МАТЕМАТИКА 2

Други писмени колоквијум, 11.6.2012

Група 1

Решења задатака и резултати

Драган Ђорић

Задаци и решења

1. *a*) Израчунати $\int \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx$.

b) Испитати конвергенцију интеграла $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx$.

Решење: *a*) Дати интеграл I се лако решава парцијалном интеграцијом. Ако је $u=\sqrt{x}$ и $dv=\frac{dx}{(1+x)^2}$, тада је $du=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$ и $v=-\frac{1}{1+x}$, па је

$$I=-\frac{\sqrt{x}}{1+x}+\int \frac{1}{1+x}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{x}}=-\frac{\sqrt{x}}{1+x}+\int\frac{d(\sqrt{x})}{1+(\sqrt{x})^2}=-\frac{\sqrt{x}}{1+x}+\arctan\sqrt{x}+C.$$

Напомена. Ако се користи смена $\sqrt{x}=t$, добија се $I=2\int\frac{t^2dt}{(1+t^2)^2}$, па се опет може применити парцијална интеграција са $u=t$, $dv=\frac{2tdt}{(1+t^2)^2}$. У решењима студената наставак је био следећи:

$$I=2\int\frac{t^2dt}{(1+t^2)^2}=2\int\frac{dt}{1+t^2}-2\int\frac{dt}{(1+t^2)^2}=2\cdot\arctan t-2J,$$

где се интеграл J налазио применом парцијалне интеграције на интеграл $\int\frac{dt}{1+t^2}$. Интеграл J може да се добије и сменом $t=\tan s$.

Дати интеграл I може да се добије и без парцијалне интеграције уколико се интегранд f погодно трансформише. Како је

$$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{2x}{(1+x)^2}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1+x+x-1}{(1+x)^2}=\frac{d(\sqrt{x})}{1+(\sqrt{x})^2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{x+1-2x}{(1+x)^2}=\frac{d(\sqrt{x})}{1+(\sqrt{x})^2}-d\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right),$$

то је $I=\arctan x-\frac{\sqrt{x}}{1+x}+C$.

b) Пошто је интегранд f непрекидна и позитивна функција на $[1,+\infty)$ за коју важи $f(x)\sim\frac{1}{x^{3/2}}$ када $x\to+\infty$ и пошто интеграл $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{3/2}}$ конвергира, то значи да и дати несвојствени интеграл конвергира. Овде је коришћена теорема (са предавања) о еквиконвергентности интеграла чији су интегранди еквивалентне функција када $x\to+\infty$.

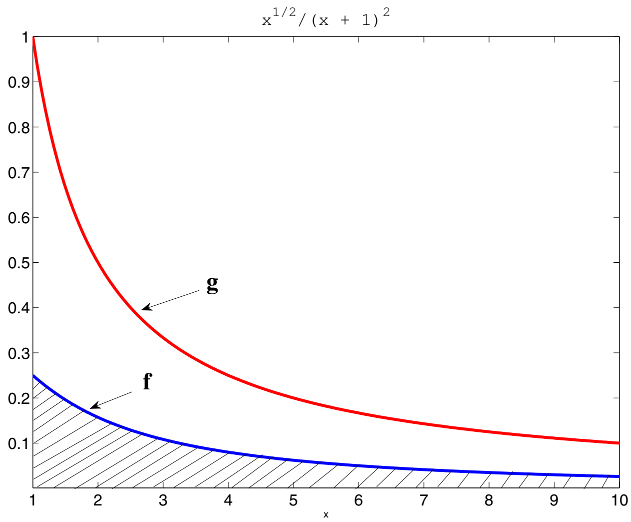
Напомена. Конвергентност датог несвојственог интеграла следи и из чињенице да важи

$$F(x)=\arctan\sqrt{x}-\frac{\sqrt{x}}{x+1}\to\frac{\pi}{2},\quad x\to+\infty.$$

Дати интеграл може и да се израчуна (мада се не тражи),

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx=F(+\infty)-F(1)=\frac{\pi}{2}-\arctan 1+\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$$

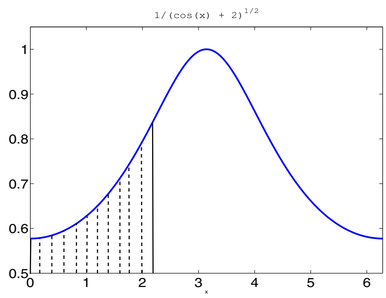
и он представља површину између графика интегранда и x-осе на интервалу $[1,+\infty)$ (Сл.1). Обзиром да интеграл функције $g:x\mapsto 1/x$ на истом интервалу дивергира, површина између графика функције g и x-осе је 'бесконачна', као и површина између графика функција f и g.



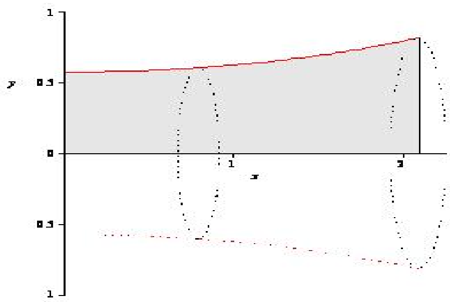
Сл 1: Графици функција f и g

2. Израчунати запремину тела насталог ротацијом око x-осе фигуре ограничене линијама: $y=0,\ x=0,\ x=\dfrac{2\pi}{3},\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2+\cos x}}$.

Решење: Фигура ограничена датим линијама је криволинијски трапез (Сл.2) који ротира око x-осе (Сл.3).



Сл 2: Фигура ограничена датим линијама



Сл 3: Фигура ротира око x-осе

На основу формуле за запремину ротационог тела имамо да је

$$V=\pi\int_0^{2\pi/3} y^2(x)dx=\pi\int_0^{2\pi/3}\frac{dx}{2+\cos x}.$$

Сменом $\tan\dfrac{x}{2}=t$ добијамо да је $dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$ и $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, па је

$$\int\frac{dx}{2+\cos x}=2\int\frac{dt}{3+t^2}=\frac{2}{\sqrt3}\arctan\frac{t}{\sqrt3}=\frac{2}{\sqrt3}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt3}\cdot\tan\frac{x}{2}\right)+C=F(x)+C.$$

Према томе, $V=\pi(F(2\pi/3)-F(0))=\dfrac{2\pi}{\sqrt3}(\pi/4-0)=\dfrac{\pi^2}{2\sqrt3}$.

Напомена. Наравно, може и смена у одређеном интегралу,

$$V=\pi\int_0^{2\pi/3}\frac{dx}{2+\cos x}=2\pi\int_0^{\sqrt3}\frac{dt}{3+t^2}=\frac{2\pi}{\sqrt3}\arctan\frac{t}{\sqrt3}\Big|_0^{\sqrt3}=\frac{\pi^2}{2\sqrt3}.$$

Ако интегранд трансформишемо,

$$\frac{1}{2+\cos x}=\frac{2-\cos x}{4-\cos^2 x}=\frac{2-\cos x}{3+\sin^2 x}=\frac{2}{3+\sin^2 x}-\frac{\cos x}{3+\sin^2 x},$$

тада имамо да је

$$\int\frac{dx}{2+\cos x}=\int\frac{2dx}{3+\sin^2 x}-\int\frac{\cos x dx}{3+\sin^2 x}=K-L.$$

Интеграле K и L лако налазимо (први сменом $\tan x=t$, а други сменом $\sin x=t$)

$$K=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan x}{\sqrt{3}}+C_1=G(x)+C_1,\quad L=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\sin x}{\sqrt{3}}+C_2=H(x)+C_2.$$

Према томе, $G(x)-H(x)$ је такође примитивна функција за функцију $x\mapsto\dfrac{1}{2+\cos x}$. Како се примитивне функције разликују за константу, то је $G(x)-H(x)=F(x)+C$. Заменом $x=0$ добијамо да је $C=0$, што значи да је $G(x)=H(x)+F(x)$, односно важи једнакост

$$\arctan\frac{2\tan x}{\sqrt{3}}=\arctan\frac{\sin x}{\sqrt{3}}+2\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\tan\frac{x}{2}\right).$$

Специјално, за $x=\pi/3$ имамо једнакост

$$\arctan 2=\arctan\frac{1}{2}+2\arctan\frac{1}{3}.$$

3. Израчунати

$$\iint_D\frac{\ln(x^2-2xy+y^2+1)}{2x+3y+2}dxdy,$$

где је $D=\{(x,y)\ :\ y\le x\le y+1,\ 0\le 2x+3y\le 2\}$.

Решење: Трансформацијом $u=y-x$, $v=2x+3y$ област интеграције D пресликава се у правоугаоник $G:[-1,0]\times[0,2]$, при чему је Јакобијан једнак $-1/5$. Према томе,

$$\begin{aligned}\iint_D\frac{\ln(x^2-2xy+y^2+1)}{2x+3y+2}dxdy &= \frac{1}{5}\iint_G\frac{\ln(1+u^2)}{v+2}dudv\\ &= \frac{1}{5}\int_{-1}^{0}\ln(1+u^2)du\cdot\int_0^2\frac{dv}{v+2}\\ &= \frac{1}{5}\cdot A(x)\Big|_{-1}^{0}\cdot B(x)\Big|_0^2,\end{aligned}$$

где су A и B примитивне функције за $\displaystyle\int\ln(x^2+1)dx$ и $\displaystyle\int\frac{dx}{x+2}$. За први интеграл парцијалном интеграцијом ($u=\ln(1+x^2)$, $dv=dx$) добијамо

$$A(x)=x\ln(1+x^2)-2\int\frac{x^2}{x^2+1}dx=x(\ln(x^2+1)-2)+2\cdot\arctan x,$$

а други интеграл је таблични, $B(x)=\ln|x+2|$.

Према томе,

$$\iint_D\frac{\ln(x^2-2xy+y^2+1)}{2x+3y+2}dxdy=\frac{1}{5}\cdot(A(0)-A(-1))\cdot(B(2)-B(1))=\frac{1}{5}\left(\frac{\pi}{2}+\ln 2-2\right)\ln 2.$$

Напомена. За трансформацију $u = x-y$, $v = 2x+3y$ нова област интеграције је $[0,1]\times[0,2]$, Јакобијан је једнак $1/5$, а све остало је исто. За налажење Јакобијана не мора се решавати по x и y јер је, на пример у овом случају,

$$\frac{1}{J} = \frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5.$$

БИСЕРИ

У радовима је и овога пута било доста 'бисера'. Неки су већ виђени, али има и нових.

- $$\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} = \frac{A}{1+x} + \frac{Bx+C}{(1+x)^2}.$$
- $$x^{1/2} + x^{3/2} = x^2.$$
- $$\int x^2 \cdot \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{x^3}{3} \cdot \arctan x.$$
- $$\int \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx = \int \sqrt{x}dx \cdot \int \frac{dx}{(1+x)^2}.$$
- $$\int \frac{dx}{2+\cos x} = \int \frac{dx}{2} + \int \frac{dx}{\cos x}.$$
- $$\frac{t^{\cancel{2}}}{(1+t^2)^{\cancel{2}}} = \frac{t}{1+t^2}.$$