

15. новембар 2008.

презиме и име студента

број индекса

група за
вежбе

1. Дата је структура (A, \cdot) , при чему је

$$A = \{a - b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\}.$$

Испитати које од следећих особина има структура (A, \cdot) :

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура (A, \cdot) група? Да ли је структура (A, \cdot) Абелова група?

2. Дате су матрице

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Проверити да ли је матрица $A + B$ регуларна, па ако јесте решити матричну једначину

$$XA - C = -XB.$$

3. У зависности од реалног параметра α решити систем

$$\begin{array}{rrcr} x & + & y & + & z & = & 2 \\ -x & & & + & z & = & -3 \\ 3x & + & 2y & + & \alpha \cdot z & = & 7 \end{array}$$

4. Дати су вектори

$$\vec{a} = \lambda \vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}, \quad \vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j}, \quad \vec{c} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 4\lambda\vec{k} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

а) Одредити вредности λ_1 и λ_2 параметра λ за које су вектори \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} компланарни.

б) За $\lambda = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$ изразити вектор \vec{a} помоћу вектора \vec{b} и \vec{c} .

5. Одредити раван α која садржи праву p и тачку A , где је

$$p: \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+1}{-2}, \quad A(3, 2, 0).$$

15. новембар 2008.

презиме и име студента

број индекса

група за
вежбе

1. Дата је структура (A, \cdot) , при чему је

$$A = \{a\sqrt{3} - b \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Испитати које од следећих особина има структура (A, \cdot) :

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура (A, \cdot) група? Да ли је структура (A, \cdot) Абелова група?

2. Израчунати детерминанту $D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & b \end{vmatrix}$. За које вредности параметра b је $D = 0$?

3. У зависности од реалног параметра β решити систем
- $$\begin{array}{rrrrrr} x & + & y & + & z & + & w & = & 2 \\ -x & & & + & z & + & w & = & -3 \\ 3x & + & 2y & + & z & + & \beta \cdot w & = & 7 \end{array}$$

4. Дате су тачке

$$A(1, 1, 1), \quad B(2, 0, 2), \quad C(2, 2, 2), \quad D(3, 4, -3).$$

- а) Израчунати запремину тетраедра $ABCD$.
б) Израчунати дужину висине тетраедра из темена D .

5. Одредити раван α која садржи праву p и тачку A , где је

$$p: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1}, \quad A(2, -1, 1).$$

15. новембар 2008.

презиме и име студента

број индекса

група за
вежбе

1. Дата је структура (\mathcal{M}, \cdot) , при чему је

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ -a & 0 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{Q}, a \neq 0 \right\}$$

и \cdot означава операцију множења матрица.

Испитати које од следећих особина има структура (\mathcal{M}, \cdot) :

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура (\mathcal{M}, \cdot) група? Да ли је структура (\mathcal{M}, \cdot) Абелова група?

2. Израчунати детерминанту $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 4 \\ -4 & 1 & 4 & w \end{vmatrix}$. За које вредности параметра w је $D = 0$?

3. У зависности од реалног параметра ν решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 2 \\ 3x & + & 2y & + & z & = & 7 & . \\ -x & & & & + & z & = & \nu \end{array}$$

4. Дати су вектори

$$e_1 = (3, -2, 1), \quad e_2 = (2, 1, 2), \quad e_3 = (3, -1, -2).$$

- а) Доказати да вектори e_1 , e_2 и e_3 образују базу простора \mathbb{R}^3 .
б) Одредити координате вектора $x = (4, -4, -3)$ у бази $\{e_1, e_2, e_3\}$.

5. Одредити угао φ између правих p и q , где је

$$p: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-5}{2}, \quad q: \begin{cases} 2x + 2y - z + 3 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}.$$

група за
вежбе

- $$p: \begin{cases} x - y - 2z + 5 = 0 \\ -x + y + z - 2 = 0 \end{cases}, \quad q: \frac{x+2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-3}{1}.$$

15. новембар 2008.

презиме и име студента

број индекса

група за
вежбе

1. Дата је структура $(A, *)$, при чему је

$$A = (3, +\infty)$$

и нека је операција $*$ задата на следећи начин:

$$x * y = 3xy - 9x - 9y + 30.$$

Испитати које од следећих особина има структура $(A, *)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(A, *)$ група? Да ли је структура $(A, *)$ Абелова група?

2. Решити матричну једначину

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot X + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

3. У зависности од реалног параметра δ решити систем

$$\begin{array}{rrrrrr} x & + & y & + & z & + & w & = & 2 \\ 3x & + & y & + & 2z & + & w & = & 7 \\ -x & + & y & & & + & w & = & \delta \end{array}$$

4. Дати су вектори

$$\vec{a} = (m - 3, 3, -1), \quad \vec{b} = (1, -1, 3), \quad \vec{c} = (1, m + 4, -11) \quad (m \in \mathbb{R}).$$

- а) Одредити вредности параметра m тако да вектори \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} буду линеарно зависни.
б) За вредност m из дела под а), која је цео број, изразити вектор \vec{c} помоћу вектора \vec{a} и \vec{b} .

5. Одредити раван α која садржи праву p и паралелна је правој q , где је

$$p: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}, \quad q: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{3}.$$

15. новембар 2008.

презиме и име студента

број индекса

група за
вежбе

1. Дата је структура $(A, *)$, при чему је

$$A = (-3, +\infty)$$

и нека је операција $*$ задата на следећи начин:

$$x * y = 2xy + 6x + 6y + 15.$$

Испитати које од следећих особина има структура $(A, *)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(A, *)$ група? Да ли је структура $(A, *)$ Абелова група?

2. Испитати ранг матрице

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

у зависности од реалног параметра λ .

3. У зависности од реалног параметра ε решити систем
- $$\begin{array}{rrcr} x & - & 3y & - & z & = & 1 \\ 3x & - & 10y & - & 6z & = & 2 \\ -2x & + & 3y & - & 7z & = & \varepsilon \\ x & - & 2y & + & 2z & = & 2 \end{array}.$$

4. Дате су тачке

$$A(2, -3, 5), \quad B(0, 2, 1), \quad C(-2, -2, 3), \quad D(3, 2, 4).$$

а) Израчунати запремину тетраедра $ABCD$.

б) Израчунати дужину висине тетраедра из темена A .

5. Одредити раван α која садржи праву p и паралелна је правој q , где је

$$p: \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z+1}{1}, \quad q: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-3}.$$

15. новембар 2008.

презиме и име студента

број индекса

група за
вежбе

1. Дата је структура (\mathcal{M}, \cdot) , при чему је

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & -\beta & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & \beta \end{bmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha^2 + \beta^2 \neq 0 \right\}$$

и \cdot означава операцију множења матрица.

Испитати које од следећих особина има структура (\mathcal{M}, \cdot) :

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура (\mathcal{M}, \cdot) група? Да ли је структура (\mathcal{M}, \cdot) Абелова група?

2. Испитати ранг матрице

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

у зависности од реалног параметра λ .

3. У зависности од реалног параметра λ решити систем
- $$\begin{array}{rclcl} x & - & 2y & & = & 2 \\ 2x & - & 3y & + & (2\lambda + 4)z & = & 7 \\ -x & + & 2y & - & (\lambda + 2)z & = & -4 \end{array}.$$

4. Дати су вектори

$$e_1 = (2, -3, 1), \quad e_2 = (3, -1, 5), \quad e_3 = (1, -4, 3).$$

а) Доказати да вектори e_1 , e_2 и e_3 образују базу простора \mathbb{R}^3 .

б) Одредити координате вектора $x = (2, -2, 7)$ у бази $\{e_1, e_2, e_3\}$.

5. Раван α је одређена тачкама A , B и C . Одредити растојање тачке D од равни α , ако је

$$A(1, 1, 0), \quad B(1, 0, -1), \quad C(3, 1, 1), \quad D(2, 0, 1).$$

Б Решења I колоквијума из Математике 1 Б

1. Затвореност важи:

$$(a\sqrt{3} + b) \cdot (c\sqrt{3} + d) = (-ad - bc)\sqrt{3} - (-3ac - bd)$$

(овде смо користили особине асоцијативности, комутативности и дистрибутивности операција $+$ и \cdot у \mathbb{R}). Треба још да покажемо да је $(-ad - bc)\sqrt{3} - (-3ac - bd) \in A$, а то се своди на то да је $-ad - bc \in \mathbb{Q}$ и $-3ac - bd \in \mathbb{Q}$ (оба следе из $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$).

Асоцијативност се преноси (како је множење реалних бројева асоцијативна операција у скупу \mathbb{R} то је множење асоцијативно и у скупу $A \subset \mathbb{R}$).

Неутрални елемент за операцију је број $e = 1 = 0 \cdot \sqrt{3} - (-1) \in A$.

Инверзни елемент броја $x\sqrt{3} - y$ је број

$$\frac{1}{x\sqrt{3} - y} = \frac{1}{x\sqrt{3} - y} \cdot \frac{x\sqrt{3} + y}{x\sqrt{3} + y} = \frac{x\sqrt{3} + y}{3x^2 - y^2} = \frac{x}{3x^2 - y^2}\sqrt{3} + \frac{y}{3x^2 - y^2} \in A.$$

Али за $x = y = 0$ имамо да инверзни елемент не постоји!

Комутативност се преноси (како је множење реалних бројева комутативна операција у скупу \mathbb{R} то је множење комутативно и у скупу $A \subset \mathbb{R}$).

На основу свега изложеног добијамо да је структура (A, \cdot) комутативан моноид, тј. она није група (јер не постоји инверзан елемент за сваки $a \in A$), а самим тим ни Абелова група.

Напомена. Карактеристична места где се губе поени у овом задатку:

- Није лепо срећен израз за затвореност – у мноштву радова је стављено $(a\sqrt{3} + b) \cdot (c\sqrt{3} + d) = (3ac + bd) - (ad + bc)\sqrt{3}$ или, још горе (јер је нетачно) $(a\sqrt{3} + b) \cdot (c\sqrt{3} + d) = (ad + bc)\sqrt{3} - (3ac + bd)$.
- За особине асоцијативности и комутативности је неопходно рећи из ког скупа се преносе (за операцију множења). Напомене попут „То је рађено на вежбама“ или „Важи у општем случају“ (без да се каже у ком општем случају и како се преноси на овај) нису одговарајуће.
- За особине асоцијативности и комутативности ко само измножи 3, односно 2 броја и каже да су једнаки изоставио је да наброји шта је све користио (нпр. „Користим асоцијативност, комутативност и дистрибутивност операција $+$ и \cdot у \mathbb{Q} “).
- Неутрални елемент није довољно одредити, већ треба и показати да он припада датој структури!
- Потребно је одговорити на оба питања: да ли је структура група и да ли је Абелова група (може се рећи како није група, онда није ни Абелова група).

2. Најлакше је дату детерминанту развити по II колони јер она има највише елемената 0.

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & b \end{vmatrix} = -(-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & b \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot (-3b + 8 - 4 + 6 - 16 + b) - (b + 6 - 16 + 8 - 4 - 3b) = 2 \cdot (-2b - 6) - (-2b - 6) = -2b - 6. \end{aligned}$$

За $b = -3$ је $D = 0$.

Напомена. Дату детерминанту смо могли израчунати и свођењем на детерминанту троугаоне матрице.

3. Систем не можемо решавати преко детерминанти (јер је систем од 3 једначине са 4 непознате), па ћемо га решавати Гаусовим системом елиминације.

$$\begin{array}{rrrrrr} x & + & y & + & z & + & w & = & 2 \\ -x & & & & + & z & + & w & = & -3 & \text{II} + \text{I} \\ 3x & + & 2y & + & z & + & \beta w & = & 7 & \text{III} - 3 \cdot \text{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll}
x & + & y & + & z & + & w & = & 2 \\
& & y & + & 2z & + & 2w & = & -1 \\
- & y & - & 2z & + & (\beta - 3)w & = & 1 & \text{III} + \text{II}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcll}
x & + & y & + & z & + & w & = & 2 \\
& & y & + & 2z & + & 2w & = & -1 \\
& & & & & & (\beta - 1)w & = & 0
\end{array}$$

За $\beta \neq 1$ имамо 3 везане променљиве x, y, w и 1 слободну променљиву z и њој ћемо доделити вредност параметра: $z = t, t \in \mathbb{R}$. Из последње једначине добијамо $w = 0$. Даље, када $w = 0$ и $z = t$ уврстимо у 2. једначину у степенастом облику добијамо $y = -1 - 2t$. Када y, z, w уврстимо у 1. једначину добијамо $x = 3 + t$.

За $\beta = 1$ последња једначина је једнака $0 = 0$ и њу можемо обрисати, тј. систем се своди на систем

$$\begin{array}{rcll}
x & + & y & + & z & + & w & = & 2 \\
& & y & + & 2z & + & 2w & = & -1
\end{array}$$

Везане променљиве су x и y , а слободне променљиве су z и w и њима ћемо доделити вредности параметара: $z = t$ и $w = p, t, p \in \mathbb{R}$. Када то уврстимо у 2. једначину добијамо $y = -1 - 2t - 2p$. Када y, z, w уврстимо у 1. једначину добијамо $x = 3 + t + p$.

Коначан закључак је:

- За $\beta \neq 1$ систем има вишеструко решење са 1 параметром $(x, y, z, w) = (3 + t, -1 - 2t, t, 0), t \in \mathbb{R}$.
- За $\beta = 1$ има вишеструко решење са 2 параметра $(x, y, z, w) = (3 + t + p, -1 - 2t - 2p, t, p), t, p \in \mathbb{R}$.

4. На основу $\overrightarrow{AB} = (1, -1, 1), \overrightarrow{AC} = (1, 1, 1)$ и $\overrightarrow{AD} = (2, 3, -4)$ добијамо да је

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} |-12| = 2.$$

Површину основе $\triangle ABC$ тетраедра $ABCD$ добијамо из

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 0\vec{j} + \vec{k} = (-2, 0, 2),$$

тј. $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{2}$.

Даље, како је $V = \frac{1}{3} P \cdot H$, добијамо да је тражена висина једнака $H_D = \frac{3V}{P_{\triangle ABC}} = 3\sqrt{2}$.

5. Из $p: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1}$ добијамо да је вектор правца праве p једнак $\vec{v}_p = (2, -2, 1)$, као и тачку $P(1, -1, -2)$. Вектор нормале на раван α , \vec{n}_α је нормалан на све векторе у равни α , па и на вектор правца \vec{v}_p , као и на вектор $\overrightarrow{PA} = (1, 0, 3)$. Стога узимамо

$$\vec{n}_\alpha = \vec{v}_p \times \overrightarrow{PA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-6, -5, 2).$$

Једначину равни која има вектор нормале \vec{n}_α и садржи тачку $A(2, -1, 1)$ добијамо као

$$\alpha: -6(x-2) - 5(y+1) + 2(z-1) = 0,$$

тј. $\alpha: -6x - 5y + 2z + 5 = 0$.

В Решења I колоквијума из Математике 1 В

1. Затвореност важи:

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ -a & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b & 0 \\ -b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab & 0 \\ -ab & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}$$

јер $a \neq 0, b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0$ и $a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow ab \in \mathbb{Q}$.

Ради краћег записа можемо означити $M(a) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ -a & 0 \end{bmatrix}$ и онда пишемо $M(a) \cdot M(b) = M(ab)$.

Асоцијативност се преноси (како је множење матрица асоцијативна операција у скупу Ω свих матрица облика 2×2 са реалним елементима то је множење матрица асоцијативно и у скупу $\mathcal{M} \subset \Omega$).

Други начин да покажемо асоцијативност би био:

$$M(a) \cdot (M(b) \cdot M(c)) = M(a) \cdot M(bc) = M(a(bc)) \stackrel{*}{=} M(abc) \stackrel{*}{=} M((ab)c) = M(ab) \cdot M(c) = (M(a) \cdot M(b)) \cdot M(c)$$

(овде смо у једнакостима $*$ користили асоцијативност операције \cdot у $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$, а у осталим само затвореност).

Неутрални елемент овде неће бити јединична матрица јер $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \notin \mathcal{M}$, али то не значи да ова структура нема неутрални елемент. Нека је $M(e)$ неутрални елемент. Тада треба да важи

$$M(a) \cdot M(e) = M(ae) = M(a) \quad \text{за свако } a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\},$$

одакле добијамо да је $e = 1$, тј. неутрални елемент је матрица $M(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}$ (провером видимо да важи и једнакост $M(1) \cdot M(a) = M(1 \cdot a) = M(a)$, па видимо да матрица $M(1)$ задовољава оба услова која треба да важе за неутрални елемент; ову проверу смо могли да избегнемо да смо прво показали комутативност!).

Инверзни елемент није инверзна матрица! Један разлог је што неутрални елемент није јединична матрица I , а други је што за матрице $M(a)$ не постоји инверзна матрица (зашто?).

Инверзни елемент за матрицу $M(a)$ ће бити матрица $M(y)$ и њу тражимо из једначине

$$M(a) \cdot M(y) = M(ay) = M(1),$$

одакле добијамо да је $y = \frac{1}{a}$, тј. како је $\frac{1}{a} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ добијамо да је $M(\frac{1}{a}) \in \mathcal{M}$ инверзни елемент матрице $M(a)$ (приметимо да важи и $M(\frac{1}{a}) \cdot M(a) = M(\frac{1}{a} \cdot a) = M(1)$, па $M(\frac{1}{a})$ задовољава оба услова потребна за инверзни елемент; и ову проверу смо могли да избегнемо да смо прво показали комутативност!).

Комутативност важи (иако генерално множење матрица није комутативна операција у скупу \mathcal{M} јесте!):

$$M(a) \cdot M(b) = M(ab) \stackrel{*}{=} M(ba) = M(b) \cdot M(a)$$

(овде смо у једнакостима $*$ користили комутативност операције \cdot у $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$, а у осталим само затвореност).

На основу свега изложеног добијамо да је структура (\mathcal{M}, \cdot) група и то Абелова група.

2. Приметимо да у матрици чију детерминанту рачунамо имамо пропорционалне I и III колону, тј. важи $I = (-1) \cdot III$ и онда на основу особина детерминаната имамо да је $D = 0$.

За сваку реалну вредност параметра w је $D = 0$.

Напомена. Дату детерминанту смо могли израчунати и Лапласовим развојем, као и свођењем на детерминанту троугаоне матрице (али оба та начина изискују више утрошеног времена).

3. I начин: преко детерминаната.

$$\Delta = 0, \Delta_x = -3 - \nu, \Delta_y = 6 + 2\nu, \Delta_z = -3 - \nu.$$

За $\nu = -3$ је $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$. Сада смо спремни за дискусију по случајевима.

- За $\nu \neq -3$ имамо да је $\Delta = 0$ и $\Delta_x \neq 0$, па систем нема решења.

- За $\nu = -3$ је $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, па у овом случају до решења морамо ићи Гаусовим системом елиминације.

$$\begin{array}{rrrrr} x & - & y & + & z & = & 2 \\ 3x & + & 2y & + & z & = & 7 & \text{II} - 3 \cdot \text{I} \\ -x & & & & + & z & = & -3 & \text{III} + \text{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr} x & - & y & + & z & = & 2 \\ & & -y & - & 2z & = & 1 \\ & & y & + & 2z & = & -1 & \text{III} + \text{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr} x & - & y & + & z & = & 2 \\ & & -y & - & 2z & = & 1 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr} x & - & y & + & z & = & 2 \\ & & -y & - & 2z & = & 1 \end{array}$$

Овде су x и y везане променљиве, а z је слободна, те можемо узети да је $z = t$, $t \in \mathbb{R}$. Враћањем уназад добијамо да је $y = -1 - 2t$ и $x = 3 + t$. Стога у овом случају имамо вишеструко решење које зависи од 1 параметра: $(x, y, z) = (3 + t, -1 - 2t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

II начин: Гаусовим системом елиминације.

$$\begin{array}{rrrrr} x & - & y & + & z & = & 2 \\ 3x & + & 2y & + & z & = & 7 & \text{II} - 3 \cdot \text{I} \\ -x & & & & + & z & = & \nu & \text{III} + \text{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr} x & - & y & + & z & = & 2 \\ & & -y & - & 2z & = & 1 \\ & & y & + & 2z & = & \nu + 2 & \text{III} + \text{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr} x & - & y & + & z & = & 2 \\ & & -y & - & 2z & = & 1 \\ & & & & 0 & = & \nu + 3 \end{array}$$

За $\nu \neq -3$ последња једначина је једнака $0 = \nu + 3 \neq 0$, па у овом случају систем нема решења. За $\nu = -3$ систем решавамо потпуно аналогно као и у претходном начину.

Коначан закључак је:

- За $\nu \neq -3$ систем нема решења.
- За $\nu = -3$ систем има вишеструко решење: $(x, y, z) = (3 + t, -1 - 2t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

4. а) Линеарну зависност 3 вектора у \mathbb{R}^3 можемо испитати преко детерминанте која ће имати по врстама (или колонама јер је детерминанта транспоноване матрице једнака детерминанти полазне матрице) координате тих вектора:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -25 \neq 0$$

\Rightarrow вектори e_1 , e_2 и e_3 су линеарно независни.

Како је векторски простор \mathbb{R}^3 тродимензионалан, тј. $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, то било која 3 линеарно независна вектора чине базу тог простора. Стога, вектори \vec{v}_1 , \vec{v}_2 и \vec{v}_3 чине базу простора \mathbb{R}^3 .

Напомена. До ове детерминанте можемо доћи из мешовитог производа $[e_1, e_2, e_3]$, који одговара површини P паралелопипеда над векторима e_1 , e_2 и e_3 , па ако и само ако је $P = 0$ онда су вектори e_1 , e_2 и e_3 компланарни, тј. линеарно зависни (све се дешава у простору \mathbb{R}^3).

Други начин је да поставимо систем $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = \vec{0} = (0, 0, 0)$. То је хомоген систем и он има јединствено решење (то је тривијално решење $\alpha = \beta = \gamma = 0$!) ако и само му је детерминанта различита од 0. Детерминанта овог система је детерминанта од транспоноване матрице горње детерминанте!

б) Изразимо вектор x као линеарну комбинацију вектора e_1 , e_2 и e_3 :

$$x = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$$

$$(4, -4, -3) = \alpha \cdot (3, -2, 1) + \beta \cdot (2, 1, 2) + \gamma \cdot (3, -1, -2)$$

$$(4, -4, -3) = (3\alpha + 2\beta + 3\gamma, -2\alpha + \beta - \gamma, \alpha + 2\beta - 2\gamma)$$

Ова једначина је еквивалентна са системом

$$\begin{array}{rrrr} \alpha & + & 2\beta & - & 2\gamma & = & 4 \\ -2\alpha & + & \beta & - & \gamma & = & -4 \\ \alpha & + & 2\beta & - & 2\gamma & = & -3 \end{array}$$

који има јединствено решење $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = 1$. Тиме смо добили да је

$$x = e_1 - e_2 + e_3.$$

Координате вектора x у бази $\{e_1, e_2, e_3\}$ су $(1, -1, 1)$.

$$5. \quad p: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-5}{2} \Rightarrow \vec{v}_p = (2, -1, 2), \quad q: \begin{cases} 2x + 2y - z + 3 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}.$$

Потребно је да праву q која је дата као пресек 2 равни представимо у параметарском (или канонском облику). До параметарског облика долазимо решавањем система (само смо прво преместили једначине због лакшег решавања):

$$\begin{array}{rrrr} x & + & y & & = & 1 \\ 2x & + & 2y & - & z & = & -3 \quad \text{II} - 2 \cdot \text{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} x & + & y & & = & 1 \\ & & & & z & = & 5 \end{array}$$

Ово је систем у степенастом облику, па су x и z везане променљиве, а y је слободна, те можемо узети да је $y = t$, $t \in \mathbb{R}$. Даље, добијамо $z = 5$ и $x = 1 - t$. Једначина праве q у параметарском облику је

$$x = 1 - t, \quad y = t, \quad z = 5, \quad t \in \mathbb{R},$$

а одавде добијамо и канонски облик

$$q: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}.$$

Њен вектор правца је $\vec{v}_q = (-1, 1, 0)$.

Величину угла φ између праве p и праве q рачунамо по следећој формули

$$\cos \angle(p, q) = \frac{|\vec{v}_p \cdot \vec{v}_q|}{|\vec{v}_p| \cdot |\vec{v}_q|} = \frac{|-3|}{3 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Како је $\cos \angle(p, q) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ добијамо да је $\angle(p, q) = 45^\circ$ (или $\angle(p, q) = \frac{\pi}{4}$).

Напомена. Вектор правца \vec{v}_q смо могли добити и преко вектора нормала равни α и β у чијем се пресеку налази права q . Како је $q \in \alpha$ и $q \in \beta$ имамо да је $\vec{v}_q \perp \vec{n}_\alpha$ и $\vec{v}_q \perp \vec{n}_\beta$, па можемо узети да је $\vec{v}_q = \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta$.

Решења система по групама

група А

3. $\Delta = \alpha - 1$, $\Delta_x = 3(\alpha - 1)$, $\Delta_y = 1 - \alpha$, $\Delta_z = 0$.

За $\alpha \neq 1$ систем има јединствено решење $(x, y, z) = (3, -1, 0)$.

За $\alpha = 1$ има вишеструко решење $(x, y, z) = (3 + t, -1 - 2t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

група Б

3. За $\beta = 1$ има вишеструко решење са 2 параметра $(x, y, z, w) = (3 + t + p, -1 - 2t - 2p, t, p)$, $t, p \in \mathbb{R}$.

За $\beta \neq 1$ систем има вишеструко решење са 1 параметром $(x, y, z, w) = (3 + t, -1 - 2t, t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$.

група В

3. $\Delta = 0$, $\Delta_x = -3 - \nu$, $\Delta_y = 6 + 2\nu$, $\Delta_z = -3 - \nu$.

За $\nu \neq -3$ систем нема решења.

За $\nu = -3$ има вишеструко решење $(x, y, z) = (3 + t, -1 - 2t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

група Г

3. За $\Gamma = 2$ има вишеструко решење са 2 параметра $(x, y, z, w) = (\frac{5}{2} - \frac{1}{2}t, -\frac{5}{2} - \frac{1}{2}t - 2p, t, p)$, $t, p \in \mathbb{R}$.

За $\Gamma \neq 2$ систем има вишеструко решење са 1 параметра $(x, y, z, w) = (\frac{5}{2} - \frac{1}{2}t, -\frac{5}{2} - \frac{1}{2}t, t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$.

група Д

3. За $\delta = -3$ систем нема решења.

За $\delta \neq -3$ систем има вишеструко решење са 2 параметра $(x, y, z, w) = (\frac{5}{2} - \frac{1}{2}t, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t - p, t, p)$, $t, p \in \mathbb{R}$.

група Е

3. За $\varepsilon \neq -5$ систем нема решења.

За $\varepsilon = -5$ има вишеструко решење $(x, y, z) = (4 - 8t, 1 - 3t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

група Л

3. За $\lambda = -2$ систем нема решења.

За $\lambda \neq -2$ има јединствено решење $(x, y, z) = (0, -1, \frac{2}{\lambda+2})$.

група М

3. $\Delta = \mu - 2$, $\Delta_x = 5(\mu - 2)$, $\Delta_y = -5(\mu - 2)$, $\Delta_z = 0$.

За $\mu \neq 2$ систем има јединствено решење $(x, y, z) = (5, -5, 0)$.

За $\mu = 2$ има вишеструко решење $(x, y, z) = (5 + 2t, -5 - 4t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.