МАТЕМАТИКА 2

Септембар, 2010 - Група 2

1. Одредити све локалне екстремуме функције

$$f : (x, y) \mapsto x \ln(9x^2 + y^2) - 2x$$

за које је $x \neq 0$.

Решење: Диференцирањем функције f по x и y добијамо

$$f'_x = \ln(9x^2 + y^2) + \frac{18x^2}{9x^2 + y^2}, \quad f'_y = \frac{2xy}{9x^2 + y^2}.$$

Из система $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, уз услов $x \neq 0$, налазимо да функција f има две стационарне тачке: $A(1/3, 0)$ и $B(-1/3, 0)$. Треба проверити да ли је у тим тачкама заиста локални екстремум.

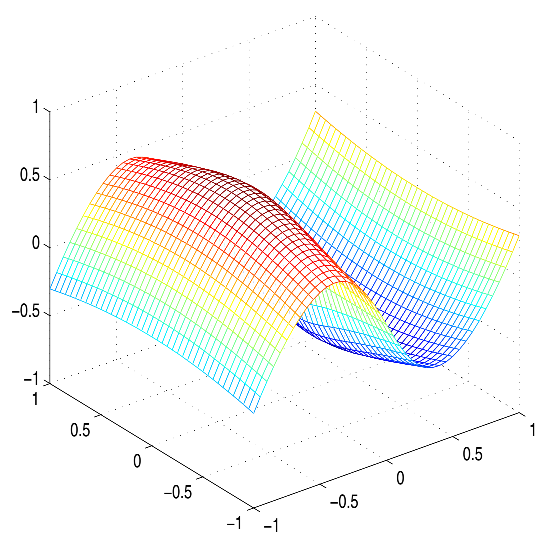
Како је

$$\begin{aligned} f''_{x^2} &= \frac{54x}{9x^2 + y^2} - \frac{324x^3}{(9x^2 + y^2)^2} = 54x \frac{3x^2 + y^2}{(9x62 + y^2)^2}, \\ f''_{xy} &= \frac{2y}{9x^2 + y^2} - \frac{36x^2 y}{(9x^2 + y^2)^2} = -2y \frac{9x^2 - y^2}{(9x^2 + y^2)^2}, \\ f''_{y^2} &= \frac{2x}{9x^2 + y^2} - \frac{4xy^2}{(9x^2 + y^2)^2} = 2x \frac{9x^2 - y^2}{(9x^2 + y^2)^2}, \end{aligned}$$

то је

$$f''_{x^2}(x, 0) = \frac{2}{x}, \quad f''_{xy}(x, 0) = 0, \quad f''_{y^2}(x, 0) = \frac{2}{9x}.$$

За $x = 1/3$ добијамо да је $f''_{x^2}(A) = 6$ и $f''_{y^2}(A) = 2/3$, а за $x = -1/3$ је $f''_{x^2}(A) = -6$ и $f''_{y^2}(A) = -2/3$. Према томе, $d^2 f(A) > 0$ и $d^2 f(B) < 0$ за $dx^2 + dy^2 > 0$, па функција f у тачки A има локлани минимум (једнак $-2/3$), а у тачки B локални максимум (једнак $2/3$.



Слика 1: График функције f

2. Одредити локалне екстремуме функције $f : (x,y) \mapsto x - 2y$ (за $y > 0$) при услову $x^2 + 3y^2 - 21 = 0$.

Решење: Нека је

$$F(x,y,\lambda) = x - 2y + \lambda(x^2 + 3y^2 - 21), \quad \varphi(x,y) = x^2 + 3y^2 - 21.$$

Из једнакости $F'_x = 0$, $F'_y = 0$, $\varphi = 0$ (уз услов $y > 0$) добијамо само једну стационарну тачку $A^*(-3,2,1/6)$ функције F. Како је $F''_{x^2} = 2\lambda$, $F''_{xy} = 0$ и $F''_{y^2} = 6\lambda$, то је $d^2F(A^*) > 0$ за $|dx| + |dy| \neq 0$. Према томе, функција f у тачки $A(-3,2)$ има условни локални минимум (једнак -7).

3. Нека је крива s график функције $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{4}(2\ln x - 1) - \dfrac{1}{4}\ln(\ln x)$. Израчунати дужину лука криве s за $x \in [e, e^2]$.

Решење: Пошто је

$$f'(x) = x\ln x - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x\ln x}, \quad 1 + f'^2 = \left(x\ln x + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x\ln x}\right)^2,$$

то је

$$l = \int_e^{e^2} \sqrt{1 + f'^2}\, dx = \int_e^{e^2} x\ln x dx + \frac{1}{4}\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}.$$

Из једнакости

$$\int x\ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C, \quad \int \frac{dx}{x\ln x} = \ln|\ln x| + D$$

налазимо да је $l = \dfrac{1}{4}(3e^4 - e^2 + \ln 2)$.

4. Израчунати

$$I = \iint_D \frac{dxdy}{\left(\sqrt{x^2+y^2} - 1\right)(x^2 + y^2 - 1)},$$

ако је $D = \left\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq \dfrac{1}{4}\right\}$.

Решење: Сменом $x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad (\rho,\varphi) \in G = [0,1/2] \times [-\pi/2, \pi/2]$ имамо

$$I = \iint_G \frac{\rho d\rho d\varphi}{(\rho - 1)(\rho^2 - 1)} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \underbrace{\int_0^{1/2} \frac{\rho d\rho}{(\rho-1)^2(\rho+1)}}_{K} = \pi K.$$

Како је

$$\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1} + C,$$

лако добијамо да је $J = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}\ln 3$, односно $I = \dfrac{\pi}{2}\left(1 - \dfrac{1}{2}\ln 3\right)$.

Драган Ђорић