МАТЕМАТИКА 2

Октобар, 2010 - Група 2

1. Одредити све локалне екстремуме функције

$$f : (x, y) \mapsto (y^2 - 3x^2)e^{x+y}.$$

Решење: Нека је $g(x, y) = e^{x+y}$ и нека је $a = f''_{x^2}$, $b = f''_{xy}$ и $c = f''_{y^2}$. Диференцирањем функције f по x и y добијамо

$$f'_x = (y^2 - 3x^2 - 6x)g, \quad f'_y = (y^2 - 3x^2 + 2y)g.$$

Из система $f'_x = 0$, $f'_y = 0$ налазимо да функција f има две стационарне тачке: $A(0, 0)$ и $B(1, -3)$. Треба проверити да ли је у тим тачкама заиста локални екстремум.

Како је

$$\begin{aligned}
f''_{x^2} &= (-6x - 6)g + (y^2 - 3x^2 - 6x)g = (y^2 - 3x^2 - 12x - 6)g, \\
f''_{xy} &= 2yg + (y^2 - 3x^2 - 6x)g = (y^2 - 3x^2 - 6x + 2y)g, \\
f''_{y^2} &= (2y + 2)g + (y^2 - 3x^2 + 2y)g = (y^2 - 3x^2 + 4y + 2)g,
\end{aligned}$$

то је

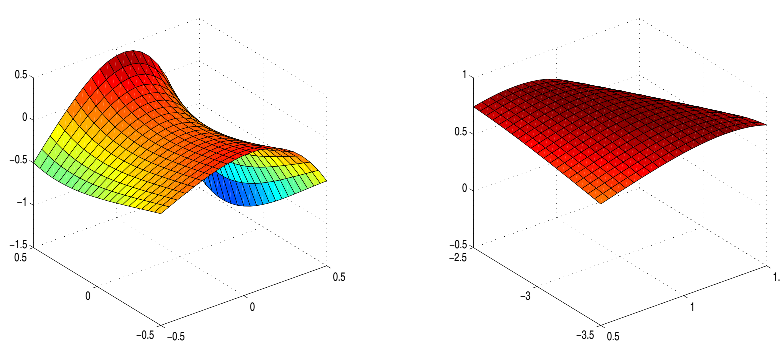
$$f''_{x^2}(A) = -6, \quad f''_{xy}(A) = 0, \quad f''_{y^2}(A) = 2$$

и

$$f''_{x^2}(B) = -12e^{-2}, \quad f''_{xy}(B) = -6e^{-2}, \quad f''_{y^2}(B) = -4e^{-2}.$$

У тачки A је $ac - b^2 = -12$, па у тој тачки функција f нема локални екстремум (Слика 1, лево).

У тачки B је $ac - b^2 = 12e^{-4}$ и $a < 0$, па у тој тачки функција f има локални максимум који је једнак $6e^{-2}$ (Слика 1, десно).



Слика 1: График функције f у околини тачке A (лево) и околини тачке B (десно)

2. Одредити локалне екстремуме функције $f : (x, y) \mapsto 5x^2 + y^2 + z^2$ при услову $x - 2y + z + 4 = 0$.

Решење: Ако је

$$F(x, y, z, \lambda) = 5x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x - 2y + z + 4), \quad \varphi(x, y, z) = x - 2y + z + 4.$$

тада је

$$F'_x = 10x + \lambda, \quad F'_y = 4y - 2\lambda, \quad F'_z = 2z + \lambda, \quad F'_\lambda = \varphi.$$

Из једнакости $F'_x = 0$, $F'_y = 0$, $F'_z = 0$, $\varphi = 0$ добијамо само једну стационарну тачку $A^*(-1/4, 5/4, -5/4, 5/2)$ функције F. Како је

$$F''_{x^2} = 10,\ F''_{y^2} = 4,\ F''_{z^2} = 2,\ F''_{xy} = F''_{xz} = F''_{yz} = 0,$$

то је $d^2F(A^*) = 10dx^2 + 4dy^2 + 2dz^2 > 0$ за $|dx| + |dy| + |dz| \neq 0$. Према томе, функција f у тачки $A(-1/4, 5/4, -5/4)$ има условни локални минимум који је једнак 5.

3. Израчунати $\displaystyle\int \ln^2(\ln x) \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} dx.$

Решење: Ако дати интеграл означима са I, тада сменом $\ln x = t$ добијамо да је $I = \displaystyle\int t \ln^2 t dt$. Применом парцијалне интеграције у којој бирамо $u = \ln^2 t$ и $dv = tdt$ имамо да је

$$du = 2\ln t \cdot \frac{dy}{t}, \quad v = \frac{t^2}{2}, \quad I = \frac{t^2}{2}\ln^2 t - I_1,$$

где је

$$I_1 = \int t \ln t dt = \frac{t^2}{2}\ln t - \frac{t^2}{4} + C_1.$$

Према томе,

$$I = \frac{t^2}{4}\big(2\ln^2 t - 2\ln t + 1\big) + C = \frac{\ln^2 x}{4}\big(2\ln^2(\ln x) - 2\ln(\ln x) + 1\big) + C.$$

4. Израчунати

$$\iint_D \frac{\cos(x+2y)(3(3y-x)^2 + 5(3y-x))}{(3y-x+3)(3y-x+1)^2} dxdy$$

ако је $D = \Big\{(x,y) \mid 0 \leq 3y - x \leq 1,\ 0 \leq x + 2y \leq \dfrac{\pi}{3}\Big\}$.

Решење: Сменом $3y - x = u$, $x + 2y = v$ добијамо

$$I = \iint_D \frac{\cos(x+2y)(3(3y-x)^2 + 5(3y-x))}{(3y-x+3)(3y-x+1)^2} dxdy = \iint_G \frac{\cos v(3u^2+5u)}{(u+3)(u+1)^2}|J|dudv,$$

где је $G = [0,1] \times [0, \pi/3]$ и $J = -1/5$. Дакле,

$$I = \frac{1}{5}\int_0^{\pi/3} \cos v dv \cdot \int_0^1 \frac{3u^2+5u}{(u+3)(u+1)^2} du = \frac{\sqrt{3}}{10}K.$$

Како је

$$\frac{3u^2+5u}{(u+3)(u+1)^2} = \frac{A}{u+3} + \frac{B}{u+1} + \frac{C}{(u+1)^2} = \frac{3}{u+3} - \frac{1}{(u+1)^2},$$

то је

$$K = 3\ln|u+3|\,\Big|_0^1 + \frac{1}{u+1}\,\Big|_0^1 = 3\ln\frac{4}{3} - \frac{1}{2}.$$

Према томе, $I = \dfrac{\sqrt{3}}{10}\left(3\ln\dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{2}\right)$.

Драган Ђорић