МАТЕМАТИКА 2

Јуни, 2011 - Други део - Група 1

1. Израчунати $\int x^2 \cdot \arcsin\frac{1}{x} dx$.

Решење: Ако у парцијалној интеграцији датог интеграла I изаберемо $u = \arcsin\frac{1}{x}$ и $dv = x^2 dx$, тада имамо да је $du = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ и $v = x^3/3$, па је

$$\begin{aligned} I &= \frac{x^3}{3}\cdot\arcsin\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{x^3}{3}\cdot\arcsin\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{1}{3}\int\sqrt{x^2-1}\,dx \\ &= \frac{x^3}{3}\cdot\arcsin\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ln(x+\sqrt{x^2-1}) + \frac{1}{3}J \end{aligned}$$

где је (вероватно је рађен на вежбама)

$$J = \int\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-1}).$$

Према томе,

$$I = \frac{x^3}{3}\cdot\arcsin\frac{1}{x} + \frac{1}{6}x\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{6}\ln(x+\sqrt{x^2-1}) + C, \quad C\in R. \tag{1}$$

Напомена. Могло је и да се избегне рачунање интеграла J. Из првог корака у решењу имамо

$$I = \frac{x^3}{3}\cdot\arcsin\frac{1}{x} + \frac{1}{3}K, \tag{2}$$

где је

$$K = \int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln(x+\sqrt{x^2-1}) + J.$$

Ако за интеграл J применимо парцијалну интеграцију са $u = \sqrt{x^2-1}$ и $dv = dx$, добијамо $J = x\sqrt{x^2-1} - K$, што значи да је

$$2K = x\sqrt{x^2-1} + \ln(x+\sqrt{x^2-1}).$$

Заменом K у једнакости (2) добијамо (1).

2. Израчунати површину површи настале ротацијом криве

$$y = \frac{1}{12}(4e^{3x}+e^{-3x}), \quad -1\le x\le 1$$

око Ox осе.

Решење: Пошто је $P = 2\pi\int_{-1}^{1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$, треба најпре 'средити' израз под кореном. Налажењем извода

$$y' = \frac{1}{4}\left(4e^{3x}-e^{-3x}\right)$$

добијамо

$$1+y'^2 = \frac{1}{16}\left(16e^{6x}+8+e^{-6x}\right) = \frac{1}{16}\left(4e^{3x}+e^{-3x}\right)^2.$$

Према томе,

$$\begin{aligned}
P &= \frac{\pi}{24}\int_{-1}^{1}\left(4e^{3x}+e^{-3x}\right)^2 dx \\
&= \frac{\pi}{24}\left[\int_{-1}^{1}16e^{6x}dx+\int_{-1}^{1}8dx+\int_{-1}^{1}e^{-6x}dx\right] \\
&= \frac{\pi}{24}\left[\frac{16}{6}e^{6x}\Big|_{-1}^{1}+8\cdot 2-\frac{1}{6}e^{-6x}\Big|_{-1}^{1}\right] \\
&= \frac{17}{144}\pi\left(e^{6}-e^{-6}\right)+\frac{2}{3}\pi.
\end{aligned}$$

3. Израчунати $\iint_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ ако је $D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le\frac{\pi^2}{4},\ x\le y\le\sqrt{3}x\right\}$.

Решење: Увођењем поларних координата, $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, имамо да је

$$I=\iint_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\iint_G \rho\cos\rho\, d\varphi d\rho,$$

где је $G=[\pi/4,\pi/3]\times[0,\pi/2]$.

Како је

$$\int_0^{\pi/2}\rho\cos\rho\, d\rho=\rho\sin\rho\,\Big|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\sin\rho\, d\rho=\frac{\pi}{2}-1,$$

то је

$$I=\int_{\pi/4}^{\pi/3}d\varphi\int_0^{\pi/2}\rho\cos\rho\, d\rho=\frac{\pi}{12}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=\frac{\pi}{24}(\pi-2).$$

Драган Ђорић

Ево и неколико 'бисера' из радова ове групе задатака.

$$\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b},\quad \sqrt{a-b}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

$$\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2},\quad \rho\cdot\cos\rho=\rho^2\cdot\cos$$

МАТЕМАТИКА 2

Јуни, 2011 - Група 1

1. Одредити све локалне екстремуме функције $f : (x, y) \mapsto z$ задате са

$$8 - \frac{z^3}{3} + xyz + xy^2 + x^2y = 0, \quad xy \neq 0.$$

Решење: Диференцирањем по x дате једнакости имамо

$$-z^2 \cdot z'_x + yz + xyz'_x + y^2 + 2xy = 0, \tag{1}$$

одакле добијамо

$$z'_x = \frac{yz + y^2 + 2xy}{z^2 - xy}.$$

Слично, диференцирањем дате једнакости по y имамо

$$-z^2 \cdot z'_y + xz + xyz'_y + 2xy + x^2 = 0, \tag{2}$$

одакле добијамо

$$z'_y = \frac{xz + 2xy + x^2}{z^2 - xy}.$$

Стационарне тачке налазимо решавањем система

$$F(x, y, z) = 0, \quad z'_x = 0, \quad z'_y = 0,$$

где је

$$F(x, y, z) = 8 - \frac{z^3}{3} + xyz + xy^2 + x^2y.$$

Из $z'_x = 0$ и $z'_y = 0$ следи да је $y = x$ и $z = -3x$. Заменом y са x и z са $-3x$ у $F(x, y, z) = 0$ добијамо да је $x^3 = -1$, односно $x = -1$. Према томе, једина стационарна тачка функције f је тачка $A(-1, -1)$, при чему је $z(A) = 3$.

Сада треба проверити да ли је у тачки A локални екстремум функције f.

Диференцирањем једнакости (1) по x, односно по y добијамо

$$-2zz'_xz'_x - z^2z''_{x^2} + yz'_x + yz'_x + xyz''_{x^2} + 2y = 0,$$

$$-2zz'_yz'_x - z^2z''_{xy} + z + yz'_y + xz'_x + xyz''_{xy} + 2y + 2x = 0,$$

а диференцирањем једнакости (2) по y добијамо

$$-2zz'_yz'_y - z^2z''_{y^2} + xz'_y + xz'_y + xyz''_{y^2} + 2x = 0.$$

Из ових једнакости налазимо да је

$$a = z''_{x^2}(A) = -\frac{1}{4}, \quad b = z''_{xy}(A) = -\frac{1}{8}, \quad c = z''_{y^2}(A) = -\frac{1}{4}.$$

Како је $ac - b^2 = \dfrac{3}{64} > 0$ и $a < 0$, у тачки A је локални максимум, $f_{\max} = f(A) = 3$.

2. Одредити најмању и највећу вредност функције $f : (x, y) \mapsto 2y^2 - x^2 + 2x + 1$ на области $\mathcal{D} = \{(x, y) \; : \; y^2 - 2 \leq x \leq 3\}$.

Решење: Из $f'_x = 0$ и $f'_y = 0$ добијамо тачку $A(1, 0)$ која припада датој области $\mathcal{D}$.

Границу области $\mathcal{D}$ чине део праве $x = 3$ и део криве $x = y^2 - 2$.

1. За $x=3$ је $f(3,y)=2y^2-2$, што значи да треба узети у разматрање тачку $B(3,0)$, као и граничне тачке (са кривом $x=y^2-2$) $C(3,\sqrt{5})$ и $D(3,-\sqrt{5})$.

2. За $x=y^2-2$ је

$$g(y)=f(y^2-2,y)=-y^4+8y^2-7, \quad g'(y)=4y(4-y^2),$$

па у разматрање треба узети и тачке $E(-2,0)$, $F(2,2)$ и $G(2,-2)$.

Упоређивањем вредности функције f у тачкама A, B, C, D, E, F и G видимо да је

$$\max_{\mathcal{D}} f=f(F)=f(G)=9, \quad \min_{\mathcal{D}} f=f(E)=-7.$$

3. Израчунати површину површи настале ротацијом криве

$$y=\frac{1}{12}(4e^{3x}+e^{-3x}), \quad -1\le x\le 1$$

око Ox осе.

Решење: Пошто је $P=2\pi\int_{-1}^{1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$, треба најпре 'средити' израз под кореном. Налажењем извода

$$y'=\frac{1}{4}\left(4e^{3x}-e^{-3x}\right)$$

добијамо

$$1+y'^2=\frac{1}{16}\left(16e^{6x}+8+e^{-6x}\right)=\frac{1}{16}\left(4e^{3x}+e^{-3x}\right)^2.$$

Према томе,

$$\begin{aligned}
P &= \frac{\pi}{24}\int_{-1}^{1}\left(4e^{3x}+e^{-3x}\right)^2 dx \\
&= \frac{\pi}{24}\left[\int_{-1}^{1}16e^{6x}dx+\int_{-1}^{1}8dx+\int_{-1}^{1}e^{-6x}dx\right] \\
&= \frac{\pi}{24}\left[\frac{16}{6}e^{6x}\Big|_{-1}^{1}+8\cdot 2-\frac{1}{6}e^{-6x}\Big|_{-1}^{1}\right] \\
&= \frac{17}{144}\pi\left(e^6-e^{-6}\right)+\frac{2}{3}\pi.
\end{aligned}$$

4. Израчунати $\iint_D \cos\sqrt{x^2+y^2}dxdy$ ако је $D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le\frac{\pi^2}{4},\ x\le y\le\sqrt{3}x\right\}$.

Решење: Увођењем поларних координата, $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, имамо да је

$$I=\iint_D \cos\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\iint_G \rho\cos\rho d\varphi d\rho,$$

где је $G=[\pi/4,\pi/3]\times[0,\pi/2]$.

Како је

$$\int_0^{\pi/2}\rho\cos\rho d\rho=\rho\sin\rho\Big|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\sin\rho d\rho=\frac{\pi}{2}-1,$$

то је

$$I=\int_{\pi/4}^{\pi/3}d\varphi\int_0^{\pi/2}\rho\cos\rho d\rho=\frac{\pi}{12}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=\frac{\pi}{24}(\pi-2).$$

Драган Ђорић