XI двочас вежби — Владимир Балтић

12. Извод и диференцијал
13. Тејлорова формула

Овде је дат кратак преглед XI двочаса вежби. Потребно је да обновите одговарајућу теоријску материју која је обрађена на предавањима и у уџбенику.

Како се највећим делом на вежбама раде задаци из збирке, након броја задатка плавом бојом је означен број задатка у збирци "МАТЕМАТИКА 1" професора Р. Лазовића, Д. Ђорића и Ђ. Јованова у форми p.z, где је p број поглавља, а z број задатка у том поглављу. Ови задаци са преосталима из збирке (делом из поглавља "12. Извод и диференцијал" и из "13. Тејлорова формула", као и оним из поглавља "15. Други колоквијум" који су везани за ову материју) чине целину довољну за припрему ове области.

12. Извод и диференцијал

Применом Лопиталове теореме израчунати дате граничне вредности:

1. 10.21. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$.

Решење. $L=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}\overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}-0}{1-0}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}=\dfrac{1}{2\sqrt{5-1}}=\dfrac{1}{4}$. ■

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-4x+5}}{x-2}$.

Решење 1. $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-4x+5}}{x-2}\overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x^2-4x+5}}\cdot(2x-4)}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}\overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-4x+5}}{x-2}$.

Овај задатак неће моћи да се реши Лопиталом јер се вртимо у круг (час је корен горе, час доле)! ■

Решење 2. Задатак ћемо урадити као што смо га радили код обичних граничних вредности функција (обратите пажњу да кад $x\to+\infty$ да је $x>0$, па је $\sqrt{x^2}=|x|$ и $\frac{1}{x}=\sqrt{\frac{1}{x^2}}$).

$$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-4x+5}}{x-2}\cdot\frac{\sqrt{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}}{1-\frac{2}{x}}=\frac{\sqrt{1-0+0}}{1-0}=1.$$ ■

3. 12.83. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}$, $\alpha>0$.

Решење. $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}\overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\alpha x^\alpha}=\left[\dfrac{1}{+\infty}\right]=0$. ■

4. 12.85. $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$, $a,b>0$.

Решење. $L=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{\sin ax}\cdot\cos ax\cdot a}{\frac{1}{\sin bx}\cdot\cos bx\cdot b}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin bx}{bx}\cdot\dfrac{1}{\frac{\sin ax}{ax}}\cdot\dfrac{\cos ax}{\cos bx}=1\cdot\dfrac{1}{1}\cdot\dfrac{\cos 0}{\cos 0}=1$. ■

5. 12.90. $\lim\limits_{x\to0^+}x^\alpha\ln x$, $\alpha>0$.

Решење. Дати лимес је облика $0\cdot\infty$, те морамо да га сведемо или на $\dfrac{0}{0}$ или на $\dfrac{\infty}{\infty}$.

За $\dfrac{0}{0}$ би имали $L=\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^\alpha}{\frac{1}{\ln x}}$ и ако би пробали да рачунамо Лопиталовим правилом овај лимес добили би још компликованији од полазног.

За $\dfrac{\infty}{\infty}$ имамо $L=\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x^{-\alpha}} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^\alpha}{-\alpha} = \left[\dfrac{0}{-\alpha}\right] = 0.$ ■

6. 12.93. $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right).$

Решење. $L = \lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-1-\ln x}{\ln x(x-1)} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}\cdot(x-1)+\ln x\cdot 1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-1}{x-1+\ln x} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{1+\ln x+1} = \dfrac{1}{1+\ln 1+1} = \dfrac{1}{2}.$ ■

7. 12.95. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}.$

Решење. Означимо дати лимес са $L = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$. Тада имамо да је $\ln L = \ln \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \ln \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}\cdot \ln\dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \frac{\sin x}{x}}{x^2} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}\cdot \frac{\cos x\cdot x - \sin x}{x^2}}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos x - \sin x}{2x^2 \sin x} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - x\sin x - \cos x}{4x\cdot \sin x + 2x^2\cdot\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-x\sin x}{4x\cdot \sin x + 2x^2\cdot\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\sin x}{4\sin x + 2x\cos x} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\cos x}{4\cos x + 2\cos x + 2x(-\sin x)} = \dfrac{-\cos 0}{4\cos 0 + 2\cos 0 + 2\cdot 0\cdot \sin 0} = \dfrac{1}{6}$. Одавде добијамо да је $L = e^{-1/6} = \dfrac{1}{\sqrt[6]{e}}$. ■

XII двочас вежби — Владимир Балтић

13. Тејлорова формула

8. Функцију $f(x)=\sqrt{x}$ апроксимирати Тејлоровим полиномом трећег степена у околини тачке $x=1$.

Решење. $f(x)=\sqrt{x}$, $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f''(x)=\frac{-1}{4x\sqrt{x}}$, $f'''(x)=\frac{3}{8x^2\sqrt{x}}$. $f(1)=1$, $f'(1)=\frac{1}{2}$, $f''(1)=-\frac{1}{4}$, $f'''(1)=\frac{3}{8}$. $T_3(x)=1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+\frac{1}{16}(x-1)^3$, па је $\sqrt{x}\approx 1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+\frac{1}{16}(x-1)^3$ у околини $x=1$. ■

9. Одредити Тејлоров полином 4. степена функције $f(x)=e^x$ у околини тачке $x=-1$.

Решење. Како је $f(x)=e^x$ имамо да је сваки извод $f^{(n)}(x)=e^x$, па је и $f^{(n)}(-1)=e^{-1}=\frac{1}{e}$. Кад ово убацимо у Тејлорову формулу добијамо Тејлоров полином $T_4(x)=\frac{1}{e}\left[1+(x+1)+\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{1}{6}(x+1)^3+\frac{1}{24}(x+1)^4\right]$. ■

10. Полином $P(x)=x^4-x^3+x^2-1$ развити по потенцијама од $(x-2)$.

Решење 1. Развимо $P(x)$ у Тејлоров полином у околини тачке 2. $P(x)=x^4-x^3+x^2-1$, $P'(x)=4x^3-3x^2+2x$, $P''(x)=12x^2-6x+2$, $P'''(x)=24x-6$, $P^{iv}(x)=24$. $P(2)=11$, $P'(2)=24$, $P''(2)=38$, $P'''(2)=42$, $P^{iv}(2)=24$. Како су полином и његов Тејлоров полином истог степена једнаки добијамо тражено представљање полинома $P(x)$ по потенцијама (степенима) од $x-2$: $P(x)=T_4(x)=11+24(x-2)+19(x-2)^2+7(x-2)^3+(x-2)^4$. ■

Решење 2. Вишеструко ћемо делити полином $P(x)$ са $x-2$ Хорнеровом шемом. Обратите пажњу да коефицијенти полинома $P(x)=x^4-x^3+x^2-1$ у првом реду Хорнерове шеме нису $1 \quad -1 \quad 1 \quad -1$ јер би то одговарало полиному трећег степена $x^3 - x^2 + x - 1$, него су $1 \quad -1 \quad 1 \quad 0 \quad -1$, јер полином $P(x)$ можемо записати као $P(x) = x^4 - x^3 + x^2 + 0 \cdot x - 1$. Стога имамо:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 2 & 1 & 1 & 3 & 6 & \boxed{11} \\ 2 & 1 & 3 & 9 & \boxed{24} & \\ 2 & 1 & 5 & \boxed{19} & & \\ 2 & 1 & \boxed{7} & & & \\ 2 & \boxed{1} & & & & \end{array}$$

Тиме смо добили да је $P(x) = 11 + 24(x-2) + 19(x-2)^2 + 7(x-2)^3 + (x-2)^4$.
Коефицијенте развоја 11,24,19,7,1 добијамо када читамо редом остатке у вишеструкој Хорнеровој шеми. ■

11. Полином $P(x) = x^4 - 3x^2 - x + 1$ развити по степенима од $(x-3)$.

Резултат. $P(x) = T_4(x) = 53 + 89(x-3) + 51(x-3)^2 + 12(x-3)^3 + (x-3)^4$. ■

12. 13.23. Одредити Тејлоров полином трећег степена којим се функција $f(x) = x^2 \ln x$ апроксимира у околини тачке $x_0 = 1$ и проценити грешку апроксимације за $|x-1| < \frac{1}{4}$.

Решење. $f(x) = x^2 \cdot \ln x,\ f'(x) = 2x \ln x + x = x(2\ln x + 1),\ f''(x) = 2\ln x + 1 + x \cdot \frac{2}{x} = 2\ln x + 3,\ f'''(x) = \frac{2}{x}$.
$f(1) = 0,\ f'(1) = 1,\ f''(1) = 3,\ f'''(1) = 2$.
$T_3(x) = 0 + \frac{1}{1!}(x-1) - \frac{3}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 = (x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$.
Потребно је још да проценимо грешку. Како је $f^{iv}(x) = -\frac{2}{x^2}$ добијамо да је грешка у Лагранжовом облику $R_3(x) = \dfrac{-\frac{2}{\theta^2} \cdot (x-1)^4}{4!} = \dfrac{-(x-1)^4}{12\theta^2}$. Како је θ број између 1 и x, а за x важи $|x-1| < \frac{1}{4}$, тј. $\frac{3}{4} < x < \frac{5}{4}$ добијамо да је и $\frac{3}{4} < \theta < \frac{5}{4}$. Стога је $\min\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \max\frac{1}{\theta^2} = \frac{16}{9}$. Максимална вредност за $|x-1|$ је $\frac{1}{4}$, па имамо да је $|R_3(x)| < \dfrac{(\frac{1}{4})^4}{12 \cdot (\frac{3}{4})^2} = \dfrac{1}{1728} < 0.0006$. ■

13. Одредити Маклоренов полином другог степена функције $y(x) = \sqrt[5]{1-x}$. Служећи се тим развојем наћи приближну вредност за $\sqrt[5]{0.99}$.

Решење. $y(x) = (1-x)^{1/5},\ y'(x) = \frac{-1}{5}(1-x)^{-4/5},\ y''(x) = \frac{-4}{25}(1-x)^{-9/5}$. $y(0) = 1,\ y'(0) = \frac{-1}{5},\ y''(x) = \frac{-4}{25}$. Маклоренов полином је $T_2(x) = 1 - \frac{1}{5}x - \frac{2}{25}x^2$, па је апроксимација функције $y(x) = \sqrt[5]{1-x}$ Маклореновим полиномом 2. степена $y(x) \approx 1 - \frac{1}{5}x - \frac{2}{25}x^2$.

Напомена. До ове апроксимације можемо доћи и коришћењем познатих Маклоренових развоја (јер када $x \to 0$ онда и $-x \to 0$): $y(x) = \sqrt[5]{1-x} = [1+(-x)]^{1/5} = 1 + \binom{1/5}{1}(-x) + \binom{1/5}{2}(-x)^2 + o(x^2) \approx 1 + \binom{1/5}{1}(-x) + \binom{1/5}{2}(-x)^2 = 1 + \frac{1/5}{1}(-x) + \frac{(1/5)\cdot(-4/5)}{1\cdot 2}(-x)^2 = 1 - \frac{1}{5}x - \frac{2}{25}x^2$.
Даље имамо $\sqrt[5]{0.99} = \sqrt[5]{1-0.01} = y(0.01) \approx T_2(0.01) = 0.997992$.
Ако израчунамо дигитроном добијамо $\sqrt[5]{0.99} = 0.997991951661425800481448732 84\ldots$, тако да видимо да је грешка $R_2(0.01) < 5 \cdot 10^{-8}$, што је сасвим задовољавајуће. Већу прецизност би добили да смо апроксимирали Маклореновим полиномом већег степена. ■

14. Одредити косу асимптоту функције $f(x) = xe^{1/x}$.

Решење. $f(x) = x \cdot e^{1/x} = x \cdot \left(1 + \frac{1/x}{1!} + o(\frac{1}{x^2})\right) = x + 1 + o(\frac{1}{x})$ (користимо познат Маклоренов развој $e^t = 1 + \frac{t}{1!} + o(t^2)$ јер кад $x \to \pm\infty$ онда $t = \frac{1}{x} \to 0$), па је права $y = x + 1$ је обострана коса асимптота. ■

15. Одредити косу асимптоту функције $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$.

Решење. Како је $f(x) = \sqrt{x^2+x} = |x| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$, добијамо да када $x \to +\infty$ важи $f(x) = x \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x}} = x \cdot (1 + \frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x})) = x + \frac{1}{2} + o(1)$ (користимо познат Маклоренов развој за корен јер кад $x \to +\infty$ онда $t = \frac{1}{x} \to 0$), па добијамо да је права $y = x + \frac{1}{2}$ десна коса асимптота. Када $x \to +\infty$ важи $f(x) = -x \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x}} = -x \cdot (1 + \frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x})) = -x - \frac{1}{2} + o(1)$, па добијамо да је права $y = -x - \frac{1}{2}$ лева коса асимптота. ■

16. 13.46. Израчунати $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$.

Решење. Искористићемо познате Маклоренове развоје: $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$ и $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$ (за $t = -\frac{1}{2}x^2$) $\Rightarrow e^{-x^2/2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$. Када ово уврстимо у дати лимес добијамо:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) - \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)\right)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{2}{24}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{12} + o(1) = -\frac{1}{12}.$$

■

17. 13.50. Израчунати $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]$.

Решење. Када $x \to +\infty$ онда $\frac{1}{x} \to 0$ па имамо да је $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right] = \lim\limits_{x\to +\infty} \left[x - x^2 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})\right)\right] = \lim\limits_{x\to +\infty} x - x - \frac{1}{2} + o(1) = \lim\limits_{x\to +\infty} -\frac{1}{2} + o(1) = -\frac{1}{2}$. ■

18. 13.44. Израчунати $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}$.

Решење. Приметимо да је $(\cos x)^{\sin x} = \left(e^{\ln(\cos x)}\right)^{\sin x} = e^{\ln(\cos x)\cdot \sin x}$. Сада ћемо користити познате Маклоренове развоје: $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$, $\sin x = x + o(x^2)$ и $\ln(1+t) = t + o(t)$ и $e^t = 1 + t + o(t)$. На основу тога имамо да је $\ln(\cos x) = \ln\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right) = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$, па је $\ln(\cos x)\cdot \sin x = \left(-\frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right)\cdot\left(x + o(x^2)\right) = -\frac{1}{2}x^3 + o(x^4)$. Даље имамо да је $e^{\ln(\cos x)} = e^{-\frac{1}{2}x^3 + o(x^4)} = 1 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^4)$. Стога је тражени лимес:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^4)\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^3 + o(x^4)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} + o(x) = \frac{1}{2}.$$

■

19. испит 3. октобар 2007. Дата је функција $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x} - \sin 2x - 1 - 2x^2}{x^3}, & x \neq 0 \\ \dfrac{3}{8}, & x = 0 \end{cases}$.

а) Написати Маклоренове полиноме трећег степена за функције e^{2x} и $\sin 2x$.
б) Израчунати $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
в) Да ли је функција $f(x)$ непрекидна у тачки $x = 0$?

Решење. **а)** Одредимо Маклоренов полином трећег степена функције $g(x) = e^{2x}$.
$g(x) = e^{2x}$, $g(0) = 1$; $g'(x) = 2e^{2x}$, $g'(0) = 2$; $g''(x) = 4e^{2x}$, $g''(0) = 4$; $g'''(x) = 8e^{2x}$, $g'''(0) = 8$.
Маклоренов полином је $M_3(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3$, тј. $g(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$.
Одредимо Маклоренов полином трећег степена функције $h(x) = \sin 2x$.
$h(x) = \sin 2x$, $h(0) = 0$; $h'(x) = 2\cos 2x$, $h'(0) = 2$; $h''(x) = -4\sin 2x$, $h''(0) = 0$; $h'''(x) = -8\cos 2x$, $h'''(0) = -8$.
Маклоренов полином је $M_3(x) = 2x - \frac{4}{3}x^3$, тј. $h(x) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$.

Напомена. До ових апроксимација можемо доћи и коришћењем Маклоренових развоја експоненцијалне функције и синусне функције:

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + o(t^3) \qquad \text{и} \qquad \sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + o(t^3),$$

стављајући $t = 2x$, одмах добијамо

$$e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3) \qquad \text{и} \qquad \sin 2x = 2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3).$$

б) Како за $x \neq 0$ имамо да је

$$f(x) = \frac{e^{2x} - \sin 2x - 1 - 2x^2}{x^3} = \frac{\left(1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)\right) - \left(2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)\right) - 1 - 2x^2}{x^3} = \frac{8}{3} + o(1),$$

то је $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{8}{3}$.

в) Како је $\dfrac{3}{8} = f(0) \neq \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{8}{3}$ то функција $f(x)$ има прекид у тачки $x = 0$. ■