4. Системи линеарних једначина

Овде је дат кратак преглед IV двочаса вежби. Потребно је да обновите одговарајућу теоријску материју која је обрађена на предавањима и у уџбенику.

Како се највећим делом на вежбама раде задаци из збирке, након броја задатка плавом бојом је означен број задатка у збирци "МАТЕМАТИКА 1" професора Р. Лазовића, Д. Ђорића и Ђ. Јованова у форми p.z, где је p број поглавља, а z број задатка у том поглављу. Ови задаци са преосталима из збирке (из поглавља "4. Системи линеарних једначина", као и оним из поглавља "7. Први колоквијум" који су везани за ову материју) чине целину довољну за припрему ове области.

1. 4.3 (2). Испитати сагласност и решити систем линеарних једначина
$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 3x & + & 3y & + & z & = & 2. \end{array}$$

Решење 1. Детерминанта система Δ и остале детерминанте које се јављају у Крамеровим формулама $(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)$ су једнаке:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 5, \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4, \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3.$$

Како је $\Delta = 0$ и $\Delta_x = 5 \neq 0$ систем нема решења. ■

Напомена. Овде нисмо ни морали да одређујемо Δ_y и Δ_z јер смо већ на основу Δ и Δ_x добили да систем нема решења.

Решење 2. Решаваћемо систем Гаусовим системом елиминације:

$$\begin{array}{rcrcrcll} x & - & y & + & 3z & = & 1 & \\ x & + & 2y & - & z & = & 1 & \mathrm{II} - \mathrm{I} \\ 3x & + & 3y & + & z & = & 2 & \mathrm{III} - 3 \cdot \mathrm{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcll} x & - & y & + & 3z & = & 1 & \\ & & 3y & - & 4z & = & 0 & \\ & & 6y & - & 8z & = & -1 & \mathrm{III} - 2 \cdot \mathrm{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcll} x & - & y & + & 3z & = & 1 & \\ & & 3y & - & 4z & = & 0 & \\ & & & & 0 & = & -1 & \lightning \end{array}$$

Како је III једначина $0 = -1 \neq 0$, та једначина нема решења, па и цео систем нема решења. ■

2. 4.3 (3). Испитати сагласност и решити систем линеарних једначина
$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 3x & + & 3y & + & z & = & 3. \end{array}$$

Решење. Како су све детерминанте $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ систем МОРАМО решавати Гаусовим системом елиминације.

$$\begin{array}{rcrcrcll} x & - & y & + & 3z & = & 1 & \\ x & + & 2y & - & z & = & 1 & \mathrm{II} - \mathrm{I} \\ 3x & + & 3y & + & z & = & 3 & \mathrm{III} - 3 \cdot \mathrm{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcll} x & - & y & + & 3z & = & 1 & \\ & & 3y & - & 4z & = & 0 & \\ & & 6y & - & 8z & = & 0 & \mathrm{III} - 2 \cdot \mathrm{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ & & 3y & - & 4z & = & 0 \\ & & & & \cancel{0} & \cancel{=} & \cancel{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ & & 3y & - & 4z & = & 0 \end{array}$$

Добили смо систем у степенастом облику, у коме су променљиве x и y везане (оне су на почетку једначина), док је преостала променљива, z слободна и њој додељујемо вредност параметра:

$$z = \alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Стога овај систем има вишеструко решење које зависи од 1 параметра. Даље, y добијамо из II једначине: $y = -\dfrac{4}{3}\,\alpha$. Коначно када z и y уврстимо у I једначину добијамо $x = 1 - \dfrac{5}{3}\,\alpha$.

Систем има вишеструко решење које зависи од 1 параметра: $(x, y, z) = \left(1 - \dfrac{5}{3}\,\alpha, \dfrac{4}{3}\,\alpha, \alpha\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. ■

Напомена. Како је параметар α произвољан реалан број, ми смо могли да узмемо да је $\alpha = 3t$ и добили би "лепше" решење $(x, y, z) = (1 - 5t, 4t, 3t)$, $t \in \mathbb{R}$.

3. Испитати сагласност и решити систем линеарних једначина
$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 2 \\ x & + & y & + & z & = & 3. \end{array}$$

Решење. Када у Гаусовом систему елиминације I једначину одузмемо и од II и од III добијамо еквивалентан систем
$$\begin{array}{rcrcrcll} x & + & y & + & z & = & 1 & \\ & & & & 0 & = & 1 & \lightning \\ & & & & 0 & = & 2 & \lightning \end{array}$$
. Било због II било због III једначине овај систем нема решења. ■

Напомена. Иако су све детерминанте $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ систем нема решења.

4. 7.пр7.2 (стр. 54). У зависности од реалног параметра a одредити фундаментални систем решења и опште решење система

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x & - & 2y & + & 5z & + & au & = & 0 \\ 6x & - & ay & + & 4z & + & 3u & = & 0 \\ 9x & - & 6y & + & 3z & + & 2u & = & 0. \end{array}$$

Решење. Овај систем има 3 једначине и 4 непознате (x, y, z, u) те се не може решавати преко детерминанти, него мора Гаусовим системом елиминације (или помоћу Кејли-Хамилтонове теореме, што је другачији запис Гаусовог система елиминације)!

$$\begin{array}{rcrcrcrcll} 3x & - & 2y & + & 5z & + & au & = & 0 & \\ 6x & - & ay & + & 4z & + & 3u & = & 0 & \mathrm{II} - 2 \cdot \mathrm{I} \\ 9x & - & 6y & + & 3z & + & 2u & = & 0 & \mathrm{III} - 3 \cdot \mathrm{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x & - & 2y & + & 5z & + & au & = & 0 \\ & & (4-a)y & - & 6z & + & (3-2a)u & = & 0 \\ & & & - & 12z & + & (2-3a)u & = & 0 \end{array}$$

Сада имамо 2 случаја у зависности од тога да ли је члан $4 - a$ једнак или различит од 0 (ако је једнак онда нам се кваре "степнице").

1° За $a \neq 4$ претходни систем је у степенастом облику и променљиве x, y и z су везане, док је u слободна и њој додељујемо вредност параметра $u = t$, $t \in \mathbb{R}$. Враћањем уназад добијамо вредности осталих променљивих: $z = \frac{2-3a}{12}\,t$, $y = \frac{1}{2}\,t$ и $\frac{3a-22}{36}\,t$. Дакле имамо да је решење

$$(x, y, z, u) = \left(\frac{3a-22}{36}\,t, \frac{1}{2}\,t, \frac{2-3a}{12}\,t, t\right) = t \cdot \left(\frac{3a-22}{36}, \frac{1}{2}, \frac{2-3a}{12}, 1\right), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Вектор $X_1 = \left(\frac{3a-22}{36}, \frac{1}{2}, \frac{2-3a}{12}, 1\right)$ се назива фундаментално решење система.

2° Када је $a = 4$ претходни систем се своди на:

$$\begin{array}{rcrcrcrcll} 3x & - & 2y & + & 5z & + & 4u & = & 0 & \\ & & & - & 6z & - & 5u & = & 0 & \\ & & & - & 12z & - & 10u & = & 0 & \mathrm{III} - 2 \cdot \mathrm{II} \end{array}$$

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\hline
3x & - & 2y & + & 5z & + & 4u & = & 0\\
 & & & - & 6z & - & 5u & = & 0\\
 & & & & & & \cancel{0} & \cancel{=} & \cancel{0}\\
\hline
3x & - & 2y & + & 5z & + & 4u & = & 0\\
 & & & - & 6z & - & 5u & = & 0
\end{array}
$$

Ово је систем у степенастом облику, у коме су променљиве x и z везане, а остале, y и u су слободне. Слободним променљивима доделимо вредности параметара:

$$y = t, \quad u = p, \qquad t, p \in \mathbb{R}.$$

Даље, z добијамо из II једначине: $z = -\dfrac{5}{6}p$. Када z, y и u уврстимо у I добијамо $x = \dfrac{2}{3}t + \dfrac{1}{6}p$.

$$(x, y, z, u) = \left(\frac{2}{3}t + \frac{1}{6}p, t, -\frac{5}{6}p, p\right) = t \cdot \left(\frac{2}{3}, 1, 0, 0\right) + p \cdot \left(\frac{1}{6}, 0, -\frac{5}{6}, 1\right), \qquad t, p \in \mathbb{R}.$$

Вектори $X_1 = \left(\frac{2}{3}, 1, 0, 0\right)$ и $X_2 = \left(\frac{1}{6}, 0, -\frac{5}{6}, 1\right)$ су фундаментална решења система.

Објединимо решења која су добијена у сваком од случајева у један коначан закључак:

1° За $a \neq 4$ има 1 фундаментално решење $X_1 = \left(\frac{3a-22}{36}, \frac{1}{2}, \frac{2-3a}{12}, 1\right)$ које одређује опште решење $(x, y, z, u) = t \cdot X_1$, $t \in \mathbb{R}$.

2° За $a = 4$ има два фундаментална решења $X_1 = \left(\frac{2}{3}, 1, 0, 0\right)$ и $X_2 = \left(\frac{1}{6}, 0, -\frac{5}{6}, 1\right)$ која одређују опште решење $(x, y, z, u) = t \cdot X_1 + p \cdot X_2$, $t, p \in \mathbb{R}$.

■

Напомена. Када су сви слободни чланови једнаки 0, систем се назива *хомоген*. Хомоген систем УВЕК има решења (значи, или јединстевено решење или вишеструко решење) јер је $(x, y, z, u) = (0, 0, 0, 0)$ решење хомогеног система. Ово решење се назива *тривијално решење*.

Решења хомогеног система чине векторски простор који је разапет фудаменталним решењима.

5. 7.ср-пр20.2 (стр. 71). У зависности од реалних параметара a и b решити систем линеарних једначина

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
2x & - & y & + & 3z & = & 2\\
x & + & 2y & + & z & = & -1\\
4x & + & 3y & + & az & = & 0\\
x & - & 3y & + & bz & = & a-2.
\end{array}
$$

Решење. Овај систем има 4 једначине и 3 непознате па се не може решавати преко детерминанти, него мора Гаусовим системом елиминације!

$$
\begin{array}{rcrcrcrl}
2x & - & y & + & 3z & = & 2 & \\
x & + & 2y & + & z & = & -1 & \\
4x & + & 3y & + & az & = & 0 & \\
x & - & 3y & + & bz & = & a-2 & \\
\hline
x & + & 2y & + & z & = & -1 & \\
2x & - & y & + & 3z & = & 2 & \mathrm{II} - 2\cdot\mathrm{I}\\
4x & + & 3y & + & az & = & 0 & \mathrm{III} - 4\cdot\mathrm{I}\\
x & - & 3y & + & bz & = & a-2 & \mathrm{IV} - \mathrm{I}\\
\hline
x & + & 2y & + & z & = & -1 & \\
 & - & 5y & + & z & = & 4 & \\
 & - & 5y & + & (a-4)z & = & 4 & \mathrm{III} - \mathrm{II}\\
 & - & 5y & + & (b-1)z & = & a-1 & \mathrm{IV} - \mathrm{II}\\
\hline
x & + & 2y & + & z & = & -1 & \\
 & - & 5y & + & z & = & 4 & \\
 & & & & (a-5)z & = & 0 & \\
 & & & & (b-2)z & = & a-5 &
\end{array}
$$

Овај систем наликује на систем у степенастом облику (наликује јер би у последњој једначини морали да елиминишемо z), али не можемо да наставимо процес Гаусовог система елиминације јер не знамо да ли је неки од коефицијената $a-5$ или $b-2$ једнак 0. Стога ћемо имати следећа 3 случаја да разматрамо:

$$\mathbf{1}^\circ \quad a \neq 5 \qquad\qquad \mathbf{2}^\circ \quad a=5, b\neq 2 \qquad\qquad \mathbf{3}^\circ \quad a=5, b=2$$

(тачније, када решавамо задатак ми ћемо доћи прво до случаја $a \neq 5$ и $a=5$, али се овај други онда дели на 2 подслучаја). Размотримо сада сваки од ових случајева понаособ.

1° Када је $a \neq 5$ можемо да наставимо процес елиминације променљивих:

$$\begin{array}{rcrcrcl}
x & + & 2y & + & z & = & -1 \\
 & - & 5y & + & z & = & 4 \\
 & & & & (a-5)z & = & 0 \\
 & & & & (b-2)z & = & a-5 \qquad \mathrm{IV} - \dfrac{b-2}{a-5}\cdot \mathrm{III}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcl}
x & + & 2y & + & z & = & -1 \\
 & - & 5y & + & z & = & 4 \\
 & & & & (a-5)z & = & 0 \\
 & & & & 0 & = & a-5. \quad ↯
\end{array}$$

Како смо добили једначину $0 = a-5 \neq 0$ то систем у овом случају нема решења.

2° Када је $a=5$ имамо да III једначина постаје $0=0$ и њу можемо потпуно обрисати:

$$\begin{array}{rcrcrcl}
x & + & 2y & + & z & = & -1 \\
 & - & 5y & + & z & = & 4 \\
 & & & & \cancel{0} & \cancel{=} & \cancel{0} \\
 & & & & (b-2)z & = & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcl}
x & + & 2y & + & z & = & -1 \\
 & - & 5y & + & z & = & 4 \\
 & & & & (b-2)z & = & 0.
\end{array}$$

Како је $b \neq 2$, добили смо систем у степенастом облику, у коме су све променљиве зависне, па овај систем има јединствено решење. Из III једначине добијамо да је $z = \dfrac{0}{b-2} = 0$. Када ово уврстимо у II добијамо $y = -\dfrac{4}{5}$. Коначно када z и y уврстимо у I добијамо $x = \dfrac{3}{5}$.

3° Када је $a=5$ и $b=2$ имамо да и III и IV једначина постају $0=0$ и их можемо избрисати:

$$\begin{array}{rcrcrcl}
x & + & 2y & + & z & = & -1 \\
 & - & 5y & + & z & = & 4 \\
 & & & & \cancel{0} & \cancel{=} & \cancel{0} \\
 & & & & \cancel{0} & \cancel{=} & \cancel{0}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcl}
\color{red}{x} & + & 2y & + & \color{teal}{z} & = & -1 \\
 & - & 5\color{red}{y} & + & \color{teal}{z} & = & 4
\end{array}$$

Добили смо систем у степенастом облику, у коме су променљиве $\color{red}{x}$ и $\color{red}{y}$ везане, док је $\color{teal}{z}$ слободна и њој додељујемо вредност параметра $z=t$, $t \in \mathbb{R}$. Даље, y добијамо из II једначине: $y = -\dfrac{4}{5} + \dfrac{1}{5}t$. Коначно када z и y уврстимо у I добијамо $x = \dfrac{3}{5} - \dfrac{7}{5}t$.

Лепо је обједините решења која су добијена у сваком од случајева у један коначан закључак:

1° За $a \neq 5$ систем нема решења.

2° За $a=5$ и $b \neq 2$, систем има јединствено решење $(x,y,z) = \left(\dfrac{3}{5}, -\dfrac{4}{5}, 0\right)$.

3° За $a=5$ и $b=2$ систем има вишеструко решење које зависи од једног параметра $(x,y,z) = \left(\dfrac{3}{5} - \dfrac{7}{5}t, -\dfrac{4}{5} + \dfrac{1}{5}t, t\right)$, $t \in \mathbb{R}$.

■