МАТЕМАТИКА 2

Септембар, 2011 - Група 4

1. Одредити све локалне екстремуме функције $f : (x,y) \mapsto z$ задате са

$$z^3 + z^2 y - x^2 - y^2 + 4x - 4 = 0, \quad z \neq 0.$$

Решење: Диференцирањем по x дате једнакости имамо

$$3z^2 \cdot z'_x + 2zy \cdot z'_x - 2x + 4 = 0, \tag{1}$$

одакле добијамо

$$z'_x = \frac{2x-4}{3z^2+2zy}.$$

Слично, диференцирањем дате једнакости по y имамо

$$3z^2 \cdot z'_y + 2zy \cdot z'_y + z^2 - 2y = 0, \tag{2}$$

одакле добијамо

$$z'_y = \frac{2y - z^2}{3z^2+2zy}.$$

Стационарне тачке налазимо решавањем система

$$F(x,y,z) = 0, \quad z'_x = 0, \quad z'_y = 0,$$

где је

$$F(x,y,z) = z^3 + z^2 y - x^2 - y^2 + 4x - 4.$$

Из $z'_x = 0$ и $z'_y = 0$ следи да је $x = 2$ и $z^2 = 2y$. Заменом y са $z^2/2$ и x са 2 у $F(x,y,z) = 0$ добијамо да је $z = -4$. Према томе, једина стационарна тачка функције f је тачка $A(2,8)$, при чему је $z(A) = -4$.

Сада треба проверити да ли је у тачки A локални екстремум функције f.

Диференцирањем једнакости (1) по x, односно по y добијамо

$$6zz'_x z'_x + 3z^2 z''_{x^2} + 2yz'_x z'_x + 2zyz''_{x^2} - 2 = 0,$$

$$6zz'_y z'_x + 3z^2 z''_{xy} + 2yz'_y z'_x + 2zz'_x = 0,$$

а диференцирањем једнакости (2) по y добијамо

$$6zz'_y z'_y + 3z^2 z''_{y^2} + 2yz'_y z'_y + 2zyz''_{y^2} + 2zz'_y + 2zz'_y - 2 = 0.$$

Из ових једнакости (узимајући у обзир да је $z'_x(A) = z'_y(A) = 0$) налазимо да је

$$a = z''_{x^2}(A) = -\frac{1}{8}, \quad b = z''_{xy}(A) = 0, \quad c = z''_{y^2}(A) = -\frac{1}{8}.$$

Како је $ac - b^2 = \dfrac{1}{64} > 0$ и $a < 0$, у тачки A је локални максимум, $f_{\max} = f(A) = -4$.

2. Одредити најмању и највећу вредност функције $f : (x,y) \mapsto x^2 + y^2 + y$ на области $\mathcal{D} = \{(x,y) \ : \ x^2 - 2 \leq y \leq 2\}$.

Решење: Из $f'_x = 0$ и $f'_y = 0$ добијамо тачку $A(0,-1/2)$ која припада датој области $\mathcal{D}$.

Границу области $\mathcal{D}$ чине део праве $y = 2$ и део параболе $y = x^2 - 2$.

1. За $y = 2$ је $f(x,2) = x^2 + 6$, што значи да треба узети у разматрање тачку $B(0,2)$, као и граничне тачке (са параболом $y = x^2 - 2$) $C(-2,2)$ и $D(2,2)$.

2. За $y = x^2 - 2$ је

$$g(x) = f(x, x^2 - 2) = x^4 - 2x^2 + 2, \quad g'(y) = 4x(x-1)(x+1),$$

па у разматрање треба узети и тачке $E(0,-2)$, $F(-1,-1)$ и $G(1,-1)$.

Упоређивањем вредности функције f у тачкама A, B, C, D, E, F и G видимо да је

$$\max_{\mathcal{D}} f = f(C) = f(D) = 10, \quad \min_{\mathcal{D}} f = f(A) = -\frac{1}{4}.$$

3. Израчунати $\displaystyle\int \frac{1}{(x+2)^3} \cdot \arctan\frac{x}{2}\, dx.$

Решење: Означимо дати интеграл са I. Применом парцијалне интеграције у којој бирамо $u = \arctan\dfrac{x}{2}$ и $dv = \dfrac{dx}{(x+2)^3}$ имамо да је

$$du = \frac{2dx}{x^2+4}, \quad v = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x+2)^2}, \quad I = uv - J$$

где је

$$J = \int \frac{dx}{(x+2)^2(x^2+4)}.$$

Из једнакости

$$\frac{1}{(x+2)^2(x^2+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

следи да је

$$1 = A(x+2)(x^2+4) + B(x^2+4) + (Cx+D)(x+2)^2.$$

За $x = -2$ добијамо $B = 1/8$, а за $x = 2i$ добијамо $C = -1/16$ и $D = 0$. Заменом ових вредности у једнакости $1 = 8A + 4B + 4D$ (коју добијамо за $x = 0$) налазимо да је $A = 1/16$, па је

$$\begin{aligned}
J &= \frac{1}{16}\int\frac{dx}{x+2} + \frac{1}{8}\int\frac{dx}{(x+2)^2} - \frac{1}{16}\int\frac{xdx}{x^2+4} \\
&= \frac{1}{16}\ln|x+2| - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x+2} - \frac{1}{32}\cdot\ln(x^2+4) + K \\
&= \frac{1}{32}\ln\frac{(x+2)^2}{x^2+4} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x+2} + K.
\end{aligned}$$

Према томе,

$$I = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x+2)^2}\cdot\arctan\frac{x}{2} + \frac{1}{32}\ln\frac{(x+2)^2}{x^2+4} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x+2} + K,$$

где је K реалан број.

4. Израчунати

$$\iint_D (x^2 - 4y^2)e^{x^2-4xy+4y^2}\, dxdy$$

ако је D област ограничена правама: $x - 2y = 0$, $x - 2y - 1 = 0$, $x + 2y - 1 = 0$ и $x + 2y - 2 = 0$.

Решење: Сменом $x - 2y = u$, $x + 2y = v$ добијамо

$$I = \iint_D (x^2 - 4y^2)e^{x^2-4xy+4y^2}\, dxdy = \iint_G uve^{u^2}\,|J|\,dudv,$$

где је $G = [0,1] \times [1,2]$ и $J = 1/4$. Дакле,

$$I = \frac{1}{4}\int_1^2 v dv \cdot \int_0^1 u e^{u^2} du = \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{2} \cdot \int_0^1 2u e^{u^2} du = \frac{3}{16} \cdot e^{u^2} \Big|_0^1 = \frac{3}{16}(e-1).$$

Драган Ђорић

Ево и неколико 'бисера' из радова ове групе задатака.

$$\arctan\frac{x}{2} = \frac{1}{2} \cdot \arctan x, \qquad 2x = 0 \implies x = 2$$

$$\frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}, \qquad 2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$$