

14. Испитивање функција

Овде је дат кратак преглед XIII и XIV двочаса вежби. Потребно је да обнове одговарајућу теоријску материју која је обрађена на предавањима и у уџбенику.

Како се највећим делом на вежбама раде задаци из збирке, након броја задатка плавом бојом је означен број задатка у збирци "МАТЕМАТИКА 1" професора Р. Лазовића, Д. Борића и Б. Јованова у форми $p.z$, где је p број поглавља, а z број задатка у том поглављу. Ови задаци са преосталима из збирке (из поглавља "14. Испитивање функција", као и оним из поглавља "15. Други колоквијум" који су везани за ову материју) чине целину довољну за припрему ове области.

Теоријски увод

Испитивање функција је централни и свакако најбитнији део сваког курса математике. Он даје математичку основу за скицирање графика на основу математичке формуле одређених појава које се јављају у економији, природним наукама, техници, физици...

То је и увек 4. задатак на писменом делу испита!

Да не би имали проблема са испитивањем тока функције потребно је да добро свладате решавање једначина и неједначина (то је средњошколска математика), одређивање граничних вредности (лимеса) и рачунање извода функције.

Ми ћемо испитивање функција разложити на седам делова:

1. Област дефинисаности функције (или домен функције)
2. Нуле, знак функције и пресек са y -осом
3. Парност и периодичност функције
4. Граничне вредности функције на крајевима домена и асимптоте функције
5. Први извод, монотоност и локални екстремуми функције
6. Други извод, конвексност и превојне тачке функције
7. Цртање графика функције.

Сада ћемо се детаљније осврнути на сваки од ових делова.

На основу свих претходно одређених тачака цртамо график функције. Уколико се неке 2 тачке не слажу међусобно не настављамо са радом, него се осврнемо и ако можемо утврдимо где је грешка (јер би наставак рада могао да проузрокује још грешака).

На графику означавамо (ако постоје) следеће тачке: нуле, пресек са y -осом – то је тачка $(0, f(0))$, минимуме и максимуме, превојне тачке, затим цртамо асимптоте и означавамо (цртицама) граничне вредности и на крају све то спојимо водећи рачуна о знаку, монотоности и конвексности. Ако се нешто не слаже, то је показатељ да смо начинили неку грешку у рачуну неке од претходних ставки! Такође на позитивном смеру x -осе треба ставити стрелицу и x , а на позитивном смеру y -осе треба ставити стрелицу и $f(x)$.

Наредни графици вам дају представу како изгледа функција (они су добијени коришћењем програмског пакета Мејпл), али на њима морате да означите све горе наведено. Такође од вас се не очекују природне пропорције него само да скицирате график (значи, да водите рачуна о знаку, монотоности и конвексности, као и какав је међусобни однос одговарајућих тачака и правих – шта је пре, шта је горе...). Приближне вредности координата служе за те процене, али се од вас не очекује да то радите на испиту!

Задаци

Испитати ток и скицирати график следећих функција:

1. 14.42. $f(x) = \frac{x^3 - 3x}{x^2 - 1}$.

Решење. 1° Функција $f(x)$ је дефинисана када су дефинисане функције $g(x) = x^3 - 3x$ и $h(x) = x^2 - 1$ (што је увек јер су полиноми дефинисани за свако $x \in \mathbb{R}$) и када је $h(x) = x^2 - 1 \neq 0$, тј. $x^2 \neq 1$, односно $x \neq \pm 1$.

Стога је домен функције f једнак $D = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

2° $f(0) = \frac{0^3 - 3 \cdot 0}{0^2 - 1} = 0$, па је пресек са y -осом тачка $Y(0, 0)$.

Дату функцију можемо представити у облику $f(x) = \frac{x(x^2 - 3)}{x^2 - 1}$.

Одавде одређујемо нуле и знак на основу таблице у којој имамо знак сваког члана понаособ:

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
x	—	—	—	—	—	0	+	+	+	+	+
$x^2 - 3$	+	0	—	—	—	—	—	—	—	0	+
$x^2 - 1$	+	+	+	x	—	—	—	x	+	+	+
$f(x)$	—	0	+	x	—	0	+	x	—	0	+

Добијамо да је функција $f(x)$ има нуле $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ и $x = \sqrt{3}$, као и да је

$f(x) < 0$ за $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-1, 0) \cup (1, \sqrt{3})$, а $f(x) > 0$ за $x \in (-\sqrt{3}, -1) \cup (0, 1) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$.

3° Како је $f(-x) = \frac{-x((-x)^2 - 3)}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x(x^2 - 3)}{x^2 - 1} = -f(x)$ за $\forall x \in D$ добијамо да је функција $f(x)$ непарна.

График ове функције је централно симетричан у односу на координатни почетак $O(0, 0)$.

Функција $f(x)$ није ни периодична.

Доказ: претпоставимо супротно, тј. да је периодична са периодом T . Тада је $f(x + T) = f(x)$ за $\forall x \in D$, али ако би узели $x = -1 - T$ добијамо контрадикцију $f(-1) = f(-1 - T)$ — то је немогуће јер за -1 функција није дефинисана, а за $-1 - T$ јесте).

4° Како је домен $D = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ потребно је одредити следећих шест лimesа:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3x}{x^2 - 1} \cdot \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \frac{3}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = -\infty \text{ јер кад } x \rightarrow -\infty \text{ онда } \frac{3}{x} \rightarrow 0 \text{ и } \frac{1}{x^2} \rightarrow 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3 - 3x}{x^2 - 1} = \left[\frac{(-1)^3 - 3 \cdot (-1)}{(-1)^2 - 1} = \frac{4}{1 - 1} = \frac{4}{0^+} \right] = +\infty.$$

Потпуно аналогно се добијају $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ и $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ можемо израчунати као и $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, али ћемо овде урадити на други начин, помоћу Лопиталовог

$$\text{правила јер је то лimes облика } \frac{\infty}{\infty}: \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 3x}{x^2 - 1} \stackrel{\text{л.п.}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 3}{2x} \stackrel{\text{л.п.}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{2} = +\infty.$$

Асимптоте: Како смо добили да је $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$ (а и $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$) права $x = -1$ је вертикална асимптота.

Како је $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ (а и $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$) и права $x = 1$ је вертикална асимптота.

Како су $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ бесконачни функција нема хоризонталних асимптота, али може имати косих.

Како се сви лimesи потпуно аналогно рачунају и за $x \rightarrow -\infty$ и за $x \rightarrow +\infty$, свуда ћемо писати $x \rightarrow \pm\infty$.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^3 - 3x}{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 3x}{x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 3x}{x^3 - x} \cdot \frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1.$$

Овај лimes је коначан и $\neq 0$, па тражимо коефицијент n :

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - k \cdot x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 3x}{x^2 - 1} - 1 \cdot x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 3x - x^3 + x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x}{x^2 - 1} \stackrel{\text{л.п.}}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2}{2x} = \left[\frac{-2}{\infty} \right] = 0.$$

И овај лimes је коначан. Стога је права $y = 1 \cdot x + 0$, тј. $y = x$ обострана коса асимптота.

5° $f'(x) = \frac{x^4 + 3}{(x - 1)^2(x + 1)^2}$. Сви чланови у овом изразу су позитивни па добијамо:

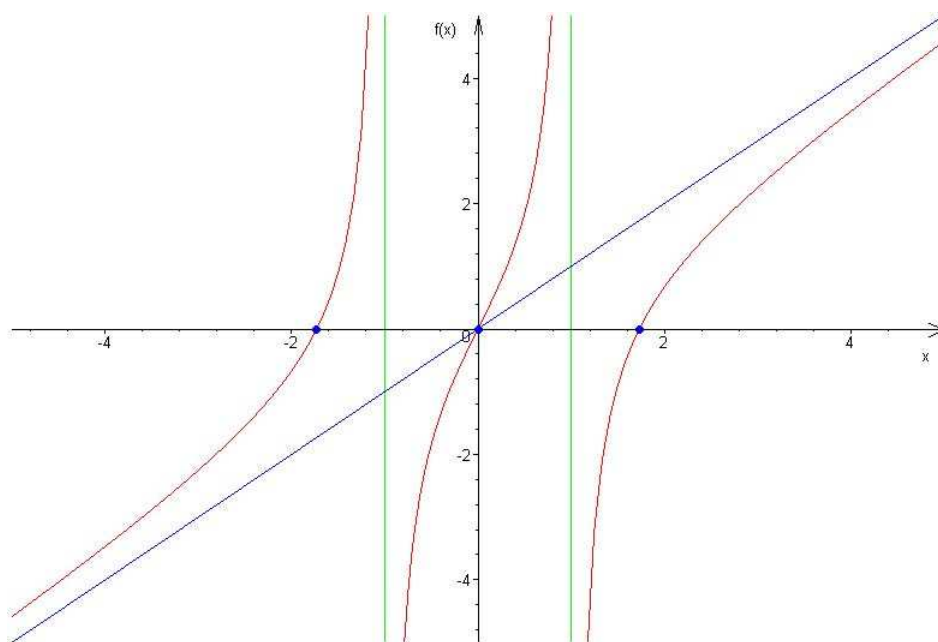
	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$x^4 + 3$	+	+	+	+	+
$(x - 1)^2$	+	+	+	x	+
$(x + 1)^2$	+	x	+	+	+
$f'(x)$	+	x	+	x	+
$f(x)$	↗	x	↗	x	↗

Функција је растућа на интервалима: $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ и $(1, +\infty)$. Нема екстремних тачака.

6° $f''(x) = \frac{-4x(x^2 + 3)}{(x-1)^3(x+1)^3}$. Знак $(x-1)^3$ је исти као и знак од $x-1$ и слично $(x+1)^3$ има исти знак као и $x+1$ (јер су у питању непарни степени). Како је увек $x^2 + 3 > 0$ јер је $x^2 \geq 0$, имамо таблицу:

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$-4x$	+	+	+	0	-	-	-
$x^2 + 3$	+	+	+	+	+	+	+
$(x-1)^3$	-	-	-	-	-	x	+
$(x+1)^3$	-	x	+	+	+	+	+
$f''(x)$	+	x	-	0	+	x	-
$f(x)$	\cup	x	\cap	P	\cup	x	\cap

Функција има једну превојну тачку $P(0,0)$.



2. 14.57. $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$.

Решење. 1° Функција $f(x)$ је дефинисана када су дефинисана функција $g(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ (што је увек јер су полиноми дефинисани за свако $x \in \mathbb{R}$ и $1+x^2 \geq 1+0 > 0$, па је $1+x^2 \neq 0$) и када је $-1 \leq h(x) \leq 1$. Ово је двострука неједначина која се своди на $-1 \leq h(x)$ и $h(x) \leq 1$ (укупно решење се добија као пресек одговарајућих решења). Прву од ових неједначина $-1 \leq h(x)$, тј. $-1 \leq \frac{2x}{1+x^2}$ решавамо тако што све пребацимо на десну страну: $0 \leq \frac{2x}{1+x^2} + 1 = \frac{1+2x+x^2}{1+x^2} = \frac{(1+x)^2}{1+x^2}$. Како су квадрати увек позитивни добијамо да је решење ове неједначине $(-\infty, +\infty)$, тј. цео \mathbb{R} . Потпуно аналогно добијамо да је \mathbb{R} решење и друге неједначине.

Тиме смо добили да је дата функција дефинисана за свако $x \in \mathbb{R}$, тј. $D = (-\infty, +\infty)$.

2° $f(0) = \arcsin \frac{2 \cdot 0}{1+0^2} = 0$, па је пресек са y -осом тачка $Y(0,0)$.

За функцију $\arcsin g(x)$ (кад је дефинисана, што нам у овом задатку не представља проблем јер је увек дефинисана) важи да има исти знак као и функција $g(x)$. Стога нуле и знак одређујемо на основу таблице:

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$2x$	-	0	+
$1+x^2$	+	+	+
$\frac{2x}{1+x^2}$	-	0	+
$f(x)$	-	0	+

Добијамо да је функција $f(x)$ има нулу $x=0$, као и да је $f(x) < 0$ за $x \in (-\infty, 0)$, а $f(x) > 0$ за $x \in (0, +\infty)$.

3° Како је $f(-x) = \arcsin \frac{2 \cdot (-x)}{1+(-x)^2} = \arcsin \frac{-2x}{1+x^2} = -\arcsin \frac{2x}{1+x^2} = -f(x)$ за $\forall x \in D \Rightarrow f(x)$ је непарна.

График ове функције је централно симетричан у односу на координатни почетак $O(0,0)$.

Функција $f(x)$ није ни периодична.

Доказ: претпоставимо супротно, тј. да је периодична са периодом T , тј. $f(x+T) = f(x)$ за $\forall x \in D$. Тада се и нуле периодично понављају, па ако би узели $x = -T$ добијемо контрадикцију $f(0) = f(-T)$ – што је немогуће јер $f(0) = 0$, а $f(-T) < 0$.

4° Како је домен $D = (-\infty, +\infty)$ потребно је одредити два лimesa: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Њих истовремено

$$\text{тражимо: } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arcsin \left(\frac{2x}{1+x^2} \cdot \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arcsin \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} + 1} = \arcsin 0 = 0.$$

Како домен нема прекида (тј. $f(x)$ је дефинисана на целом скупу \mathbb{R}) то $f(x)$ нема вертикалних асимптота.

Како је $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = 0$ права $y = 0$ је обострана хоризонтална асимптота.

Како функција има хоризонталну асимптоту (са обе стране) то она нема косих асимптота.

$$5^\circ \quad f'(x) = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2 \sqrt{\frac{(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2}}} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2 \cdot \frac{|x^2-1|}{x^2+1}}, \text{ па добијамо да је } f'(x) = \begin{cases} \frac{-2}{1+x^2}, & x < -1 \\ \frac{2}{1+x^2}, & -1 < x < 1 \\ \frac{-2}{1+x^2}, & x > 1 \end{cases}.$$

Одавде добијамо знак првог извода:

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	x	$+$	x	$-$
$f(x)$	\searrow	\min	\nearrow	\max	\searrow

Функција је растућа на $(-1, 1)$, а опадајућа на $(-\infty, -1)$, и на $(1, +\infty)$.

Минимум је тачка $M_1(-1, -\frac{\pi}{2})$, а максимум је $M_2(1, \frac{\pi}{2})$.

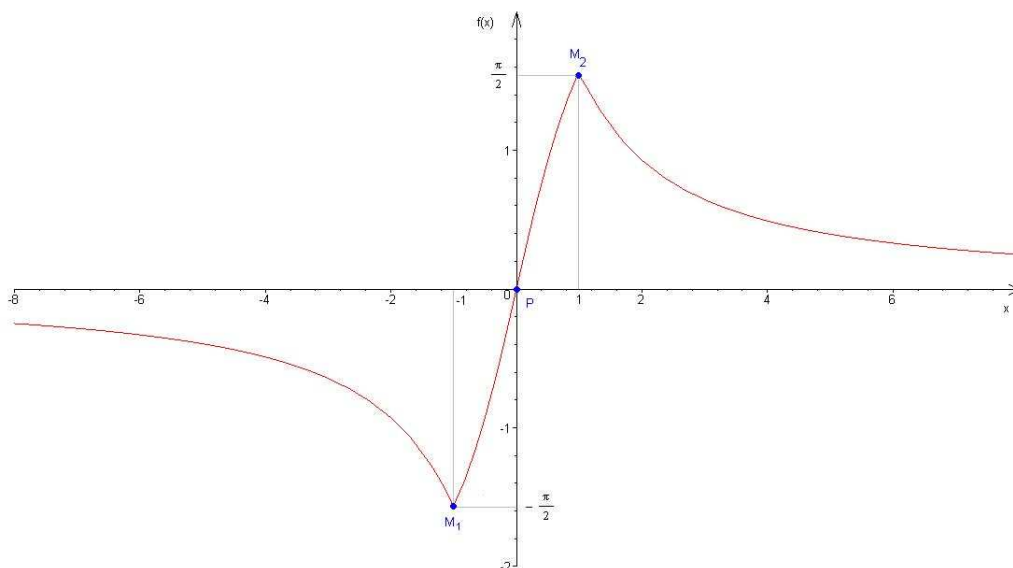
Напомена. Нагласимо да у тачкама M_1 и M_2 функција $f(x)$ има шпиз (у тим тачкама функција јесте непрекидна, али није диференцијабилна). Коефицијент правца тангенте на криву са леве стране тачке M_1 је $k_1 = f'_-(-1) = -1$, а са десне стране је $k_2 = f'_+(-1) = 1$ (стога се ове 2 криве у тачки M_1 секу под углом од 90° — прва са x -осом заклапа угао од 45° јер је $k_1 = \tan \varphi_1 = -1 \Rightarrow \varphi_1 = -45^\circ$ и слично за другу имамо да је $k_2 = \tan \varphi_2 = 1 \Rightarrow \varphi_2 = 45^\circ$).

(Ова анализа шпицева се не очекује од студената на испиту!)

$$6^\circ \quad f''(x) = \begin{cases} \frac{4x}{(1+x^2)^2}, & x < -1 \\ \frac{-4x}{(1+x^2)^2}, & -1 < x < 1 \\ \frac{4x}{(1+x^2)^2}, & x > 1 \end{cases} \text{ и одавде имамо таблицу:}$$

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	x	$+$	0	$-$	x	$+$
$f(x)$	\cap	P_1	\cup	P_2	\cap	P_3	\cup

Функција има превојне тачке: $P_1 = M_1(-1, -\frac{\pi}{2})$, $P_2 = Y(0, 0)$ и $P_3 = M_2(1, \frac{\pi}{2})$.



3. $f(x) = \ln \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2$.

Решење. 1° Функција $f(x)$ је дефинисана када је дефинисана функција $g(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2$ (што је за $x \neq 0$) и када је $g(x) > 0$, а како је $g(x)$ тачан квадрат то је еквивалентно са $1 - \frac{1}{x} \neq 0$ одакле добијамо и $x \neq 1$.

Тиме смо добили да је дата функција дефинисана када је $x \neq 0$ и $x \neq 1$, тј. $D = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

2° Пресек са y -осом немамо јер $0 \notin D$.

$f(x) > 0$ кад је $\ln \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 > 0 = \ln 1$, односно кад је $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 > 1$, тј. $\frac{1-2x}{x^2} > 0$, па добијамо да функција $f(x)$ има нулу $x = \frac{1}{2}$, као и да је $f(x) > 0$ за $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{2})$, а $f(x) < 0$ за $x \in (\frac{1}{2}, 1) \cup (1, +\infty)$.

3° Функција $f(x)$ није ни парна ни непарна ни периодична (то закључујемо на основу D).

4° Како је домен $D = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$ потребно је одредити следећих шест лimesа:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \ln 1 = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \left[\ln \left(1 - \frac{1}{0^-}\right)^2 = \ln(+\infty)^2 = \ln(+\infty) \right] = +\infty.$$

Потпуно аналогно се добија и $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \left[\ln \left(1 - \frac{1}{1^-}\right)^2 = \ln(1 - 1^+)^2 = \ln(0^-)^2 = \ln(0^+) \right] = -\infty.$$

Потпуно аналогно се добија и $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$.

Како је $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$ (а и $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$) права $x = 0$ је вертикална асимптота (и то са обе стране).

Како је $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ (а и $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$) и права $x = 1$ је вертикална асимптота (са обе стране).

Како је $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ права $y = 0$ је обострана хоризонтална асимптота.

Како функција има хоризонталну асимптоту (са обе стране) то она нема косих асимптота.

5° $f'(x) = \frac{2}{x(x-1)}$, па имамо табелу:

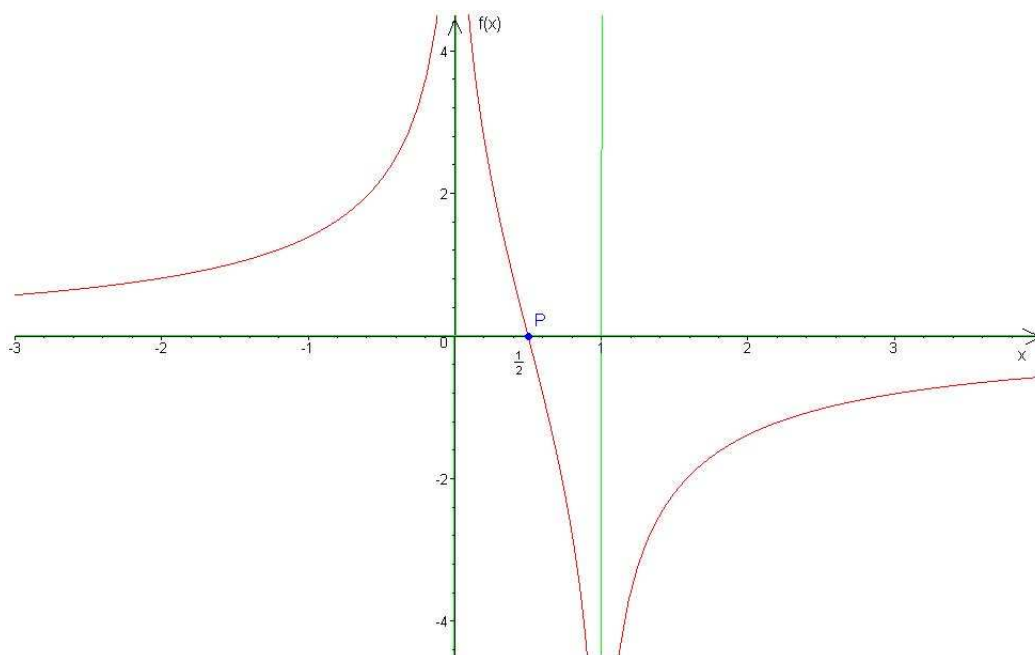
	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
x	—	x	+	+	+
$x-1$	—	—	—	x	+
$f'(x)$	+	x	—	x	+
$f(x)$	↗	x	↘	x	↗

Функција је растућа на $(-\infty, 0)$ и на $(1, +\infty)$, а опадајућа на $(0, 1)$. Локалних екстрема нема.

6° $f''(x) = \frac{2-4x}{x^2(x-1)^2}$ и одавде имамо таблицу:

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$2-4x$	+	+	+	0	—	—	—
x^2	+	x	+	+	+	+	+
$(x-1)^2$	+	+	+	+	+	x	+
$f''(x)$	+	x	+	0	—	x	—
$f(x)$	∪	x	∪	P	∩	x	∩

Функција има превојну тачку: $P(0, 0)$.



4. 4. - испит октобар 2007. $f(x) = (3x - 1)e^{2/x}$.

Решење. 1° Област дефинисаности је $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

2° Нула је $x = \frac{1}{3}$. За $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{3})$ је $f(x) < 0$, а за $x \in (\frac{1}{3}, +\infty)$ је $f(x) > 0$. Ово можемо представити таблично:

		0		$\frac{1}{3}$	
f	-	x	-	0	+

3° Функција није ни парна, ни непарна, ни периодична.

4° $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Правна $x = 0$ је вертикална асимптота (са десне стране). Хоризонталних асимптота нема. Права $y = 3x + 5$ је обострана коса асимптота.

Напомена. Косу асимптоту можемо добити и користећи Маклоренов развој: када $x \rightarrow \pm\infty$ имамо да $\frac{2}{x} \rightarrow 0$ па је

$$(3x - 1)e^{2/x} = (3x - 1) \cdot \left(1 + \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 3x - 1 + 6 - \underbrace{\frac{2}{x}}_{\rightarrow 0} + o(1) = 3x + 5 + o(1).$$

Стога је права $y = 3x + 5$ обострана коса асимптота.

5° Први извод је $f'(x) = \frac{3x^2 - 6x + 2}{x^2} e^{2/x}$. Стога имамо следећу таблицу за знак од $f'(x)$ и монотоност $f(x)$:

		0		$1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$		$1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$	
f'	+	x	+	0	-	0	+
f	\nearrow	x	\nearrow	M_1	\searrow	M_2	\nearrow

Локални максимум је тачка $M_1(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, (2 - \sqrt{3})e^{3+\sqrt{3}}) \approx (0.42, 30.42)$.

Локални минимум је тачка $M_2(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}, (2 + \sqrt{3})e^{3-\sqrt{3}}) \approx (1.58, 13.26)$.

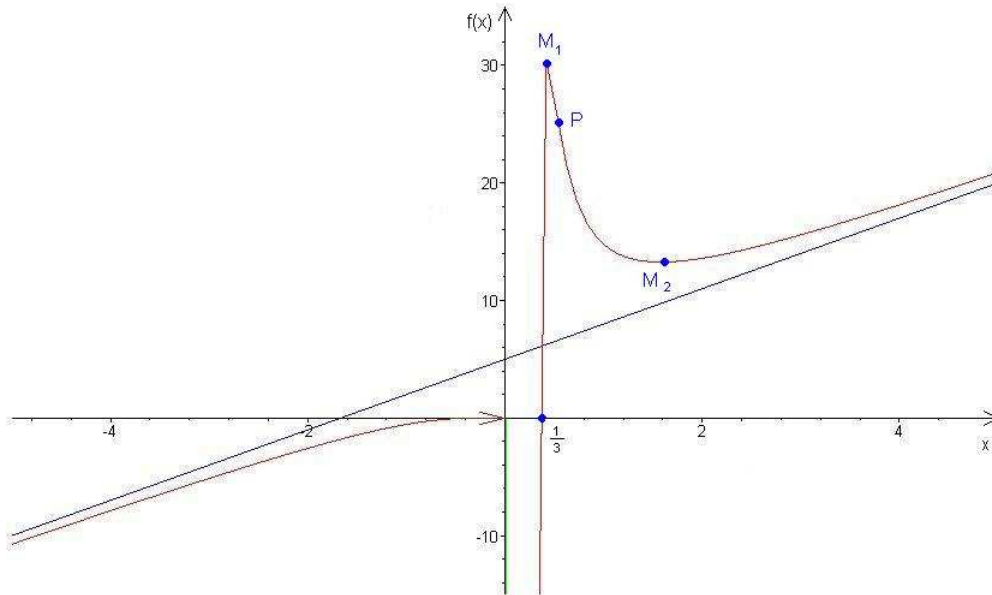
Како је $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 0$ то ће график функције улазити хоризонтално ($k = 0$ код $y = k \cdot x + n$) у нулу. Ово је означено стрелицом на доњем графику (јер за $x = 0$ функција $f(x)$ није дефинисана).

(Под којим углом график улази у нулу се не очекује од студената да раде на испиту!)

6° Други извод је $f''(x) = \frac{8x - 4}{x^4} e^{2/x}$. Стога имамо следећу таблицу за знак од $f''(x)$ и конвексност $f(x)$:

		0		$\frac{1}{2}$	
f''	-	x	-	0	+
f	\cap	x	\cap	P	\cup

Превојна тачка је $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}e^4) \approx (0.5, 27.3)$.



5. $f(x) = 1 - x - \sqrt{\frac{x^3}{x+3}}$.

Решење. 1° Функција $f(x)$ је дефинисана када је дефинисана функција $g(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x+3}}$, тј. кад је $\frac{x^3}{x+3}$ дефинисано (за $x \neq -3$) и када је $\frac{x^3}{x+3} \geq 0$. Последњу неједначину решавамо помоћу таблице:

	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, 0)$	0	$(0, +\infty)$
x^3	-	-	-	0	+
$x+3$	-	x	0	+	+
$\frac{x^3}{x+3}$	+	x	-	0	+

Тиме смо добили да су корен, а самим тим и функција $f(x)$, дефинисани када је $x < -3$ или кад је $x \geq 0$, тј. $D = (-\infty, -3) \cup [0, +\infty)$.

2° Пресек са y -осом је $Y(0, 1)$.

Нађимо када је $f(x) = 0$. Тад решавамо ирационалну једначину $1 - x - \sqrt{\frac{x^3}{x+3}} = 0$. Када пребацимо корен на другу страну добијамо $1 - x = \sqrt{\frac{x^3}{x+3}}$. Да бисмо смели да квадрирамо потребно је да су обе стране истог знака, тј. како је корен увек ненегативан, треба и да је $1 - x \geq 0$, тј. $x \leq 1$ (то је услов под којим смо да квадрирамо; поред тог услова све време водимо и рачуна о D јер је тада функција дефинисана). Када квадрирамо добијамо једначину $1 - 2x + x^2 = \frac{x^3}{x+3}$, односно када помножимо са $x+3$ (што смо јер $-3 \notin D$) добијамо квадратну једначину $x^2 - 5x + 3 = 0$. Њена решења су $x_1 = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$ (ово решење задовољава и услов $x \leq 1$ и припада D) и $x_2 = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$ (ово решење отпада јер не задовољава услов $x \leq 1$). Тиме смо добили да ова функцију има само једну нулу $N(\frac{5 - \sqrt{13}}{2}, 0)$.

Одредимо када је $f(x) > 0$. То је еквивалентно са ирационалном неједначином $1 - x > \sqrt{\frac{x^3}{x+3}}$. Да би смо смели да квадрирамо потребно је да обе стране буду ненегативне (корен је то увек, али за леву страну опет долазимо до услова $1 - x \geq 0$, тј. $x \leq 1$). Долазимо до неједначине $1 - 2x + x^2 > \frac{x^3}{x+3}$. Сада није zgodno да множимо са $x+3$ (јер овај израз може бити и негативан), него ћемо да све пребацимо на леву страну и сведемо на заједнички именилац: $1 - 2x + x^2 - \frac{x^3}{x+3} > 0$, тј. $\frac{x^2 - 5x + 3}{x+3} > 0$. За овај израз имамо таблицу:

	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, \frac{5-\sqrt{13}}{2})$	$\frac{5-\sqrt{13}}{2}$	$(\frac{5-\sqrt{13}}{2}, \frac{5+\sqrt{13}}{2})$	$\frac{5+\sqrt{13}}{2}$	$(\frac{5+\sqrt{13}}{2}, +\infty)$
$x^2 - 5x + 3$	+	+	+	0	-	0	+
$x+3$	-	x	+	+	+	+	+
$\frac{x^2 - 5x + 3}{x+3}$	-	x	+	0	-	0	+

па је решење неједначине $\frac{x^2 - 5x + 3}{x + 3} > 0$ једнако $x \in (-3, \frac{5-\sqrt{13}}{2}) \cup (\frac{5+\sqrt{13}}{2}, +\infty)$. Када још убацимо услов да мора бити $x \leq 1$ и $x \in D$ добијамо да је $f(x) > 0$ за $x \in [0, \frac{5-\sqrt{13}}{2})$. $f(x) < 0$ на свим осталим интервалима на којима је функција дефинисана (и није нула), тј. за $x \in (\frac{1}{2}, 1) \cup (1, +\infty)$. Ово све можемо представити таблично као

	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, 0)$	0	$(0, \frac{5-\sqrt{13}}{2})$	$\frac{5-\sqrt{13}}{2}$	$(\frac{5-\sqrt{13}}{2}, +\infty)$
$f(x)$	$-$	x	x	$+$	$+$	0	$-$

3° Функција $f(x)$ није ни парна ни непарна ни периодична (то закључујемо на основу D).

4° Како је домен $D = (-\infty, -3) \cup [0, +\infty)$ потребно је одредити следећа три лимеса и једну вредност функције:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x), f(0) \text{ и } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - x - \sqrt{\frac{x^3}{x+3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - x - \sqrt{\frac{x^3}{x+3}} \right) \cdot \frac{1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{x+3}}}{1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{x+3}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - 2x + x^2 - \frac{x^3}{x+3}}{1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{x+3}}} = \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 5x + 3}{(x+3)(1-x) - \sqrt{x^3(x+3)}} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 5x + 3}{-x^2 - 2x + 3 - \sqrt{x^4 + 3x}} \cdot \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}}{-1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} - \sqrt{1 + \frac{3}{x}}} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

(овде смо користили да је $x+3 = -|x+3| = -\sqrt{(x+3)^2}$ када смо га убацивали под корен; разлог је јер због $x \rightarrow -\infty$ важи $x+3 < 0$).

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} 1 - x - \sqrt{\frac{x^3}{x+3}} = \left[1 - (-3) - \sqrt{\frac{(-3)^3}{-3^- + 3}} = 4 - \sqrt{\frac{-27}{0^-}} = 4 - \sqrt{+\infty} \right] = -\infty.$$

$f(0) = 1$ смо већ израчунали (овде не тражимо граничну вредност, него вредност функције јер $0 \in D$).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x - \sqrt{\frac{x^3}{x+3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x - \sqrt{\frac{x^2}{1 + \frac{3}{x}}} = [1 - (+\infty) - \sqrt{+\infty}] = -\infty.$$

Како је $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty$ права $x = -3$ је вертикална асимптота (са леве стране).

Како је $f(0) = 1$ коначан број, то овде иако је прекид немамо вертикалну асимптоту.

Како је $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$ права $y = -\frac{1}{2}$ је лева хоризонтална асимптота.

Како је $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ то са десне стране функција нема хоризонталну асимптоту, али овде може имати косу асимптоту.

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x - \sqrt{\frac{x^3}{x+3}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x - \sqrt{\frac{x^3}{x+3}}}{x} \cdot \frac{\frac{1}{x} = \sqrt{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} - 1 - \sqrt{\frac{x}{x+3}}}{1} = \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} - 1 - \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{3}{x}}} &= -2. \end{aligned}$$

Овај лимес је коначан и $-2 \neq 0$, па тражимо коефицијент n (овде $x \rightarrow +\infty$, па је $x+3 > 0$, тј. $x+3 = \sqrt{(x+3)^2}$):

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - k \cdot x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x - \sqrt{\frac{x^3}{x+3}} - (-2) \cdot x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + x - \sqrt{\frac{x^3}{x+3}} \right) \cdot \frac{1 + x + \sqrt{\frac{x^3}{x+3}}}{1 + x + \sqrt{\frac{x^3}{x+3}}} = \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2x + x^2 - \frac{x^3}{x+3}}{1 + x + \sqrt{\frac{x^3}{x+3}}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 + 7x + 3}{(x+3)(1+x) + \sqrt{x^3(x+3)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 + 7x + 3}{x^2 + 4x + 3 + \sqrt{x^4 + 3x}} \cdot \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 + \frac{7}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} + \sqrt{1 + \frac{3}{x}}} &= \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

И овај лимес је коначан. Стога је права $y = -2x + \frac{5}{2}$ десна коса асимптота.

5° $f'(x) = -1 - (x + \frac{9}{2}) \cdot \sqrt{\frac{x}{(x+3)^3}}$, па опет решавамо ирационалне једначине и неједначине. Решаваћемо $f'(x) > 0$ (потпуно аналогно би ишла и одговарајућа једначина) јер се увек трудимо код ирационалних неједначина да нам корен буде на мајој страни (тако имамо само 1 случај, док кад је корен на већој страни имамо 2 одвојена

случаја): $-1 - (x + \frac{9}{2}) \cdot \sqrt{\frac{x}{(x+3)^3}} > 0$, односно $-(x + \frac{9}{2}) \cdot \sqrt{\frac{x}{(x+3)^3}} > 1$. Да би смели да квадрирамо потребно је да су изрази и на левој и на десној страни позитивни, тј. треба да важи услов $x < -\frac{9}{2}$ (поред тог услова и корен треба да је дефинисан, тј. $x \in D$). Када квадрирамо и средимо овај израз добијамо $I = \frac{-\frac{27}{4}(x+4)}{(x+3)^3} > 0$, а њега решавамо помоћу таблице

	$(-\infty, -4)$	-4	$(-4, -3)$	-3	$(-3, +\infty)$
$-\frac{27}{4}$	—	—	—	—	—
$x+4$	—	0	+	+	+
$(x+3)^3$	—	—	—	x	+
I	—	0	+	x	—

Дакле, решење неједначине $I > 0$ је $x \in (-4, -3)$, али пресек тога решења са условом $x < -\frac{9}{2}$ је празан скуп, тј. никада није $f'(x) > 0$. Значи, увек је $f'(x) > 0$, тј. имамо таблицу:

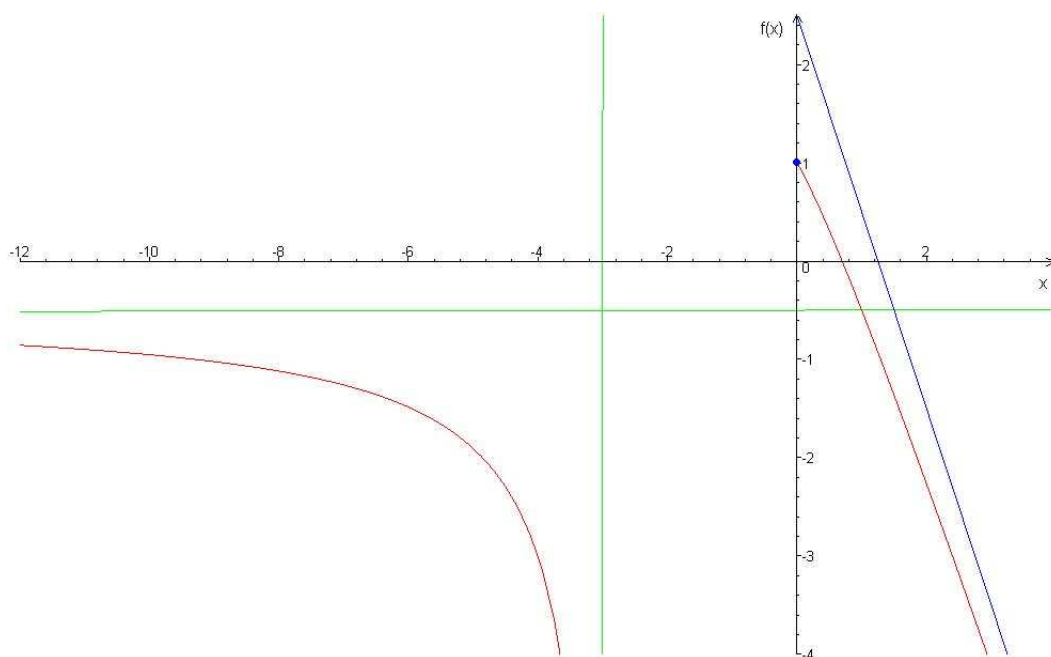
	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	—	x	x	x	—
$f(x)$	\searrow	x	x		\searrow

Функција је опадајућа на $(-\infty, -3)$ и на $(0, +\infty)$. Локалних максимум је тачка $M(0, 1)$.

6° $f''(x) = \frac{-27}{4\sqrt{x(x+3)^5}}$. Како је корен увек позитиван када је дефинисан имамо таблицу:

	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f''(x)$	—	x	x	x	—
$f(x)$	\cap	x	x		\cap

Функција нема превојних тачака.



6. $f(x) = \frac{2(x-1)^2}{2x-1} e^{\frac{1}{x-1}}$

Решење. 1° Функција $f(x)$ је дефинисана када су дефинисане функције $g(x) = \frac{2(x-1)^2}{2x-1}$ и $h(x) = e^{\frac{1}{x-1}}$.

Функција $g(x) = \frac{2(x-1)^2}{2x-1}$ је дефинисана када су дефинисане функције $2(x-1)^2$ и $2x-1$ (то је за свако $x \in \mathbb{R}$) и кад је $2x-1 \neq 0$, тј. за $x \neq \frac{1}{2}$.

Функција $h(x) = e^{\frac{1}{x-1}}$ је дефинисана када је дефинисана функција $\frac{1}{x-1}$, а то је за $x \neq 1$.

Стога је функција $f(x)$ дефинисана када је $x \neq \frac{1}{2}$ и $x \neq 1$, односно домен или област дефинисаности функције f је $D = (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1) \cup (1, +\infty)$.

2° $f(0) = \frac{2(0-1)^2}{2 \cdot 0 - 1} e^{\frac{1}{0-1}} = \frac{-2}{e}$, па је пресек са y -осом тачка $Y(0, \frac{-2}{e}) \approx (0, -0.736)$.

Увек је $e^{\frac{1}{x-1}} > 0$, а $2(x-1)^2 = 0$ за $x = 1$, па би $x = 1$ била једина нула да 1 припада домену D (овако функција f нема нула). Како је увек $e^{\frac{1}{x-1}} > 0$, $2(x-1)^2 > 0$ за свако $x \in D$ и $2x-1 > 0$ за $x > \frac{1}{2}$, а $2x-1 < 0$ за $x < \frac{1}{2}$ добијамо да је функција $f(x) < 0$ за $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$, а $f(x) > 0$ за $x \in (\frac{1}{2}, 1) \cup (1, +\infty)$.

3° Како домен $D = (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1) \cup (1, +\infty)$ није симетричан у односу на 0 функција $f(x)$ није ни парна ни непарна (II начин је: $f(-2) = -\frac{18}{5}e^{-\frac{1}{3}} \neq \pm \frac{2}{3}e = \pm f(2)$, па није ни парна ни непарна, јер смо нашли вредност $x = 2 \in D$ за коју није испуњено ни својство парности ни непарности – по дефиницији оба својства морају да важе $\forall x \in D$).

Функција $f(x)$ није ни периодична. (доказ: претпоставимо супротно, тј. да је периодична са периодом T . Тада је $f(x+T) = f(x) \forall x \in D$, али ако би узели $x = \frac{1}{2} - T$ добијамо контрадикцију $f(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2} - T)$ – то је немогуће јер за $\frac{1}{2}$ функција није дефинисана, а за $\frac{1}{2} - T$ јесте).

4° Како је домен $D = (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1) \cup (1, +\infty)$ потребно је одредити следећих шест лимеса:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x), \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ јер кад $x \rightarrow -\infty$ онда $\frac{1}{x-1} \rightarrow 0$, па $e^{\frac{1}{x-1}} \rightarrow e^0 = 1$, а $\frac{2(x-1)^2}{2x-1} = \frac{2x^2 - 4x + 2}{2x-1} = \frac{2x-4+\frac{2}{x}}{2-\frac{1}{x}} \rightarrow -\infty$ кад $x \rightarrow -\infty$ јер $\frac{1}{x} \rightarrow 0$.

$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = -\infty$ јер кад $x \rightarrow \frac{1}{2}^-$ онда имамо да $\frac{1}{x-1} \rightarrow -2$, па $e^{\frac{1}{x-1}} \rightarrow e^{-2} > 0$, $2(x-1)^2 \rightarrow 2(\frac{1}{2}-1)^2 = \frac{1}{2} > 0$ и $2x-1 \rightarrow 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0^-$.

Потпуно аналогно се добија $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$ јер кад $x \rightarrow 1^-$ онда $\frac{1}{x-1} \rightarrow -\infty$, па $e^{\frac{1}{x-1}} \rightarrow 0$, а и $\frac{2(x-1)^2}{2x-1} \rightarrow \frac{2(1-1)^2}{2 \cdot 1 - 1} = 0$.

За израчунавање $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ потребно је коришћење Лопиталовог правила јер је то лимес облика $0 \cdot \infty$ (прво ћемо свести на лимес облика $\frac{\infty}{\infty}$, па онда можемо да применимо Лопиталово правило; са $\frac{0}{0}$ би се добио тежи лимес!):

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x-1)^2}{2x-1} e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{\frac{2x-1}{2(x-1)^2}} \stackrel{\text{л.п.}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-\frac{(x-1)^2}{x}}{-\frac{(x-1)^3}{(x-1)^2}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{x} \stackrel{\text{л.п.}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-\frac{(x-1)^2}{1}}{-\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{1} = +\infty.$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (потпуно аналогно као кад $x \rightarrow -\infty$).

Како смо добили да је $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = -\infty$ (а и $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty$) права $x = \frac{1}{2}$ је вертикална асимптота.

Како је $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ и права $x = 1$ је вертикална асимптота.

Како су $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ бесконачни функција нема хоризонталних асимптота, али може имати косих.

Како се сви лимеси потпуно аналогно рачунају и за $x \rightarrow -\infty$ и за $x \rightarrow +\infty$, свуда ћемо писати $x \rightarrow \pm\infty$.

$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2(x-1)^2}{(2x-1)x} e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2 - \frac{4}{x} + 2}{2 - \frac{1}{x}} e^{\frac{1}{x-1}} = \frac{2}{2} \cdot e^0 = 1$. Коефицијент n добијамо након мало сре-

ђивања: $n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - k \cdot x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2(x-1)^2 e^{\frac{1}{x-1}} - (2x^2 - x)}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2(1 - \frac{1}{x}) \cdot \frac{e^{\frac{1}{x-1}} - 1}{\frac{1}{x-1}} - 3 + \frac{2}{x}}{2 - \frac{1}{x}} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 1 - 3 + 0}{2} = -\frac{1}{2}$. Стога је права $y = x - \frac{1}{2}$ обострана коса асимптота.

5° $f'(x) = 2 \frac{e^{\frac{1}{x-1}}(2x^2 - 4x + 1)}{(2x-1)^2}$. Како је увек $e^{\frac{1}{x-1}} > 0$ и $(2x-1)^2 > 0$ ($x = \frac{1}{2} \notin D$), знак првог извода зависи само од квадратног тринома $2x^2 - 4x + 1$, чије су нуле $1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$:

	$(-\infty, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$	$1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$	$(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, 1)$	1	$(1, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2})$	$1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$	$(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$
$e^{\frac{1}{x-1}}$	+	+	+	+	+	x	+	+	+
$2x^2 - 4x + 1$	+	0	-	-	-	-	-	0	+
$(2x-1)^2$	+	+	+	x	+	+	+	+	+
$f'(x)$	+	0	+	x	+	x	+	0	+
$f(x)$	\nearrow	max	\searrow	x	\searrow	x	\searrow	min	\nearrow

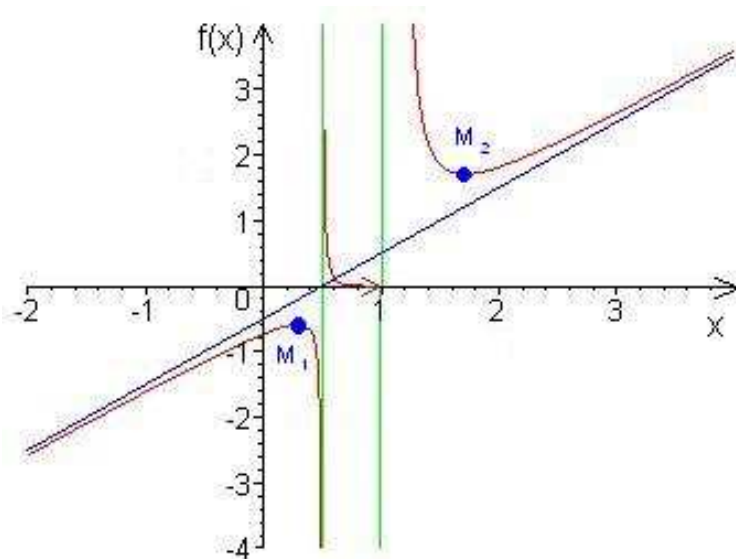
Потребно је још одредити вредности у локалном максимуму и локалном минимуму: $f_{\max} = f(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{e^{-\sqrt{2}}}{1 - \sqrt{2}}$ и $f_{\min} = f(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{e^{\sqrt{2}}}{1 + \sqrt{2}}$. Стога имамо да је локални максимум тачка $M_1(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{e^{-\sqrt{2}}}{1 - \sqrt{2}}) \approx (0.293, -0.587)$, а локални минимум тачка $M_2(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{e^{\sqrt{2}}}{1 + \sqrt{2}}) \approx (1.707, 1.704)$.

Да не бисмо оптерећивали график са бројевима који заузимају доста места означимо са $a = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $b = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

6° $f''(x) = 2 \frac{e^{\frac{1}{x-1}}(2x^2 - 2x + 1)}{(2x-1)^3(x-1)^2}$. Како је увек $e^{\frac{1}{x-1}} > 0$, $2x^2 - 2x + 1 > 0$ (јер је $a = 2 > 0$, а $D = -4 < 0$) и $(x-1)^2 > 0$ ($x = 1 \notin D$), знак првог извода зависи само од члана $(2x-1)^3$:

	$(-\infty, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$e^{\frac{1}{x-1}}$	+	+	+	x	+
$2x^2 - 2x + 1$	+	+	+	+	+
$(2x-1)^3$	-	x	+	+	+
$(x-1)^2$	+	+	+	x	+
$f''(x)$	-	x	+	x	+
$f(x)$	\cap	x	\cup	x	\cup

Функција нема превојних тачака.



7. $f(x) = \frac{x}{1 + \ln x}$.

Решење. 1° Како је $1 + \ln x \neq 0$ за $x \neq e^{-1} = \frac{1}{e}$ и логаритам $\ln x$ је дефинисан за $x > 0$ имамо да је домен функције: $D = (0, \frac{1}{e}) \cup (\frac{1}{e}, +\infty)$.

2° На скупу D на коме је дефинисана, ова функција нема нула. Знак функције у области D зависи само од знака имениоца, па имамо да је

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{1}{e})$	$\frac{1}{e}$	$(\frac{1}{e}, +\infty)$
x	x	x	+	x	+
$1 + \ln x$	x	x	-	x	+
$f(x)$	x	x	-	x	+

Ово можемо записати и као: $f(x) < 0$ за $x \in (0, \frac{1}{e})$, $f(x) > 0$ за $x \in (\frac{1}{e}, +\infty)$.

3° Функција није ни парна, ни непарна, ни периодична.

4° Граничне вредности на крајевима домена су: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0^-$ (јер $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+$ и $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + \ln x = -\infty$), $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}^-} f(x) = -\infty$ (јер $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}^-} 1 + \ln x = 0^-$), $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}^+} f(x) = +\infty$ (јер $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}^+} 1 + \ln x = 0^+$), $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Код последњег лимеса смо применили Лопиталово правило (можемо јер и именилац и бројилац теже ка $+\infty$):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1 + \ln x} \stackrel{\text{л.п.}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty.$$

На основу претходног имамо да је права $x = e^{-1}$ вертикална асимптота. Како при одређивању да ли има косу асимптоту добијамо $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \ln x} = 0$ следи да функција нема косу асимптоту (због $k = 0$ добили би $n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - k \cdot x = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$).

5° Први извод је $f'(x) = \frac{\ln x}{(1 + \ln x)^2}$.

$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{1}{e})$	$\frac{1}{e}$	$(\frac{1}{e}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	x	x	-	x	-	0
$f(x)$	x	x	\searrow	x	\searrow	min

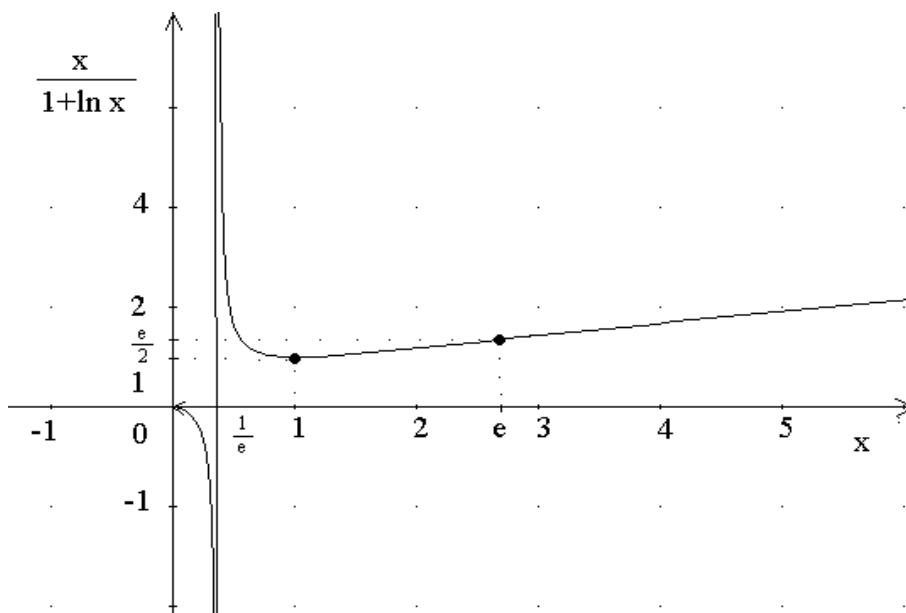
Минимум је $M(1, 1)$.

6° $f''(x) = \frac{1 - \ln x}{x(1 + \ln x)^3}$.

$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{1}{e})$	$\frac{1}{e}$	$(\frac{1}{e}, e)$	e	$(e, +\infty)$
$f''(x)$	x	x	-	x	+	0
$f(x)$	x	x	\cap	x	\cup	п.т.

Превојна тачка је $P(e, \frac{e}{2})$.

На основу свега овога цртамо график.



8. $f(x) = f(x) = \frac{1 + \ln |x|}{x(1 - \ln |x|)}$.

Решење. 1° Домен функције је $D = (-\infty, -e) \cup (-e, 0) \cup (0, e) \cup (e, +\infty)$.

2° Нуле функције су $x = \pm \frac{1}{e}$. Функција мења знак и у тачкама прекида, па имамо да је $f(x) < 0$ за $x \in (-e, -e^{-1}) \cup (0, e^{-1}) \cup (e, +\infty)$, $f(x) > 0$ за $x \in (-\infty, -e) \cup (-e^{-1}, 0) \cup (e^{-1}, e)$.

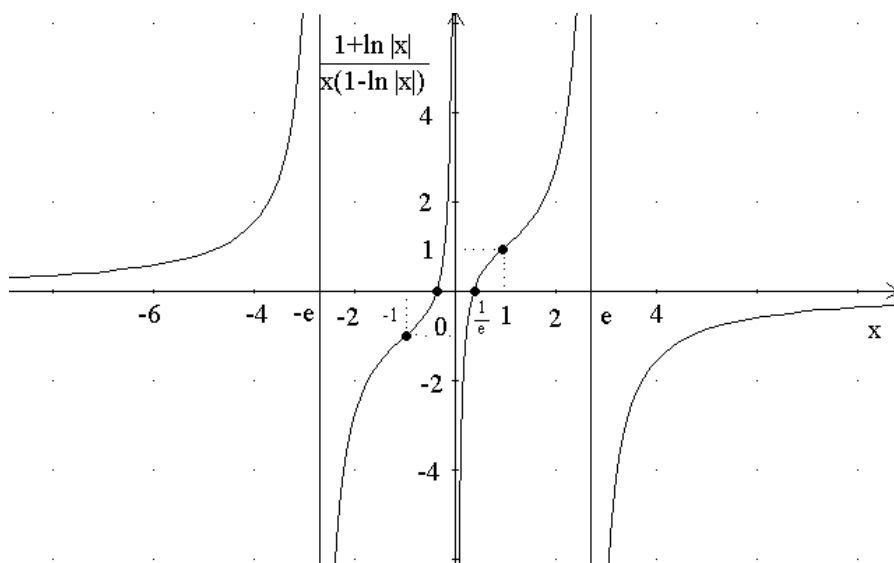
3° Функција је непарна (симетрична у односу на координатни почетак).

4° Граничне вредности на крајевима домена D су: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^+$, $\lim_{x \rightarrow -e^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -e^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^-$.

Праве $x = -e$, $x = 0$ и $x = e$ су вертикалне асимптоте, а права $y = 0$ је обострана хоризонтална асимптота.

5° За $x < 0$ први извод је $f'(x) = \frac{1 + \ln^2(-x)}{x^2(1 - \ln(-x))^2}$, а за $x > 0$ први извод је $f'(x) = \frac{1 + \ln^2 x}{x^2(1 - \ln x)^2}$, па је функција $f(x)$ растућа на сваком од интервала где је дефинисана.

6° За $x < 0$ други извод је $f''(x) = \frac{2\ln(-x)(\ln^2(-x) - \ln(-x) + 2)}{x^3(1 - \ln(-x))^3}$, а за $x > 0$ други извод је $f''(x) = \frac{2\ln x(\ln^2 x - \ln x + 2)}{x^3(1 - \ln x)^3}$. Једине превојне тачке су $x = -1, y = -1$ и $x = 1, y = 1$. Други фактор у бројиоцу је увек позитиван, јер је дискриминанта квадратног тринома $u^2 - u + 2$ (за $x > 0$ уводимо смену $u = \ln x$, а за $x < 0$ $u = \ln(-x)$) негативна. Функција је \cup ($f''(x) > 0$) на интервалима $(-\infty, -e)$, $(-1, 0)$ и $(1, e)$, а \cap на $(-e, -1)$, $(0, 1)$ и $(e, +\infty)$.



9. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

Резултати. 1° Домен је $D = \mathbb{R}$.

2° Функцију можемо записати као $f(x) = (x - 1) \cdot (x^2 - 2x - 2)$. Пресек са y -осом је $Y(0, 2)$.

Нуле су $N_1(1 - \sqrt{3}, 0)$, $N_2(1, 0)$ и $N_3(1 + \sqrt{3}, 0)$. Знак: $- \boxed{1 - \sqrt{3}} + \boxed{1} - \boxed{1 + \sqrt{3}} +$.

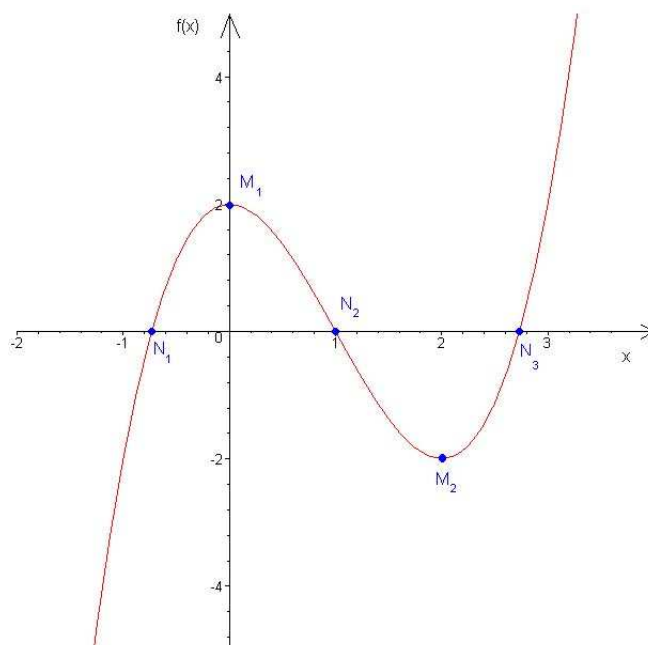
3° Није ни парна ни непарна ни периодична.

4° $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Нема асимптота.

5° $f' = 3x^2 - 6x$. Монотоност: $\nearrow \boxed{0} \searrow \boxed{2} \nearrow$. Лок. макс. је $M_1(0, 2) = Y(0, 2)$, а лок. мин. је $M_2(2, -2)$.

6° $f'' = 6x - 6$. Конвексност: $\cap \boxed{1} \cup$. Превојна тачка је $P(1, 0) = N_2(1, 0)$.



10. $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8$.

Резултати. 1° Домен је $D = \mathbb{R}$.

2° Нуле су $x_{1,2} = \pm 2$ и $x_{3,4} = \pm\sqrt{2}$. Знак: $+$ $[-2]$ $-$ $[-\sqrt{2}]$ $+$ $[\sqrt{2}]$ $-$ $[2]$ $+$. Пресек са y -осом је $Y(0,8)$.

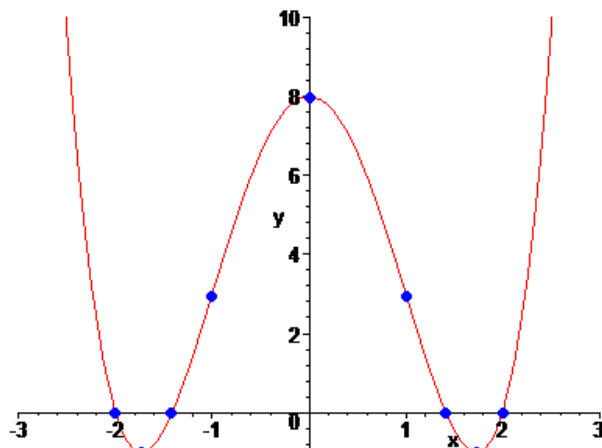
3° Није периодична. Јесте парна.

4° $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Нема асимптота.

5° $f' = 4x(x^2 - 3)$. Монотоност: \searrow $[-\sqrt{3}]$ \nearrow $[0]$ \searrow $[\sqrt{3}]$ \nearrow . Лок. мин су $M_1(-\sqrt{3}, -1)$ и $M_3(\sqrt{3}, -1)$, а лок. макс. је $M_2(0, 8)$.

6° $f'' = 12(x^2 - 1)$. Конвексност: \cup $[-1]$ \cap $[1]$ \cup . Превојне тачке су $P_1(-1, 3)$ и $P_2(1, 3)$.



11. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{(x - 2)^2}$.

Резултати. 1° Домен је $D = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

2° Нуле су $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$. Знак: $+$ $[-1]$ $-$ $[1]$ $+$ (2) $+$. Пресек са y -осом је $Y(0, \frac{-1}{4})$.

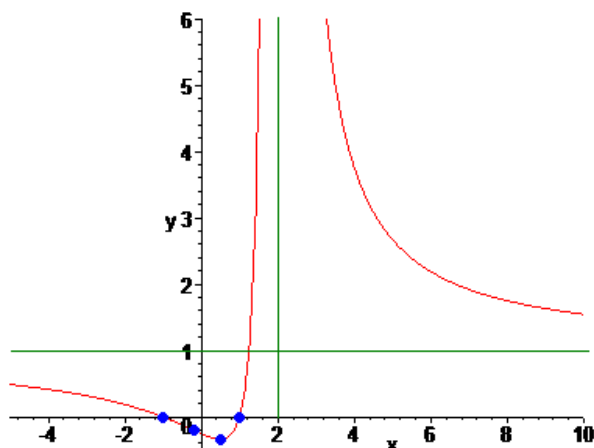
3° Није ни парна, ни непарна, ни периодична.

4° $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$.

Вер.ас $x = 2$, обострана хор.ас $y = 1$.

5° $f' = \frac{2(1 - 2x)}{(x - 2)^3}$. Монотоност: \searrow $[1/2]$ \nearrow (2) \searrow . Лок. мин. је $M\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$.

6° $f'' = \frac{2(4x + 1)}{(x - 2)^4}$. Конвексност: \cap $[-1/4]$ \cup (2) \cup . Превојна тачка је $P\left(-\frac{1}{4}, -\frac{5}{27}\right)$.



12. $f(x) = \frac{x^2 + 8x + 7}{x - 1}$.

Резултати. 1° Домен је $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, тј. $D = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

2° Пресек са y -осом је $Y(0, -7)$. Нуле су $N_1(-7, 0)$ и $N_2(-1, 0)$. Знак: $- \boxed{-7} + \boxed{-1} - 1 +$.

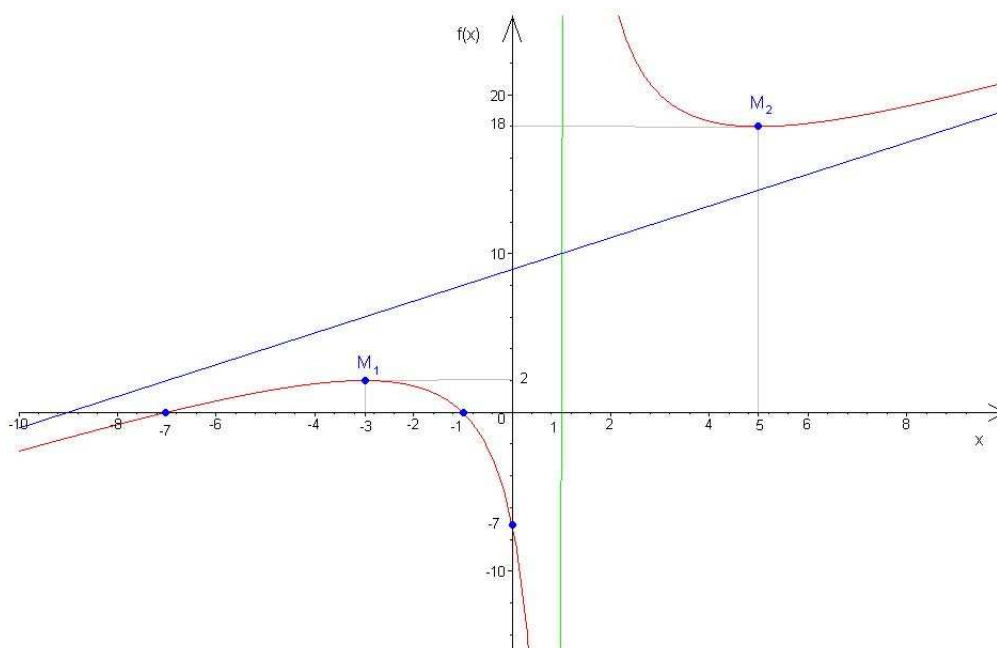
3° Није ни парна ни непарна ни периодична.

4° $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Правна $x = 1$ је вертикална асимптота, а права $y = x + 9$ је обострана коса асимптота.

5° $f' = \frac{x^2 - 2x - 15}{(x - 1)^2}$. Монотоност: $\nearrow \boxed{-3} \searrow 1 \searrow \boxed{5} \nearrow$. Лок. макс. је $M_1(-3, 2)$, а лок. мин. је $M_2(5, 18)$.

6° $f'' = \frac{32}{(x - 1)^3}$. Конвексност: $\cap \boxed{1} \cup$. Превојних тачака нема.



13. $f(x) = (x - 3)\sqrt{9 - x}$.

Резултати. 1° Домен је $D = (-\infty, 9]$.

2° Нуле су $x_1 = 3$ и $x_2 = 9$. Знак: $- \boxed{3} + \boxed{9}$ х. Пресек са y -осом је $Y(0, -9)$.

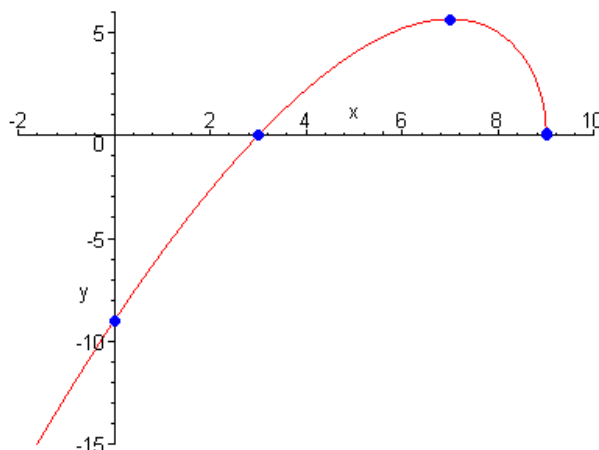
3° Није ни парна, ни непарна, ни периодична.

4° $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $f(9) = 0$.

Нема асимптота.

5° $f' = \frac{3(7 - x)}{2\sqrt{9 - x}}$. Монотоност: $\nearrow \boxed{7} \searrow (9)$ х. Лок. макс. је $M(7, 4\sqrt{2})$.

6° $f'' = \frac{3(x - 11)}{4(9 - x)^{3/2}}$. Конвексност: $\cap (9)$ х. Нема превојних тачака.



14. $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x}}$.

Резултати. 1° Област дефинисаности је $D = [0, +\infty)$.

2° Нула је $x = 0$ и пресек са y -осом је тачка $Y(0, 0)$. За све остале вредности, тј. за $x \in (0, +\infty)$ је $f(x) > 0$.

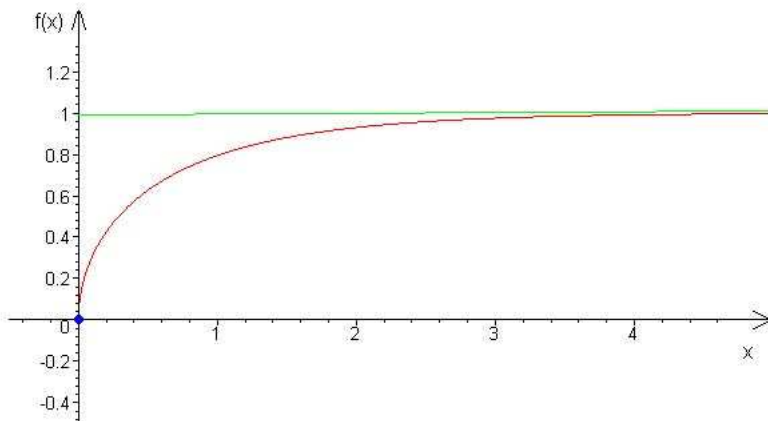
3° Ни парна, ни непарна, ни периодична.

4° Већ смо нашли да је $f(0) = 0$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

Права $y = 1$ је десна хоризонтална асимптота. Осталих асимптота нема.

5° Први извод је $f'(x) = \frac{e^{-x}}{2\sqrt{1 - e^{-x}}}$. $f(x)$ је строго растућа и нема екстрема.

6° Други извод је $f''(x) = \frac{e^{-x} \cdot (e^{-x} - 2)}{4(1 - e^{-x})^{3/2}}$. Функција је \cap јер је $f'' < 0$ за све вредности из $(0, +\infty)$. Превојних тачака нема.



15. $f(x) = \sqrt[3]{3x - x^3}$.

Резултати. 1° Област дефинисаности је $D = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

2° Нуле су $x = 0$ и $x = \pm\sqrt{3}$ и пресек са y -осом је тачка $Y(0, 0)$. За $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$ је $f(x) > 0$, а за $x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ је $f(x) < 0$.

3° Функција је непарна.

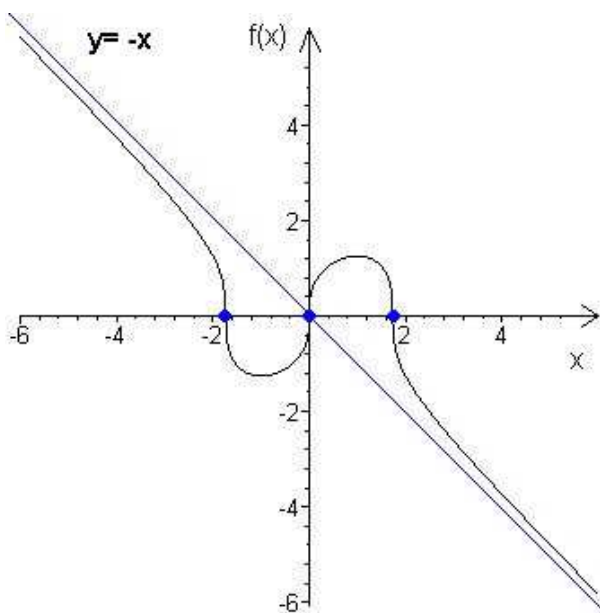
4° $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Права $y = -x$ је обострана коса асимптота.

Осталих асимптота нема.

5° Први извод је $f'(x) = \frac{1 - x^2}{(3x - x^3)^{2/3}}$. $f(x)$ је строго растућа на интервалу $(-1, 1)$, а опада на интервалима $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$. Има 2 екстрема: локални минимум $M_1(-1, -\sqrt[3]{2})$ и локални максимум $M_2(1, \sqrt[3]{2})$.

6° Други извод је $f''(x) = \frac{-2(x^2 + 1)}{(3x - x^3)^{5/3}}$. Функција је \cap за $x \in (-\infty, -\sqrt{3})$ и $x \in (0, \sqrt{3})$, а \cup за $x \in (-\sqrt{3}, 0)$ и $x \in (\sqrt{3}, +\infty)$. Превојне тачке су нуле функције: $P_1(-\sqrt{3}, 0)$, $P_2(0, 0)$ и $P_3(\sqrt{3}, 0)$.



16. $f(x) = \frac{(x-2)^2}{\ln(x-2)}.$

Резултати. 1° Област дефинисаности је $D = (2, 3) \cup (3, +\infty)$.

2° Нула нема. За $x \in (2, 3)$ је $f(x) < 0$, а за $x \in (3, +\infty)$ је $f(x) > 0$.

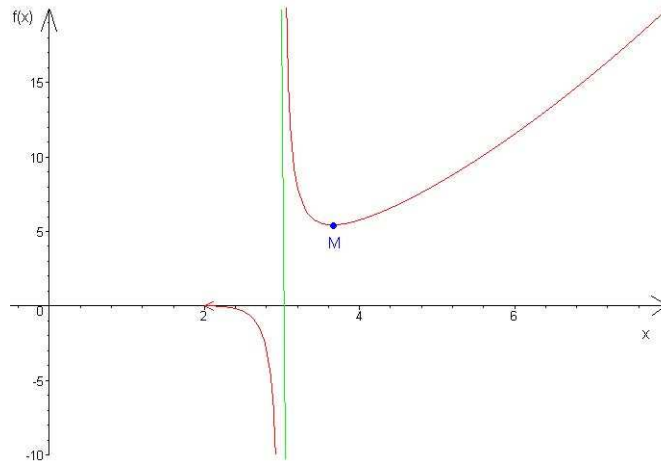
3° Ни парна, ни непарна, ни периодична.

4° $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Правна $x = 3$ је обострана вертикална асимптота. Функција нема ни десну хоризонталну ни десну косу асимптоту.

5° Први извод је $f'(x) = \frac{(2\ln(x-2) - 1) \cdot (x-2)}{\ln^2(x-2)}$. $f(x)$ опада на интервалу $(2, 3)$ и на интервалу $(-\infty, \sqrt{e} + 2)$, а расте на интервалу $(\sqrt{e} + 2, +\infty)$. Локални минимум је тачка $M(\sqrt{e} + 2, 2e) \approx (3.65, 5.44)$.

6° Други извод је $f''(x) = \frac{2\ln(x-2)^2 - 3\ln(x-2) + 2}{\ln^3(x-2)}$. Функција је \cap на интервалу $(2, 3)$, а \cup на интервалу $(3, +\infty)$. Превојних тачака нема.



17. $f(x) = \frac{x+1}{\ln^2(x+1)}.$

Резултати. 1° Функција $f(x) = \frac{x+1}{\ln^2(x+1)}$ је дефинисана на $D = (-1, 0) \cup (0, +\infty)$.

2° Функција нема нула и за све вредности из домена је $f(x) > 0$. Нема ни пресек са y -осом јер $0 \notin D$.

3° Функција није ни парна, ни непарна, ни периодична.

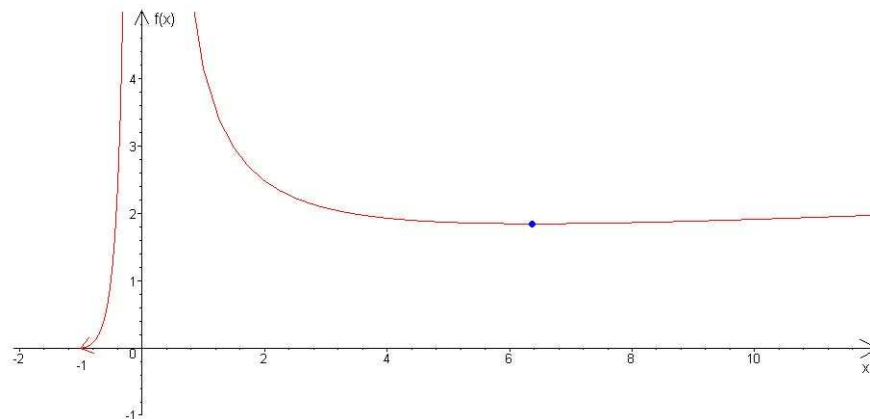
4° Граничне вредности на крајевима D су $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Функција има вертикалну асимптоту $x = 0$, а нема десну хоризонталну асимптоту (јер је $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$) и

нема десну косу асимптоту (јер се добија $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$).

5° $f'(x) = \frac{\ln(x+1) - 2}{\ln^3(x+1)}$. Функција опада на интервалу $(0, e^2 - 1)$, а расте на $(-1, 0)$ и на $(e^2 - 1, +\infty)$. Стога има минимум за $x = e^2 - 1 \approx 6.389$ и $f_{\min} = f(e^2 - 1) = \frac{1}{4}e^2 \approx 1.847$, тј. има локални минимум $M(e^2 - 1, \frac{1}{4}e^2)$.

6° $f''(x) = -2 \frac{\ln(x+1) - 3}{(x+1)\ln^4(x+1)}$. $f''(x) > 0$ на интервалу $(-1, 0)$ и на $(0, e^3 - 1)$ и $f(x)$ је тад \cup , а на $(e^3 - 1, +\infty)$ је $f''(x) < 0$ и $f(x)$ је тад \cap . Превојна тачка је за $x = e^3 - 1 \approx 19.086$ ($f(e^3 - 1) = \frac{1}{9}e^3 \approx 2.232$) и то је $P(e^3 - 1, \frac{1}{9}e^3)$.



18. $f(x) = \ln(x^2 - 10x + 26)$.

Резултати. 1° Домен је $D = \mathbb{R}$.

2° Нула је $x = 5$. Знак: $+$ $\boxed{5}$ $+$. Пресек са y -осом је $Y(0, \ln 26)$.

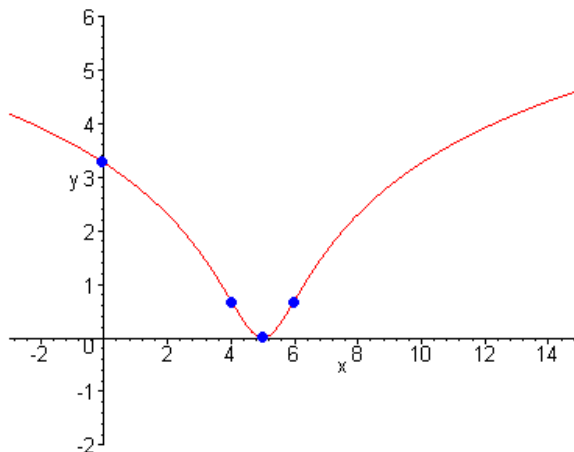
3° Није ни парна, ни непарна, ни периодична.

4° $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Нема асимптота.

5° $f' = \frac{2x - 10}{x^2 - 10x + 26}$. Монотоност: \searrow $\boxed{5}$ \nearrow . Лок. мин. је $M(5, 0)$.

6° $f'' = -2 \frac{x^2 - 10x + 24}{(x^2 - 10x + 26)^2}$. Конвексност: \cap $\boxed{4}$ \cup $\boxed{6}$ \cap . Превојне тачке су $P_1(4, \ln 2)$ и $P_2(6, \ln 2)$.



19. $f(x) = \ln^2 x - 4 \ln x + 3$.

Резултати. 1° Домен је $D = (0, +\infty)$.

2° Нуле су $x = e$ и $x = e^3$. Знак: 0 $+$ \boxed{e} $-$ $\boxed{e^3}$ $+$.

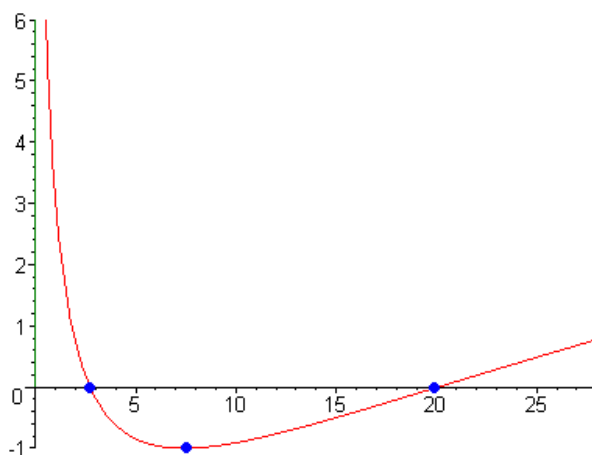
3° Није ни парна, ни непарна, ни периодична.

4° $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Вер. ас $x = 0$, нема десну хор.ас, ни десну косу ас.

5° $f' = 2 \frac{\ln x - 2}{x}$. Монотоност: 0 \searrow $\boxed{e^2}$ \nearrow . Лок. мин. је $M(e^2, -1)$.

6° $f'' = -2 \frac{\ln x - 3}{x^2}$. Конвексност: 0 \cup $\boxed{e^3}$ \cap . Превојна тачка је $P(e^3, 0)$.



20. $f(x) = 3 \ln^2 x - 8 \ln(\ln x)$.

Резултати. 1° Домен је $D = (1, +\infty)$.

3° Није ни парна, ни непарна, ни периодична.

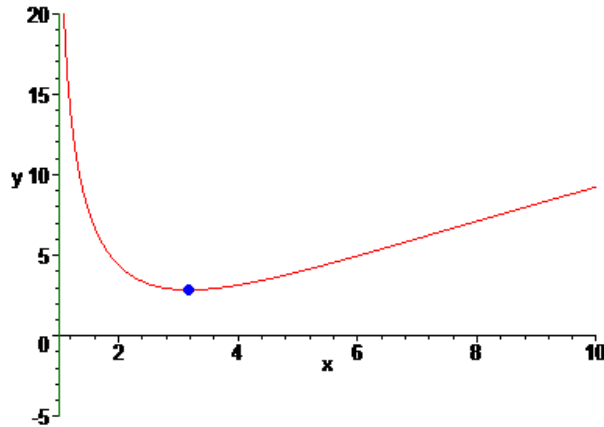
4° $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Има вер.ас $x = 1$, нема десну ни хор.ас, ни десну косу ас.

5° $f' = 2 \frac{3 \ln^2 x - 4}{x \cdot \ln x}$. Монотоност: $1 \searrow \boxed{e^{2/\sqrt{3}}} \nearrow$. Лок. мин. је $M(e^{2/\sqrt{3}}, 4 - 8 \ln(2/\sqrt{3}))$.

2° Нема нула. Знак: свуда +.

6° $f'' = -2 \frac{(\ln x - 2) \cdot (3 \ln^2 x + 3 \ln x + 2)}{x^2 \cdot \ln^2 x}$. Конвексност: $1 \cup \boxed{e^2} \cap$. Превојна тачка је $P(e^2, 12 - 8 \ln 2)$.



21. $f(x) = (x^2 - 4x + 5)e^x$.

Резултати. 1° Домен је $D = \mathbb{R}$.

2° Нема нула. Знак: свуда +. Пресек са y -осом је $Y(0, 5)$.

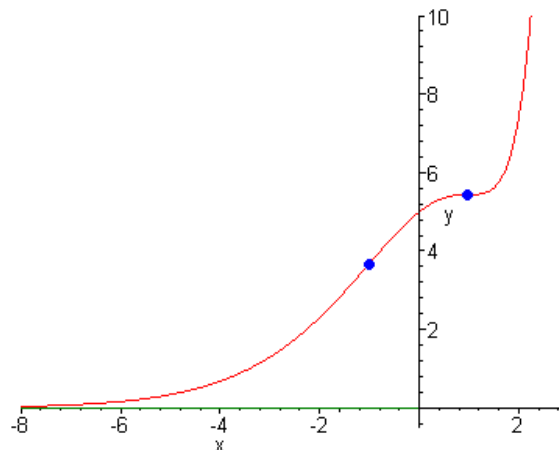
3° Није ни парна, ни непарна, ни периодична.

4° $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Нема вер.ас, нема косих ас, лева хор.ас. $y = 0$.

5° $f' = (x^2 - 2x + 1)e^x$. Монотоност: свуда \nearrow . Нема локалних екстрема.

6° $f'' = (x^2 - 1)e^x$. Конвексност: $\cup \boxed{-1} \cap \boxed{1} \cup$. Превојне тачке су $P_1(-1, \frac{10}{e})$ и $P_2(1, 2e)$.



22. $f(x) = (6x^2 - 2x - 1)e^{2x}$.

Резултати. 1° Домен је $D = \mathbb{R}$.

2° Нуле су $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{6}$. Знак: $+$ $\boxed{\frac{1 - \sqrt{7}}{6}}$ $-$ $\boxed{\frac{1 + \sqrt{7}}{6}}$ $+$. Пресек са y -осом је $Y(0, -1)$.

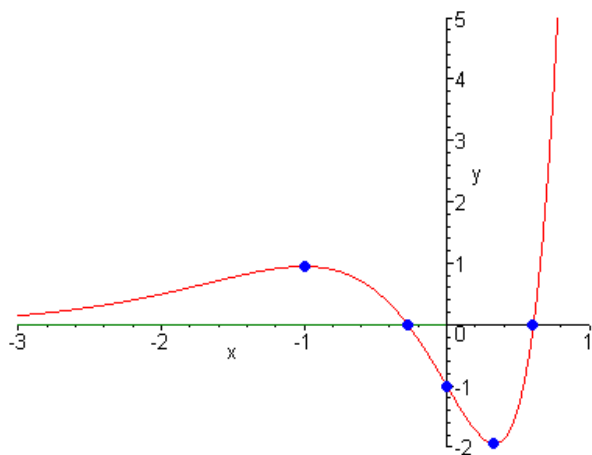
3° Није ни парна, ни непарна, ни периодична.

4° $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Нема вер.ас, нема косих ас, лева хор.ас. $y = 0$.

5° $f' = 4(3x^2 + 2x - 1)e^{2x}$. МоноTONOCT: $\nearrow \boxed{-1} \searrow \boxed{1/3} \nearrow$. Лок. мин. је $M_1(\frac{1}{3}, -e^{2/3})$. Лок. макс. је $M_2(-1, 7e^{-2})$.

6° $f'' = 8x(3x + 5)e^{2x}$. Конвексност: $\cup \boxed{-5/3} \cap \boxed{0} \cup$. Превојне тачке су $P_1(-\frac{5}{3}, 19e^{-10/3})$ и $P_2(0, -1)$.



23. $f(x) = xe^{-\frac{1}{2}x^2}$.

Резултати. 1° Домен је $D = \mathbb{R}$.

2° Нула је $x = 0$. Знак: $- \boxed{0} +$. Пресек са y -осом је нула $Y(0, 0)$.

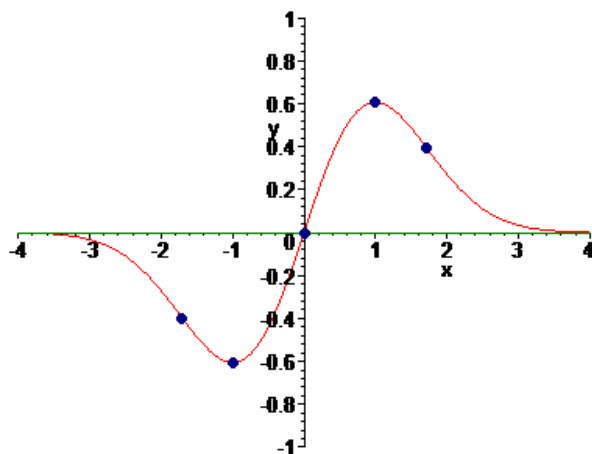
3° Није периодична. Јесте непарна.

4° $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Нема вер.ас, обострана хор.ас. $y = 0$.

5° $f' = (1 - x^2)e^{-\frac{1}{2}x^2}$. МоноTONOCT: $\searrow \boxed{-1} \nearrow \boxed{1} \searrow$. Лок. мин. је $M_1(-1, -e^{-1/2})$. Лок. макс. је $M_2(1, e^{-1/2})$.

6° $f'' = x(x^2 - 3)e^{-\frac{1}{2}x^2}$. Конвексност: $\cap \boxed{-\sqrt{3}} \cup \boxed{0} \cap \boxed{\sqrt{3}} \cup$. Превојне тачке су $P_1(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}e^{-3/2})$, $P_2(0, 0)$ и $P_3(\sqrt{3}, \sqrt{3}e^{-3/2})$.



24. $f(x) = (x^2 + 2)e^{-x^2}$.

Резултати. 1° Домен је $D = \mathbb{R}$.

2° Нема нула. Знак: свуда +. Пресек са y -осом је $Y(0, 2)$.

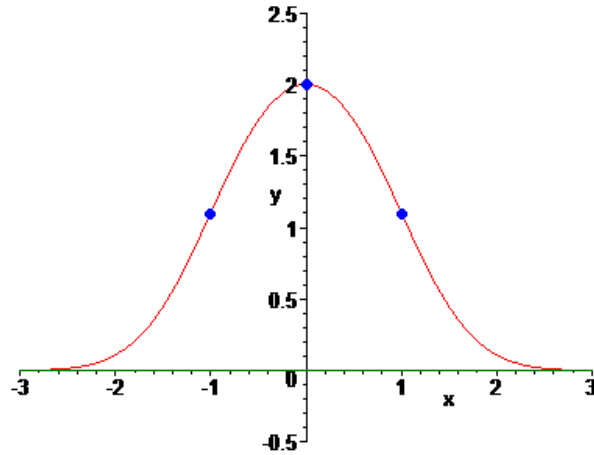
3° Није периодична. Јесте парна.

4° $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Нема вер.ас, обострана хор.ас. $y = 0$.

5° $f' = -2x(x^2 + 1)e^{-x^2}$. Монотоност: $\nearrow \boxed{0} \searrow$. Лок. макс. је $M(0, 2)$.

6° $f'' = 2(x^2 - 1)(2x^2 + 1)e^{-x^2}$. Конвексност: $\cup \boxed{-1} \cap \boxed{1} \cup$. Превојне тачке су $P_1(-1, \frac{3}{e})$ и $P_2(1, \frac{3}{e})$.



25. $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$.

Резултати. 1° Домен је $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

2° Нема нула. Знак: $+$ (0) $+$.

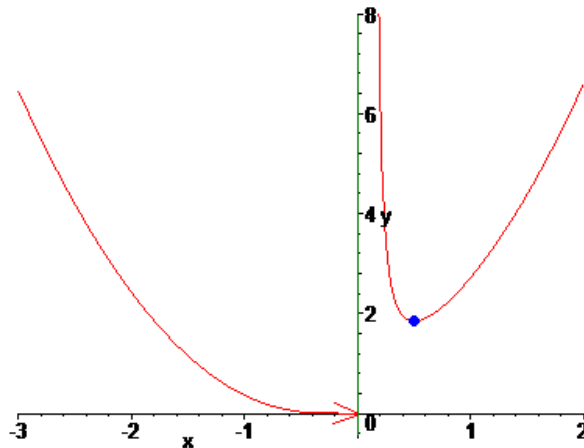
3° Није ни парна, ни непарна, ни периодична.

4° $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

Вер.ас $x = 0$, нема хор.ас, нема косих ас.

5° $f' = e^{\frac{1}{x}}(2x - 1)$. Монотоност: $\searrow (0) \searrow \boxed{1/2} \nearrow$. Лок. мин. је $M\left(\frac{1}{2}, \frac{e^2}{4}\right)$.

6° $f'' = \frac{e^{\frac{1}{x}}(2x^2 - 2x + 1)}{x^2}$. Конвексност: $\cup (0) \cup$. Нема превојних тачака.



26. $f(x) = e^{\frac{1}{x}} - x$.

Резултати. 1° Домен је $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

3° Није ни парна, ни непарна, ни периодична.

4° $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

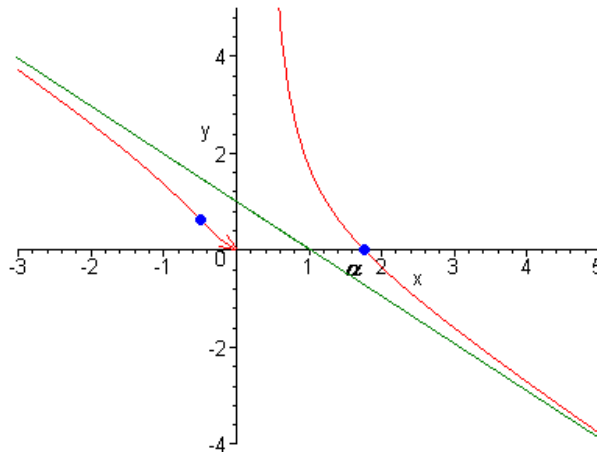
Вер.ас $x = 0$, нема хор.ас, обострана коса ас. $y = -x + 1$.

5° $f' = -\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} + 1\right)$. Монотоност: $\searrow (0) \searrow$. Нема локалних екстрема.

2° Како је $f(1) = e - 1 > 0$ и $f(2) = \sqrt{e} - 2 < 0 \Rightarrow$ има нулу $x = \alpha \in (1, 2)$. Знак: $+(0) + \boxed{\alpha} -$.

6° $f'' = \frac{e^{\frac{1}{x}}(2x+1)}{x^4}$. Конвексност: $\cap \boxed{-1/2} \cup (0) \cup$. Превојна тачка је $P\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{e^2} + \frac{1}{2}\right)$.

Нумерички се добија да је $\alpha \approx 1.763222834$.



27. $f(x) = 2x - \sqrt{3x^2 + 6x}$.

Резултати. 1° Домен је $D = (-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$.

2° Нуле су $x_1 = 0$ и $x_2 = 6$. Знак: $-(-2) \times \boxed{0} - \boxed{6} +$.

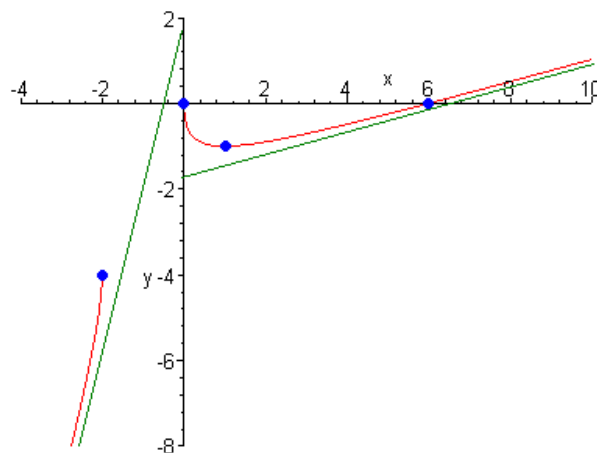
3° Није ни парна, ни непарна, ни периодична.

4° $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $f(-2) = -4$, $f(0) = 0$.

Нема вер.ас, нема хор.ас, лева коса ас. $y = (2 + \sqrt{3})x + \sqrt{3}$, десна коса ас. $y = (2 - \sqrt{3})x - \sqrt{3}$.

5° $f' = 2 - \frac{3x+3}{\sqrt{3x^2+6x}}$. Монотоност: $\nearrow (-2) \times (0) \searrow \boxed{1} \nearrow$. Лок. мин. је $M(1, -1)$.

6° $f'' = \frac{9}{(3x^2+6x)^{3/2}}$. Конвексност: $\cup (-2) \times (0) \cup$. Нема превојних тачака.



28. $f(x) = -2x - \sqrt{3x^2 + 6x - 9}$.

Резултати. 1° Домен је $D = (-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$.

2° Нема нула. Знак: $+$ (-3) \times (1) $-$.

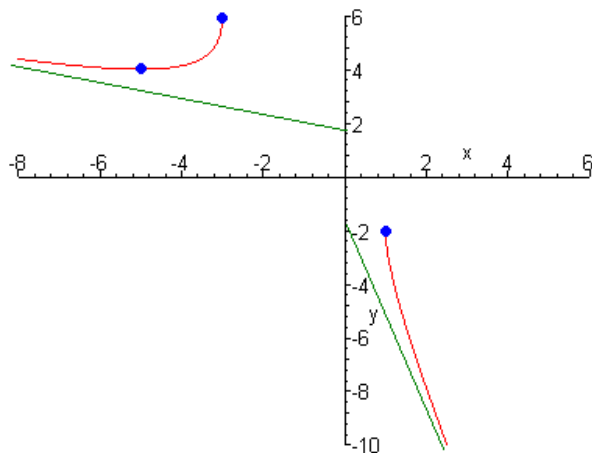
3° Није ни парна, ни непарна, ни периодична.

4° $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, $f(-3) = 6$, $f(1) = -2$.

Нема вер.ас, нема хор.ас, лева коса ас. $y = (-2 + \sqrt{3})x + \sqrt{3}$, десна коса ас. $y = (-2 - \sqrt{3})x - \sqrt{3}$.

5° $f' = -2 - \frac{3x+1}{\sqrt{3x^2+6x-9}}$. Монотоност: \searrow $\boxed{-5}$ \nearrow (-3) \times (1) \searrow . Лок. мин. је $M(-5, 4)$.

6° $f'' = \frac{36}{(3x^2+6x-9)^{3/2}}$. Конвексност: \cup (-3) \times (1) \cup . Нема превојних тачака.



29. $f(x) = x + 2 - \sqrt{x^2 + x + 1}$.

Резултати. 1° Домен је $D = \mathbb{R}$.

2° Нула је $x = -1$. Знак: $-$ $\boxed{-1}$ $+$. Пресек са y -осом је $Y(0, 1)$.

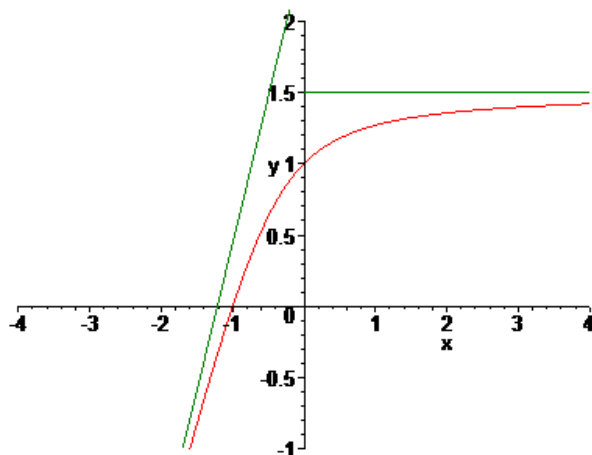
3° Није ни парна, ни непарна, ни периодична.

4° $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3/2$.

Нема вер.ас, лева коса ас. $y = 2x + 5/2$, десна хор.ас. $y = 3/2$.

5° $f' = 1 - \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$. Монотоност: свуда \nearrow . Нема локалних екстрема.

6° $f'' = \frac{-3}{4(x^2+x+1)^{3/2}}$. Конвексност: свуда \cap . Нема превојних тачака.



30. $f(x) = x + 1 - \sqrt{x^2 + 3x + 2}$.

Резултати. 1° Домен је $D = (-\infty, -2] \cup [-1, +\infty)$.

2° Нула је $x = -1$. Знак: $-(-2) \times [-1] -$. Пресек са y -осом је $Y(0, 1 - \sqrt{2})$.

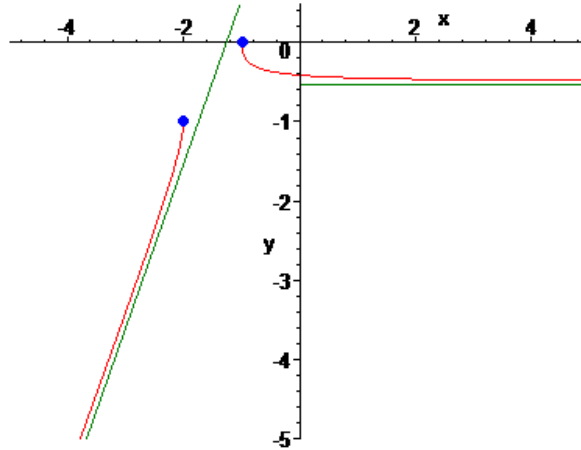
3° Није ни парна, ни непарна, ни периодична.

4° $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1/2$, $f(-2) = -1$, $f(-1) = 0$.

Нема вер.ас, лева коса ас. $y = 2x + 5/2$, десна хор.ас. $y = -1/2$.

5° $f' = 1 - \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+2}}$. Монотоност: $\nearrow (-2) \times (-1) \searrow$. Нема локалних екстрема.

6° $f'' = \frac{1}{4(x^2+3x+2)^{3/2}}$. Конвексност: $\cup (-2) \times (-1) \cup$. Нема превојних тачака.



31. $f(x) = \arctg(\ln x)$.

Резултати. 1° Домен је $D = (0, +\infty)$.

2° Нула је $x = 1$. Знак: $-[1] +$. Пресек са y -осом нема јер $0 \notin D$.

3° Није ни парна, ни непарна јер домен није симетричан у односу на 0. Није ни периодична.

4° $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$.

Нема вер.ас, десна хор.ас. $y = \frac{\pi}{2}$, нема косих асимптота.

5° $f' = \frac{1}{x \cdot (1 + \ln^2 x)}$. Монотоност: $x(0) \nearrow$. Локални минимум је тачка $M(0, -\frac{\pi}{2})$.

6° $f'' = -\frac{(\ln x + 1)^2}{x^2 \cdot (1 + \ln^2 x)^2}$. Конвексност: $x(0) \cap$. Нема превојних тачака.

