МАТЕМАТИКА 2

Други колоквијум (5.6.2010) - Група 2

1. a) Израчунати $\displaystyle\int \frac{\arctan\frac{x}{2}}{(x-2)^2}dx$.

b) Израчунати $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{\arctan\frac{x}{2}}{(x-2)^2}dx$ или установити његову дивергенцију.

Решење: a) Дати интеграл се лако решава парцијалном интеграцијом. Ако је

$$u = \arctan\frac{x}{2}, \quad dv = \frac{dx}{(x-2)^2},$$

тада је

$$du = \frac{2dx}{x^2+4}, \quad v = -\frac{1}{x-2},$$

па је

$$I = \int \frac{\arctan\frac{x}{2}}{(x-2)^2}dx = -\frac{\arctan\frac{x}{2}}{x-2} + 2J, \quad J = \int \frac{dx}{(x-2)(x^2+4)}.$$

Како је

$$\frac{1}{(x-2)(x^2+4)} = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x-2} - \frac{1}{8}\cdot\frac{x}{x^2+4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^2+4},$$

то је

$$I = -\frac{\arctan\frac{x}{2}}{x-2} + \frac{1}{4}\ln\frac{|x-2|}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{1}{4}\arctan\frac{x}{2} + C = F(x) + C.$$

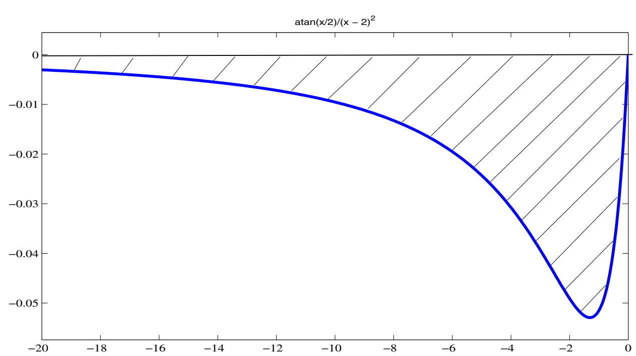

Figure 1: Grafik integranda

b) Из

$$\lim_{x\to-\infty}(\ln|x-2| - \ln\sqrt{x^2+4} = \lim_{x\to-\infty}\ln\frac{|x-2|}{\sqrt{x^2+4}} = \ln 1 = 0$$

имамо

$$F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty}F(x) = 0 + \frac{1}{4}\cdot 0 - \frac{1}{4}\cdot\frac{-\pi}{2} = \frac{\pi}{8}.$$

Према томе, дати интеграл постоји (конвергира),

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\arctan\frac{x}{2}}{(x-2)^2}dx = F(0) - F(-\infty) = 0 - \frac{\pi}{8} = -\frac{\pi}{8}.$$

Апсолутна вредност овог интеграла представља површину између графика интегранда и x-осе на интервалу $(-\infty, 0]$ (Слика 1).

2. Израчунати запремину тела насталог ротацијом око x-осе фигуре ограничене линијама: $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $y = \sqrt{\arcsin \frac{1}{x}}$.

Решење: Фигура ограничена датим линијама је криволинијски трапез (Слика 2).

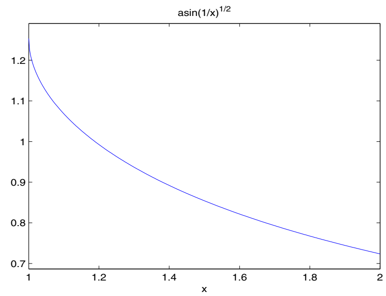

Figure 2: Figura koja rotira oko x-ose

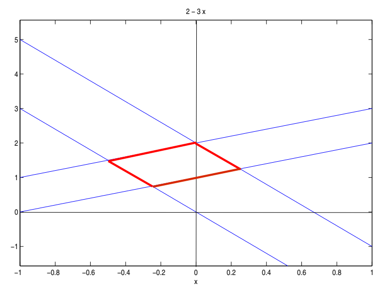

Figure 3: Oblast integracije

На основу формуле за запремину ротационог тела имамо $V = \pi \int_1^2 \arcsin \frac{1}{x} dx = \pi \cdot I$. Интеграл I налазимо парцијалном интеграцијом: $u = \arcsin \frac{1}{x}$, $dx = dv$, при чему је

$$du = \frac{1}{\sqrt{1 - 1/x^2}} \cdot \frac{-dx}{x^2} = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}, \quad v = x.$$

$$\begin{aligned} I &= x \cdot \arcsin \frac{1}{x} \Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} \\ &= 2 \arcsin \frac{1}{2} - \arcsin 1 + \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \Big|_1^2 \\ &= 2 \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} + \ln(2 + \sqrt{3}) - \ln 1 \\ &= \frac{\pi}{6} + \ln(2 + \sqrt{3}). \end{aligned}$$

Према томе, $V = -\frac{\pi^2}{6} + \pi \cdot \ln(2 + \sqrt{3})$.

3. Израчунати $\iint_D (x^2 - 2xy + y^2) e^{x+3y} dxdy$, где је D паралелограм ограничен правама $y = x + 1$, $y = x + 2$, $y = -3x$ и $y = -3x + 2$.

Решење: Трансформацијом $u = y - x$, $v = y + 3x$ област интеграције D (Слика 3, црвени паралелограм) пресликава се у правоугаоник $G : [1, 2] \times [0, 2]$, при чему је Јакобијан једнак $-1/4$. Према томе,

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 - 2xy + y^2) e^{x+3y} dxdy &= \frac{1}{4} \iint_G u^2 e^v dudv \\ &= \frac{1}{4} \int_1^2 u^2 du \cdot \int_0^2 e^v dv \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{u^3}{3} \Big|_1^2 \cdot e^v \Big|_0^2 \\ &= \frac{7}{12}(e^2 - 1). \end{aligned}$$

Коментар. 1. У првом задатку је било проблема са налажењем извода за $\arctan \frac{x}{2}$ и са налажењем граничне вредности типа $'\infty - \infty'$

$$\lim_{x \to -\infty} (\ln |x-2| - \ln \sqrt{x^2+4}).$$

Осим тога, у неким радовима су увођене разне 'ситне' и непотребне смене типа $\frac{x}{2} = t$ или $x - 2 = t$ (или чак обе), што је правило већи штету него корист.

2. У другом задатку највећи проблем је био налажење извода за $\arcsin \frac{1}{x}$. Дакле, и у првом и у другом задатку дошло је до изражаја знање из математике 1 (заслуга за то припада и кандидатима и наставницима).

3. Као и увек, и овог пута је било неколико кандидата који су покушали (али нису успели) да дати интеграл реше преко Декартових координата и области D (делећи је на три дела).

Драган Ђорић