$$f^*(u, v, w) = f\left[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)\right].$$

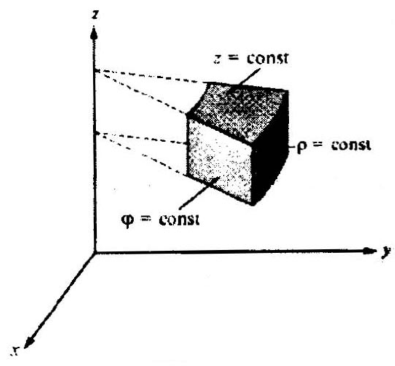
ТРОЈНИ ИНТЕГРАЛ У ЦИЛИНДАРСКИМ КООРДИНАТАМА

Нека је дата раван α и у њој тачка O и полуоса OL. Положај произвољне тачке M у тродимензионом простору, чија је пројекција на дату раван тачка P, је једнозначно одређен растојањем $\rho = OP$, углом $\varphi = \angle(OL, OP)$ и одсечком $z = PM$. При томе је

$$0 \le \rho \le \infty, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi, \qquad -\infty < z < \infty.$$

Ово су цилиндарске координате тачке M. Кроз сваку тачку простора, осим координатног почетка пролазе по три координатне површи: $\rho = \text{const}$ (кружни цилиндри са изводницом нормалном на дату раван α), φ=const (полуравни нормалне на дату раван α, које садрже полуправу са почетком у тачки O), z = const (равни паралелне датој равни α)





Поставимо Декартов координатни систем $Oxyz$ тако да се раван Oxy поклапа са равни α, а Ox са полуосом OL. Тада је

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi, \qquad z = z,$$

односно
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \qquad z = z.$$

Ако у тројном интегралу заменимо Декартове координате цилиндарским, онда је

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\rho \\ d\varphi \\ dz \end{bmatrix}, \qquad \text{одакле}$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, z)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

Из тога следи $d\omega = dxdydz = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$, а за тројни интеграл се добија

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{\Omega^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz,$$

При томе иста област изражена преко променљивих x, y, z је означена са Ω, а изражена преко ρ, φ, z са Ω^*.

ОПШТИ СЛУЧАЈ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ ПРОМЕНЉИВИХ У ТРОЈНОМ ИНТЕГРАЛУ (PONOVLJENO):

Ако уместо Декартових координата *x, y, z* уведемо нове промењиве *u,v,w* преко релација

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w),$$

где су $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ непрекидне и диференцијалне функције по *u, v, w* у области $\Omega' = \{(u, v, w)\}$, тада је

$$\begin{aligned} dx &= x_u du + x_v dv + x_w dw \\ dy &= y_u du + y_v dv + y_w dw, \qquad \text{тј.} \\ dz &= z_u du + z_v dv + z_w dw \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{bmatrix}$$

Квадратна матрица је матрица трансформације промењивих, а њена детерминанта је функционална и зове се Јакобијан

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}.$$

Коефицијент деформације тродимензионе области је $|J|$, па је

$d\omega = dxdydz = |J|\, dudvdw$, а уз претпоставку да је $J \neq 0$,

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz = \iiint_{\Omega^*} f^*(u, v, w)|J|\, dudvdw,$$

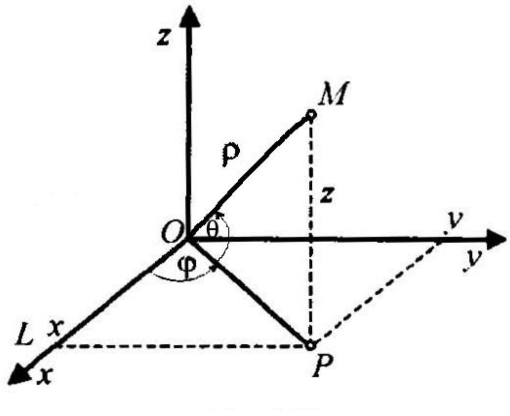
где је
$$f^*(u, v, w) = f\left[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)\right].$$

ТРОЈНИ ИНТЕГРАЛ У СФЕРНИМ КООРДИНАТАМА

Нека је дата раван α и у њој тачка *O* и полуоса *OL*. Положај произвољне тачке *M* у тродимензионом простору, чија је пројекција на дату раван тачка *P*, је једнозначно одређен растојањем $\rho = OM$, углом $\varphi = \angle(OL, OP)$ и углом $\theta = \angle(OP, OM)$, при чему је

$$0 \le \rho \le \infty, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi, \qquad -\pi/2 \le \theta \le \pi/2.$$

Кроз сваку тачку $M \neq O$ пролазе по три координатне површи: ρ = const (концентричне сфере са центром у *O*), φ =const (полуравни кроз тачку *O*, нормалне на дату раван α), θ =const (конуси с теменом *O*).



То су сферне координате тачке M, које су са Декартовим повезане релацијама

$$x = \rho\cos\theta\,\cos\varphi,\qquad y = \rho\cos\theta\,\sin\varphi,\qquad z = \rho\sin\theta,\ \text{тј.}$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x},\quad \theta = \arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Елемент запремине $d\omega$ се добија на основу ових веза, тако да је

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -\rho\cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta & 0 & \rho\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\rho \\ d\varphi \\ d\theta \end{bmatrix},$$

тј.

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -\rho\cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta & 0 & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho^2\cos\theta,$$

а $\quad d\omega = dxdydz = \rho^2\cos\theta\; d\rho\, d\varphi\, d\theta.$

Одавде се при трансформацији Декартових координата у сферне, код тројног интеграла, добија

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{\Omega^*} f^*(\rho,\varphi,\theta)\rho^2\cos\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta,$$

где је $f^*(\rho,\varphi,\theta) = f(\rho\cos\theta\cos\varphi, \rho\cos\theta\sin\varphi, \rho\sin\theta)$, а Ω и Ω^* су ознаке за област интеграције изражену преко координата x, y, z, односно ρ, φ, θ.

49. Примене двојног интеграла.

50. Примене тројног интеграла.

Неке примене двојног и тројног интеграла

1. **Запремина цилиндричног тела** којем је једна основа D у равни Oxy, а друга основа површ $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ (при чему $f(x, y)$ не мења знак у области D), а генератрисе омотача су паралелне оси Oz, дата је двојним интегралом

$$V = \iint_D f(x, y) d\sigma,$$

где је $d\sigma$ елемент површине области интеграције D.

2. **Површина** области D интеграције, је $S(D) = \iint_D d\sigma$.

3. **Запремина** тела Ω се изражава тројним интегралом $V(\Omega) = \iiint_\Omega dw$, где је dw елемент запремине тела Ω.

4. Ако се области D и Ω састоје од материјалних тачака и ако је у тим областима дефинисана густина $\delta(x, y)$, односно $\delta(x, y, z)$, као непрекидна функција координата тачке, тада је **маса** области D

$$M(D) = \iint_D \delta(x, y)\, d\delta,$$

а **маса** области Ω

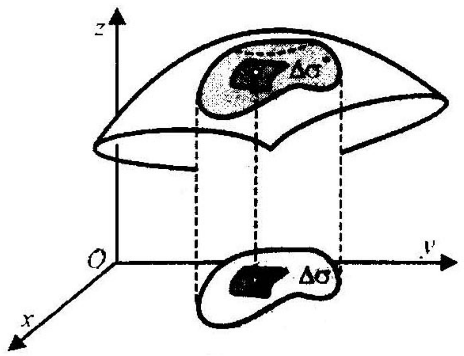
$$M(\Omega) = \iiint_\Omega \delta(x, y, z)\, dw.$$

5. **<u>Површина ограниченог дела површи.</u>** Нека је површ (S) дата једнозначном функцијом $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ (тј. праве паралелне оси Oz је секу највише у по једној тачки), која је диференцијабилна у области D, што значи да су њени парцијални изводи $z'_x = p$ и $z'_y = q$ непрекидни у области D.

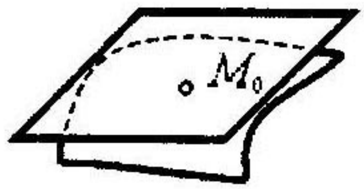
Одабраном мрежом поделимо област D на елементарне области $\Delta\sigma_k$ ($k = 1, ..., n$).Тиме ће површ (S) бити подељена на елементарне делове $\Delta\sigma_k^*$ ($k = 1, ..., n$). Сума

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta\sigma_k^*$$

представља површину S површи (S).



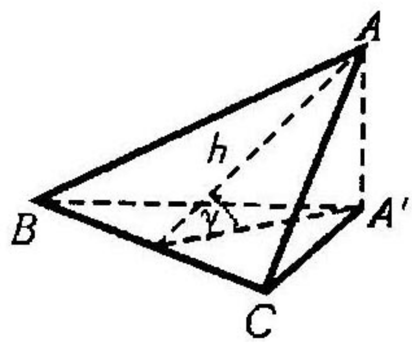
При рачунању те површине полазимо од тога да се мали елемент $\Delta\sigma_k^*$ произвољно мало разликује од одговарајућег елемента тангентне равни у једној од својих тачака M_0.



Тангентна раван у тачки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ површи (S) је

$$z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0) \quad (p = z'_x(x_0, y_0),\; q = z'_y(x_0, y_0)).$$

Нормални вектор те површи у тачки M_0 је $\boldsymbol{n} = \{-p, -q, 1\}$, а одговарајући јединични вектор $\boldsymbol{n}_0 = \operatorname{ort}\boldsymbol{n} = \dfrac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\{-p,-q,1\}$, тако да за угао γ нормале према оси Oz важи $\cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$.



Како је елемент $\Delta\sigma$ у равни Oxy пројекције елемента $\Delta\sigma^*$, да би смо нашли однос њихових површина, посматраћемо два троугла ABC и $A'BC$ са заједничком страницом $a = BC$, таква да је $A'BC$ пројекција троугла ABC на хоризонталну раван. Нека је $P^*(\Delta)$ површина троугла ABC, а $P(\Delta)$ површина троугла $A'BC$. Како је

$P^*(\Delta) = \frac{1}{2}ah$ и $P(\Delta) = \frac{1}{2}ah' = \frac{1}{2}ah\cos\gamma$, то је

$P^*(\Delta) = \frac{1}{\cos\gamma}P(\Delta)$.

На основу тога је површина елемента области (*S*):

$$\Delta\sigma^* = \frac{\Delta\sigma}{\cos\gamma} = \sqrt{1+p^2+q^2}\,\Delta\sigma,$$

а интегрална сума $$J_n = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+p^2+q^2}\,\Delta\sigma_k .$$

Одатле је тражена површина

$$S = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max d(\Delta\sigma_k)\to 0}} \sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+p^2+q^2}\,\Delta\sigma_k , \quad \text{тј.} \quad S = \iint_D \sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy$$

($p = z'_x, q = z'_y$).

51. Појам бесконачног бројног реда. Конвергенција реда.

Бројни редови

Дефиниција. Израз облика $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ или $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називамо бесконачним бројним редом; a_1, a_2, a_3, ... су чланови бесконачног реда; a_n је општи члан тог реда.

Дефиниција. Низом делимичних сума реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ назива се низ $\{s_n\}$ чији је општи члан $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $n = 1, 2, 3, \ldots$; s_n је (делимична) парцијална сума тог реда.

Дефиниција. Бесконачни ред $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ назива се конвергентним (дивергентним) ако конвергира (дивергира) низ његових делимичних сума $\{s_n\}$. Сума конвергентног реда је број

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k .$$

Ако је ред $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ конвергентан и има суму s, тада се пише $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Пример. Код реда који представља геометријску прогресију

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$$

n-та парцијална сума је $$s_n = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}.$$

1. Ако је $|q| < 1$, тада $q^n \to 0$ кад $n \to \infty$, па је

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}\right) = \frac{a}{1-q},$$

што значи да ред конвергира и има суму $s = \dfrac{a}{1-q}$.

2. Када је $|q| > 1$, тада $q^n \to \infty$ кад $n \to \infty$, а

$$\lim_{n\to\infty}|s_n| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a-aq^n}{1-q}\right| = \infty, \qquad \text{ред дивергира.}$$

3. За $q=-1$ ред гласи $a-a+a-a+\ldots$, тј. делимичне суме су

$$s_n = \begin{cases} 0, & n=2k, \quad k\in N \\ a, & n=2k-1, \ k\in N \end{cases}.$$

Како низ делимичних сума има две тачке нагомилавања, он дивергира, као и ред.

4. Ако је $q=1$ ред има облик $a+a+a+a+\ldots$, а $s_n = na$, што значи да је $s_n = \begin{cases} +\infty, & a>0 \\ -\infty, & a<0 \end{cases}$,

тј. ред дивергира.

Теорема. Ако је ред $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ конвергентан, тада његов општи члан $a_n \to 0$ кад $n\to\infty$.

Доказ. Ако ред конвергира, конвергира и његов низ делимичних сума, $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, па је

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = s - s = 0.$$

Пример 1. Ред $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$ је дивергентан, јер му општи члан тежи ка 1.

Пример 2. Хармонијски ред $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$ дивергира, мада његов општи члан $a_n = \frac{1}{n} \to 0 \ (n\to\infty)$. (Доказ у уџбенику)

ОПЕРАЦИЈЕ СА РЕДОВИМА

Теорема 1. Ако је ред $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ конвергентан и има суму s, тада је конвергентан и ред $\sum_{k=0}^{\infty} c\cdot a_k$, $c \in R$, и им а суму $c\cdot s$.

Теорема 2. Ако су редови $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ конвергентни и имају суму s, односно t, конвергентан је и ред $\sum_{k=0}^{\infty} a_k + b_k$ и има суму $s \pm t$.

КОШИЈЕВ КРИТЕРИЈУМ КОНВЕРГЕНЦИЈЕ

Теорема. Ред $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ конвергира, тада и само тада ако за свако произвољно мало позитивно ε постоји такав број $N(\varepsilon)$ тако да $\forall n > m > N(\varepsilon)$ $\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon$.

Доказ. На основу Кошијевог критеријума конвергенције за низ делимичних сума.

52. Редови са ненегативним члановима. Критеријуми упоређивања.

Редови са позитивним члановима

Теорема 1. Ред са позитивним члановима може само конвергирати или дивергирати према $+\infty$. Такав ред је конвергентан тада и само тада ако су његове делимичне суме ограничене.

Теорема 2. Ако је ред $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ са позитивним члановима конвергентан, тада је и ред $\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k c_k$ такође конвергентан, ако су коефицијенти γ_k позитивни и ограничени.

Теорема 3. Ако је ред $\sum_{k=0}^{\infty} d_k$ са позитивним члановима дивергентан, тада је у случају да бројеви δ_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, имају позитивно доње ограничење δ, дивергентан и ред $\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k d_k$.

КРИТЕРИЈУМИ УПОРЕЂИВАЊА

Теорема 1. (Критеријум упоређивања прве врсте) Нека је ред $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ конвергентан, а ред $\sum_{k=0}^{\infty} d_k$ дивергентан и нека су оба, редови са позитивним члановима. Ако чланови неког датог реда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ са позитивним члановима задовољавају услов $a_n \leq c_n$, за све $n > m$ ($m \in N$), тада је ред $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ конвергентан. Ако $a_n \geq d_n$ за све $n > m$ ($m \in N$), тада је ред $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ дивергентан.

Теорема 2. (Критеријум упоређивања друге врсте) Нека је ред $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ конвергентан, а ред $\sum_{k=0}^{\infty} d_k$ дивергентан и нека су оба, редови са позитивним члановима. Ако за чланове реда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ с позитивним члановима за $\forall n \geq m$ ($m \in N$), важи $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{c_{n+1}}{c_n}$, тада је ред $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ конвергентан; ако је за $\forall n \geq m$ ($m \in N$), $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{d_{n+1}}{d_n}$, тада је ред $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ дивергентан.

Теорема 3. (Даламберов (количнички) критеријум упоређивања) Ако је за $\forall n$, $a_n > 0$, и почев од неког индекса n_0 , $\forall n > n_0$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1$, тада је ред $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ конвергентан. Ако је почевод n_1 , $\forall n > n_1$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$, тада је ред $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ дивергентан.

Теорема 4. (Кошијев (корени) критеријум упоређивања) Ако је за $\forall n$, $a_n > 0$, и почев од неког индекса n_0 , $\forall n > n_0$, $a_n \le q^n$, $(0 < q < 1)$, тј. $\sqrt[n]{a_n} \le q < 1$,

тада је ред $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ конвергентан. Супротно, ако је почевод n_1 , $\forall n > n_1$, $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$, тада је ред $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ дивергентан.

53. Алтернативни редови. Лајбницов критеријум конвергенције.

Дефиниција. Алтернативним редовима се називају редови облика

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k, \quad a_k > 0, \quad \forall k \in N,$$

где је $\{a_k\}$ монотоно опадајући низ позитивних бројева.

Алтернативни ред $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots$, у којем чланови $a_k > 0$ монотоно опадају ($a_k > a_{k+1}$, $\forall k = 0, 1, 2, \ldots$) и теже нули, назива се Лајбницовим редом.

Теорема. (Лајбницов критеријум) Лајбницов ред конвергира и његова сума $s < a_0$.

Доказ. За Лајбницов ред, делимична сума са непарним индексом $2n + 1$ је једнака

$$s_{2n+1} = a_0 - (a_1 - a_2) - (a_3 - a_4) - \ldots - (a_{2n-1} - a_{2n}) - a_{2n+1},$$

што значи да је је $s_{2n+1} < a_0, \ n \in N$. С друге стране,

$$s_{2n+1} = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_{2n} - a_{2n+1}),$$

из чега следи да монотоно неопада. Зато постоји гранична вредност, за коју важи

$$a_0 - a_1 < \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = s < a_0.$$

За парне чланове низа делимичних сума важи

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty}(s_{2n+1} - a_{2n+1}) = s$$

чиме је доказан Лајбницов критеријум конвергенције.

Теорема. Ред $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ је конвергентан ако конвергира одговарајући ред са позитивним члановима $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$. При томе, ако је $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$ и $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k| = S$,тада је $|s| \le S$.

Дефиниција. За конвергентан ред $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ кажемо да је апсолутно конвергентан, ако конвергира и ред $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$. У супротном, када ред $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ дивергира, за конвергентан ред $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ кажемо да условно конвергира.

54. Интегрални критеријум конвергенције бројног реда.

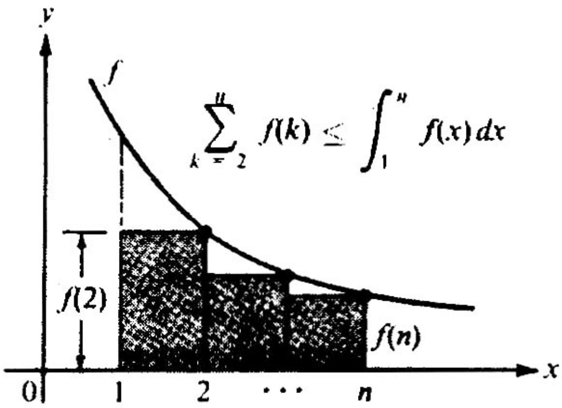
Интегрални критеријум

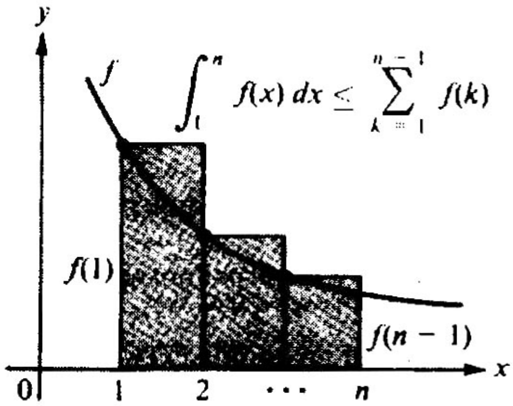
Теорема. Ако је $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дати ред са позитивним монотоно опадајућим члановима, а $f(x)$ за $x \geq 1$ непрекидна позитивна монотоно опадајућа функција таква да је $\forall n$, $f(n) = a_n$, тада ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира ако и само ако несвојствени интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ постоји (конвергира).

Ако интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ не постоји, тада је ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергентан.

Доказ. Како је $f(x)$ опадајућа функција, важи

$$f(2) + f(3) + \ldots + f(n) \leq \int_1^n f(x)dx \leq f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1).$$





Ако интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ постоји, означимо га са J. Тада је $\int_1^n f(x)dx \leq J$, па ред $\sum_{n=2}^{\infty} f(n)$ има ограничне делимичне суме и према томе, конвергира, из чега следи конвергенција реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Обрнуто, ако је ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергентан и има суму s, тада је $\int_1^n f(x)dx \leq s$, па конвергира интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

55. Степени редови. Радијус конвергенције степеног реда.

Степени редови

Дефиниција. Ако је низ функција $\{f_k(x)\}$ дефинисан на неком скупу M тачака осе Ox, тада се израз $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ назива функционалним редом. Функције $f_k(x)$, $k = 0,1,2, \ldots$ су чланови тог реда, а сума

$F_n = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ је n-та делимична сума.

Дефиниција. Ако низ делимичних сума $\{F_n(x)\}$ конвергира на неком скупу M тачака осе Ox ка $F(x)$, тада се каже да и ред $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ конвергира на том скупу и да има суму $F(x)$.

Дефиниција. Ред облика $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ назива се степеним редом.

Бројеви a_k, $k = 0,1,2, \ldots$ су коефицијенти степеног реда, а x_0 је дата тачка развитка степеног реда.

Посебно ако је $x_0 = 0$, степени ред има облик $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

Дефиниција. Скуп тачака осе Ox на којем степени ред конвергира зове се интервал конвергенције степеног реда.

Теорема. (Абелова) Ако је степени ред $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ конвергентан у тачки $x_1 \neq x_0$, тада је конвергентан и у свакој тачки x у којој је $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$.

Дефиниција. Радијус конвергенције степеног реда представља број $r = \sup |x - x_0|$, где x узима све вредности на скупу тачака на којима ред $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ конвергира.

Разликују се три случаја радијуса конвергенције степеног реда:

1. Степени ред конвергира у свакој тачки осе Ox. Тада је радијус конвергенције бесконачно велики ($r = \infty$).

2. Степени ред конвергира у некој тачки $x \neq x_0$ (где је x_0 тачка развитка степеног реда), али не конвергира у свим тачкама осе Ox. У том случају радијус конвергенције реда је позитиван број r ($0 < r < +\infty$).
3. Степени ред конвергира само у тачки развитка x_0: радијус конвергенције је тада једнак 0 ($r = 0$).

Ако су коефицијенти степеног реда $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, онда се може показати да, унутар интервала конвергенције, важи

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n .$$

Ово је Тејлоров ред. Слично, Маклоренов ред је $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.