V двочас вежби — Владимир Балтић

5. Вектори

Овде је дат кратак преглед V двочаса вежби. Потребно је да обновите одговарајућу теоријску материју која је обрађена на предавањима и у уџбенику.

Како се највећим делом на вежбама раде задаци из збирке, након броја задатка плавом бојом је означен број задатка у збирци "МАТЕМАТИКА 1" професора Р. Лазовића, Д. Ђорића и Ђ. Јованова у форми p.z, где је p број поглавља, a z број задатка у том поглављу. Ови задаци са преосталима из збирке (из поглавља "5. Вектори", као и оним из поглавља "7. Први колоквијум" који су везани за ову материју) чине целину довољну за припрему ове области.

1. 5.5 (1),(4),(5). Нека је $\mathbb{R}^3 = \{(a_1, a_2, a_3) \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$ и нека су $+$ и $\cdot$ операције у $\mathbb{R}^3$ дефинисане једнакостима $(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$ и $\lambda \cdot (a_1, a_2, a_3) = (\lambda \cdot a_1, \lambda \cdot a_2, \lambda \cdot a_3)$, где је $\lambda \in \mathbb{R}$.

а) Доказати да је $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ векторски простор над пољем $\mathbb{R}$.

б) Доказати да вектори $\vec{e}_1 = (2, 1, -3)$, $\vec{e}_2 = (3, 2, -5)$, $\vec{e}_3 = (1, -1, 1)$ чине базу у $\mathbb{R}^3$ и изразити вектор $\vec{x} = (6, 2, -7)$ помоћу вектора те базе.

Решење. **а)** Да би $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ био векторски простор потребно је да $(V, +)$ буде Абелова група и да важи:

$$k \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = k \cdot \vec{v} + k \cdot \vec{w}, \qquad (k + m) \cdot \vec{v} = k \cdot \vec{v} + m \cdot \vec{v}, \qquad k \cdot (m \cdot \vec{v}) = (k \cdot m) \cdot \vec{v}, \qquad 1 \cdot \vec{v} = \vec{v}.$$

Означимо векторе $\vec{v} = (a, b, c)$ и $\vec{w} = (m, n, p)$.

У $\mathbb{R}^3$ операција $+$ сабирања вектора је затворена јер је $\vec{v} + \vec{w} = (a, b, c) + (m, n, p) = (a + m, b + n, c + p) \in \mathbb{R}^3$.

Асоцијативност сабирања вектора је директна последица асоцијативности операције сабирања у $\mathbb{R}$.

Неутрални елемент је нула-вектор $\vec{0} = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$.

Инверзан елемент вектора $\vec{v} = (a, b, c)$ је супротан вектор $-\vec{v} = (-a, -b, -c) \in \mathbb{R}^3$.

Комутативност сабирања вектора је директна последица комутативности операције сабирања у $\mathbb{R}$.

На основу овога следи да је $(\mathbb{R}^3, +)$ Абелова група.

На основу дистрибутивности операција $\cdot$ и $+$ у $\mathbb{R}$ добијамо да је

$$\begin{aligned} k \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= k \cdot \big((a, b, c) + (m, n, p)\big) = k \cdot (a + m, b + n, c + p) = \big(k(a + m), k(b + n), k(c + p)\big) \\ &= (ka + km, kb + kn, kc + kp) = (ka, kb, kc) + (km, kn, kp) = k \cdot \vec{v} + k \cdot \vec{w}. \end{aligned}$$

На основу дистрибутивности операција $\cdot$ и $+$ у $\mathbb{R}$ добијамо да је

$$\begin{aligned} (k + m) \cdot \vec{v} &= (k + m) \cdot (a, b, c) = \big((k + m)a, (k + m)b, (k + m)c\big) = (ka + ma, kb + mb, kc + mc) \\ &= (ka, kb, kc) + (ma, mb, mc) = k \cdot \vec{v} + m \cdot \vec{v}. \end{aligned}$$

Из асоцијативности операције $\cdot$ у $\mathbb{R}$ добијамо

$$k \cdot (m \cdot \vec{v}) = k \cdot \big(m \cdot (a, b, c)\big) = k \cdot (ma, mb, mc) = (kma, kmb, kmc) = (k \cdot m) \cdot \vec{v}.$$

И коначно имамо

$$1 \cdot \vec{v} = 1 \cdot (a, b, c) = (1 \cdot a, 1 \cdot b, 1 \cdot c) = (a, b, c) = \vec{v}.$$

На основу свега изложеног следи да је $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ векторски простор.

б) Да би вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ чинили базу у $\mathbb{R}^3$ треба да су линеарно независни и да генеришу простор $\mathbb{R}^3$.

Вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ су линеарно независни ако и само ако једначина

$$\alpha \cdot \vec{e}_1 + \beta \cdot \vec{e}_2 + \gamma \cdot \vec{e}_3 = \vec{0}$$

има само тривијално решење $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Та једначина је једнака

$$\alpha \cdot (2, 1, -3) + \beta \cdot (3, 2, -5) + \gamma \cdot (1, -1, 1) = (2\alpha, \alpha, -3\alpha) + (3\beta, 2\beta, -5\beta) + (\gamma, -\gamma, \gamma) = (2\alpha + 3\beta + \gamma, \alpha + 2\beta - \gamma, -3\alpha - 5\beta + \gamma) = \vec{0},$$

односно добијамо $(2\alpha+3\beta+\gamma, \alpha+2\beta-\gamma, -3\alpha-5\beta+\gamma) = (0,0,0)$, што се своди на систем $\begin{array}{rcrcrcr} 2\alpha & + & 3\beta & + & \gamma & = & 0 \\ \alpha & + & 2\beta & - & \gamma & = & 0 \\ -3\alpha & - & 5\beta & + & \gamma & = & 0. \end{array}$

Ово је хомогени систем и како му је детерминанта

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

он има јединствено решење, а то је тривијално решење $\alpha = \beta = \gamma = 0$, па су вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ линеарно независни.

Вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ генеришу цео простор $\mathbb{R}^3$, ако се произвољан вектор $\vec{v} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ може представити као линеарна комбинација вектора $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$.

Сада решавамо једначину $\alpha \cdot \vec{e}_1 + \beta \cdot \vec{e}_2 + \gamma \cdot \vec{e}_3 = \vec{v}$, односно

$$(2\alpha + 3\beta + \gamma, \alpha + 2\beta - \gamma, -3\alpha - 5\beta + \gamma) = (a,b,c).$$

Како и овај систем има исту детерминанту система $\Delta = 1 \neq 0$ добијамо да и он има јединствено решење (одредити решење овог система!).

Тиме смо показали да је $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ база векторског простора $\mathbb{R}^3$.

Остаје још да изразимо вектор $\vec{x} = (6,2,-7)$ преко вектора из базе B. Сада решавамо векторску једначину $(2\alpha + 3\beta + \gamma, \alpha + 2\beta - \gamma, -3\alpha - 5\beta + \gamma) = (6,2,-7)$ која је еквивалентна са системом $\begin{array}{rcrcrcr} 2\alpha & + & 3\beta & + & \gamma & = & 6 \\ \alpha & + & 2\beta & - & \gamma & = & 2 \\ -3\alpha & - & 5\beta & + & \gamma & = & -7. \end{array}$

Овај систем има детерминанту $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, што са осталим детерминантама из Крамерових формула

$$\Delta_\alpha = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -7 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad \Delta_\alpha = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad \Delta_\alpha = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \\ -3 & -5 & -7 \end{vmatrix} = 1,$$

даје $\alpha = \dfrac{\Delta_\alpha}{\Delta} = 1$, $\beta = \dfrac{\Delta_\beta}{\Delta} = 1$ и $\gamma = \dfrac{\Delta_\gamma}{\Delta} = 1$. Дакле тражено представљање је

$$\vec{x} = 1 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + 1 \cdot \vec{e}_3,$$

односно $(6,2,-7) = 1 \cdot (2,1,-3) + 1 \cdot (3,2,-5) + 1 \cdot (1,-1,1)$. ■

2. Ако је $\vec{a} = (1,2,3)$, $\vec{b} = (4,1,1)$ и $\vec{c} = (-9,3,6)$ доказати да су вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарни, а затим изразити трећи вектор преко прва два.

Упутства. Да су ова 3 вектора компланарна (тј. у истој равни у $\mathbb{R}^3$) показаћемо тако што покажемо да су они линеарно зависни. У ту сврху ћемо израчунати детерминанту чије су врсте (или колоне) дати вектори:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ -9 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

па су они линеарно зависни. Решавањем једначине $(-9,3,6) = \alpha(1,2,3) + \beta(4,1,1)$ добијамо да је $\alpha = 3$ и $\beta = -3$, тј. $(-9,3,6) = 3 \cdot (1,2,3) - 3 \cdot (4,1,1)$. ■

3. Дати су вектори $\vec{u} = (6,1,1)$, $\vec{v} = (0,3,-1)$ и $\vec{w} = (-2,3,5)$. Одредити t тако да вектори $\vec{u} + t\vec{v}$ и $\vec{w}$ буду ортогонални.

Упутства. Означимо $\vec{x} = \vec{u} + t \cdot \vec{v} = (6, 1+3t, 1-t)$.

$$\vec{x} \perp \vec{w} \;\Leftrightarrow\; \vec{x} \cdot \vec{w} = 0.$$

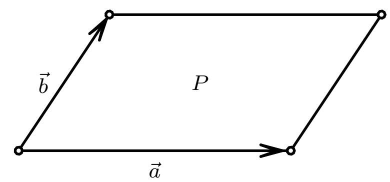
Ортогонални су за $t = 1$. ■

4. 5.14 (1). Израчунати меру φ угла који граде вектори $\vec{a} = 7\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

Решење. Из формуле $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ добијамо да је $\cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.
$\vec{a} \cdot \vec{b} = (7, 2, -1) \cdot (1, 2, -3) = 7 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-3) = 14.$
$|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = (7, 2, -1) \cdot (7, 2, -1) = 54 \ \Rightarrow \ |\vec{a}| = \sqrt{54}.$
$|\vec{b}|^2 = \vec{b} \cdot \vec{b} = (1, 2, -3) \cdot (1, 2, -3) = 14 \ \Rightarrow \ |\vec{b}| = \sqrt{14}.$
$\cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{14}{\sqrt{54} \cdot \sqrt{14}} = \sqrt{\dfrac{7}{27}}$ па је тражени угао $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos\sqrt{\dfrac{7}{27}}$. ■

5. 5.21 (1). Израчунати површину P паралелограма конструисаног над векторима $\vec{a} = 5\vec{i} - 4\vec{j} + 7\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$.

Упутства. Векторски производ $\vec{a} \times \vec{b}$ је једнак $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -4 & 7 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1\vec{i} + 17\vec{j} + 9\vec{k} = (1, 17, 9)$, па је
$P = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{1^2 + 17^2 + 9^2} = \sqrt{371}.$ ■



Слика уз задатак 5.

6. Наћи површину и дужину висине BD троугла ABC ако је $A(-3, -2, 0)$, $B(3, -3, 1)$ и $C(5, 0, 2)$.

Решење 1. Одредимо прво векторе који одређују троугао $\triangle ABC$:

$$\vec{a} = \overrightarrow{CA} = (x_A - x_C, y_A - y_C, z_A - z_C) = (-8, -2, -2) \qquad \text{и} \qquad \vec{b} = \overrightarrow{CB} = (-2, -3, -1).$$

Њихов векторски производ је $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -8 & -2 & -2 \\ -2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = (-4, -4, 20)$. Тражена површина је

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + 20^2} = \frac{1}{2}\sqrt{432} = 6\sqrt{3}.$$

Како је са друге стране ова површина $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} CA \cdot BD$ и како је $|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{(-8)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ добијамо да је дужина висине $BD = \dfrac{2P}{CA} = \dfrac{12\sqrt{3}}{6\sqrt{2}} = \sqrt{6}$. ■

Решење 2. Површину троугла $\triangle ABC$ у простору можемо израчунати и преко формуле $P = \frac{1}{2}\sqrt{{P_1}^2 + {P_2}^2 + {P_3}^2}$, где су P_1, P_2 и P_3 следеће детерминанте:

$$P_1 = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 20, \quad P_2 = \begin{vmatrix} y_A & z_A & 1 \\ y_B & z_B & 1 \\ y_C & z_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4, \quad P_3 = \begin{vmatrix} z_A & x_A & 1 \\ z_B & x_B & 1 \\ z_C & x_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -4.$$

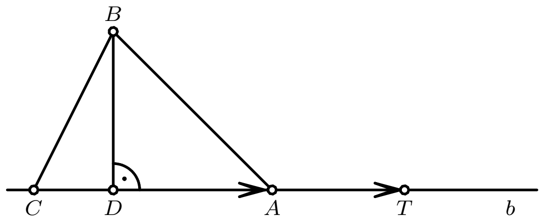
$P = \frac{1}{2}\sqrt{{P_1}^2 + {P_2}^2 + {P_3}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{432} = 6\sqrt{3}.$
Даље смо BD могли да рачунамо као и у претходном решењу, али ћемо и то урадити другачије.
Нађимо координате тачке D која је подножје висине из темена B на страницу CA. Означимо са b праву која садржи страницу CA. Произвољна тачка T са праве b дата је са

$$(x_T, y_T, z_T) = (x_C, y_C, z_C) + t \cdot \overrightarrow{CA} = (5 - 8t, -2t, 2 - 2t)$$

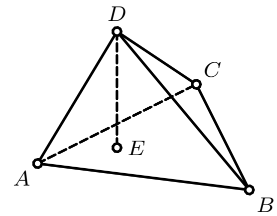
(разлог је јер су вектори $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CT}$ колинеарни, тј. важи $\overrightarrow{CT} = t \cdot \overrightarrow{CA}$).
Како и тачка D припада правој b то ће бити $D(5 - 8t, -2t, 2 - 2t)$, за неку вредност параметра t.
То t одређујемо из услова да су страница CA и висина BD ортогоналне, тј. $CA \perp BD$, па важи $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.
$\overrightarrow{BD} = (2 - 8t, 3 - 2t, 2 - 2t)$, па је

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = (-8, -2, -2) \cdot (2 - 8t, 3 - 2t, 2 - 2t) = 16 - 64t + 6 - 4t + 2 - 4t = 24 - 72t = 0,$$

одакле налазимо $t = \frac{1}{3}$, па је подножје висине из B тачка $D(\frac{7}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$.
Вектор $\overrightarrow{BD} = (-\frac{2}{3}, \frac{7}{3}, \frac{1}{3})$, па је тражена висина $|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{49}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{6}$. ■



Слика уз задатак 6.



Слика уз задатак 7.

7. 5.26 (3),(4). Дате су тачке $A(1,-1,1)$, $B(1,3,1)$, $C(3,1,1)$, и $D(1,1,3)$.

а) Израчунати запремину V пирамиде $ABCD$.

б) Израчунати дужину висине h_D из темена D пирамиде $ABCD$.

Решење. **а)** Одредимо прво следеће векторе: $\overrightarrow{AB}=(0,4,0)$, $\overrightarrow{AC}=(2,2,0)$ и $\overrightarrow{AD}=(0,2,2)$.
Запремина пирамиде $ABCD$ дата је са

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]|=\frac{1}{6}|\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})|=\frac{1}{6}|\begin{vmatrix}0&4&0\\2&2&0\\0&2&2\end{vmatrix}|=\frac{|-16|}{6}=\frac{8}{3}.$$

б) Површина троугла ABC је $P_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$. Како је $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&4&0\\2&2&0\end{vmatrix}=(0,0,-8)$ добијамо да је $P_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|(0,0,-8)|=\frac{1}{2}\cdot 8=4$. Како је запремина пирамиде $ABCD$ једнака $V_{ABCD}=\frac{1}{3}P_{\triangle ABC}\cdot h_D$, одатле добијамо да је $h_D=2$. ■

Напомена. Уколико би као у претходном решењу хтели да одредимо подножје E висине из темена D на страну ABC (тј. пројекцију тачке D на раван ABC), узели би да је произвољна тачка T равни ABC дата са

$$(x_T,y_T,z_T)=(x_A,y_A,z_A)+t\cdot\overrightarrow{AB}+p\cdot\overrightarrow{AC}=(1+2p,-1+4t+2p,1),$$

тј. $\overrightarrow{DE}=(2p,-2+4t+2p,-2)$ па бисмо решавали систем (по t и p) $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AB}=0$, $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.
Његово решење је $t=\frac{1}{2}$, $p=0$, па је подножје $E(1,1,1)$.

Коначно, $h_D=|\overrightarrow{DE}|=2$.

Питање. Шта је једначина равни ABC? (Ово питање мало улази у следећу област)