XI двочас вежби — Владимир Балтић

11. Непрекидност функција
12. Извод и диференцијал

Овде је дат кратак преглед XI двочаса вежби. Потребно је да обновите одговарајућу теоријску материју која је обрађена на предавањима и у уџбенику.

Како се највећим делом на вежбама раде задаци из збирке, након броја задатка плавом бојом је означен број задатка у збирци "МАТЕМАТИКА 1" професора Р. Лазовића, Д. Ђорића и Ђ. Јованова у форми p.z, где је p број поглавља, а z број задатка у том поглављу. Ови задаци са преосталима из збирке (из поглавља "11. Непрекидност функција" и делом "12. Извод и диференцијал", као и оним из поглавља "15. Други колоквијум" који су везани за ову материју) чине целину довољну за припрему ове области.

11. Непрекидност функција

1. Одредити вредност параметра A тако да следеће функције буду непрекидне у тачки $x = 0$:

а) $y(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ A + x, & x \geqslant 0 \end{cases}$; **б)** $y(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{2x^2}, & x \neq 0 \\ A, & x = 0 \end{cases}$; **в)** $y(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2}-1}{1-\cos x}, & x \neq 0 \\ A, & x = 0 \end{cases}$.

Решење. **а)** Функција $y(x)$ непрекидна у $x = 0$ ако важи:

$$\lim_{x\to 0^-} y(x) = y(0) = \lim_{x\to 0^+} y(x).$$

Када израчунамо ове граничне вредности и вредност добијамо

$$\lim_{x\to 0^-} y(x) = \lim_{x\to 0^-} e^x = e^0 = 1, \quad y(0) = A + 0 = A, \quad \lim_{x\to 0^+} y(x) = \lim_{x\to 0^+} A + x = A + 0 = A$$

Функција $y(x)$ ће бити непрекидна ако је $1 = A = A$, односно $A = 1$.

У наредна 2 дела задатка је $A = \lim\limits_{x\to 0} y(x)$, а те лимесе је најлакше добити коришћењем еквивалентних величина.

Резултати су: **б)** $\frac{1}{4}$; **в)** 2. ■

2. Испитати непрекидност функције $y = \begin{cases} -\frac{1}{x}, & x < 0 \\ 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x, & 1 < x \leqslant 2 \\ 3, & 2 < x \leqslant 3 \\ \frac{x^2}{3}, & x > 3 \end{cases}$.

Решење. Непрекидна је за $x \in (-\infty, 0)$; $x \in (0, 2)$; $x \in (2, +\infty)$.

У тачки $x = 0$ има прекид са леве (и то је прекид II врсте), а непрекидна је са десне стране.

У $x = 2$ је непрекидна са леве, а има прекид са десне стране (и то је прекид I врсте).

У $x = 1$ и $x = 3$ је непрекидна. ■

3. 11.40. Доказати да функција $f(x) = \dfrac{|2x-1|}{2x-1}$ има у тачки $x = \frac{1}{2}$ прекид прве врсте који је неотклоњив.

Решење. За апсолутну вредност имамо да важи $|2x-1| = \begin{cases} 2x-1, & x \geqslant \frac{1}{2} \\ 1-2x, & x < \frac{1}{2} \end{cases}$, што кад уврстимо у наредне граничне вредности даје: $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} \dfrac{1-2x}{2x-1} = -1$ и $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} \dfrac{2x-1}{2x-1} = 1$. Како су ове 2 граничне вредности различите, а за $x = \frac{1}{2}$ функција $f(x)$ није дефинисана добијамо да у тачки $x = \frac{1}{2}$ функција $f(x)$ има прекид прве врсте који је неотклоњив. ■

4. 11.47 (1). Доказати да функција $f(x) = \dfrac{1}{x^2-9}$ има прекид друге врсте у тачкама $x = -3$ и $x = 3$.

Упутства. Како је $\lim\limits_{-3^-} f(x) = \lim\limits_{-3^-} \dfrac{1}{x^2-9} = +\infty$ и $\lim\limits_{-3^+} f(x) = \lim\limits_{-3^-} \dfrac{1}{x^2-9} = -\infty$ и за $x=-3$ функција $f(x)$ није дефинисана добијамо да у $x=-3$ функција $f(x)$ има прекид друге врсте.
Потпуно аналогно се добија да је и у тачки $x=3$ прекид друге врсте. ■

5. 11.47 (2). Доказати да функција $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ има прекид друге врсте у тачки $x=0$.

Решење. Функција $\frac{1}{x}$ није дефинисана за $x=0$, те и функција $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ није дефинисана за $x=0$. Граничне вредности $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ не постоје (разлог за непостојање овог лимеса је ако би $x\to0^+$ по бројевима $x=\dfrac{1}{k\pi}$, где је $k\in\mathbb{N}$ онда би било $\sin\frac{1}{x}=\sin(k\pi)=0$, а ако би $x\to0^+$ по бројевима $x=\dfrac{1}{(4k+1)\frac{\pi}{2}}$, где је $k\in\mathbb{N}$ онда би било $\sin\frac{1}{x}=\sin\big((4k+1)\frac{\pi}{2}\big)=\sin(2k\pi+\frac{\pi}{2})=1$; слично би се показало непостојање и првог лимеса). Стога функција $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ има прекид друге врсте у тачки $x=0$. ■

12. Извод и диференцијал

6. Израчунати извод по дефиницији функције $y(x)=e^{2x}$.

Решење. $y'(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{e^{2(x+h)}-e^{2x}}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{e^{2x}(e^{2h}-1)}{h}=\lim\limits_{h\to0}2e^{2x}\cdot\dfrac{e^{2h}-1}{2h}=2e^{2x}$. ■

7. Израчунати извод по дефиницији функције $y(x)=x^2$ за $x=2$.

Решење. $y'(2)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(2+h)^2-2^2}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{4+4h+h^2-4}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{4h+h^2}{h}=\lim\limits_{h\to0}(4+h)=4$. ■

Израчунати изводе следећих функција:

8. $f(x)=2e^x-\cos x+5$;

Решење. $f'(x)=2\cdot e^x+\sin x+0=2e^x+\sin x$. ■

9. $f(x)=x^5\cdot\ln x$.

Решење. $f'(x)=5x^4\cdot\ln x+x^5\cdot\frac{1}{x}=5x^4\ln x+x^4=x^4(5\ln x+1)$. ■

10. $f(x)=x\sin x+5\sin 5$.

Решење. Обратити пажњу да је $5\sin 5$ константа (јер се нигде не јавља променљива x!) те је њен извод 0, док за први члан $x\sin x$ користимо формулу за извод производа.
$f'(x)=1\cdot\sin x+x\cdot\cos x+0=\sin x+x\cos x$. ■

11. $f(x)=\dfrac{\operatorname{arctg} x}{2x}$.

Решење. $f'(x)=\dfrac{(\operatorname{arctg} x)'\cdot(2x)-\operatorname{arctg} x\cdot(2x)'}{(2x)^2}=\dfrac{\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x-\operatorname{arctg} x\cdot 2}{4x^2}=\dfrac{\frac{x}{1+x^2}-\operatorname{arctg} x}{2x^2}=\dfrac{x-(1+x^2)\operatorname{arctg} x}{2x^2(1+x^2)}$. ■

12. $f(x)=\sin^2 x$.

Решење. Ово је први пример са изводом сложене функције. Најважније је уочити од којих елемената се састоји сложена функција!
Дата сложена функција се може представити као

$$f(x)=\sin^2 x=(\sin x)^2.$$

Како је $(u^2)'=2u\cdot u'$ имамо $f'(x)=2\sin x\cdot(\sin x)'=2\sin x\cos x=\sin 2x$. ■

13. $f(x) = \sin x^2$.

Решење. Ово је сложена функција
$$f(x) = \sin x^2 = \sin(x^2).$$
Како је $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$ имамо $\quad f'(x) = \cos(x^2) \cdot (x^2)' = 2x\cos(x^2)$. ■

14. $f(x) = \ln(\sin x + \cos x)$.

Решење. $f'(x) = \dfrac{1}{\sin x + \cos x} \cdot (\sin x + \cos x)' = \dfrac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}$. ■

15. 12.40. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}$.

Решење. $f'(x) = \dfrac{1}{1 + (\frac{1-x}{1+x})^2} \cdot (\frac{1-x}{1+x})' = \dfrac{1}{\frac{(1+x)^2+(1-x)^2}{(1+x)^2}} \cdot \dfrac{-1 \cdot (1+x) - (1-x) \cdot 1}{(1+x)^2} = \dfrac{-1-x-1+x}{1+2x+x^2+1-2x-x^2} = \dfrac{-2}{2+2x^2} = \dfrac{-1}{1+x^2}$. ■

16. $f(x) = \sin x \cdot \ln x \cdot \sqrt{x}$.

Решење. Како имамо формулу $(u \cdot v)' = u'v + uv'$ за извод производа 2 фактора то ћемо дату функцију написати нпр. у облику $f(x) = (\sin x \cdot \ln x) \cdot \sqrt{x}$ и 2 пута ћемо применити претходну формулу.

$f'(x) = (\sin x \cdot \ln x)' \cdot \sqrt{x} + (\sin x \cdot \ln x) \cdot (\sqrt{x})' = (\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \dfrac{1}{x}) \cdot \sqrt{x} + (\sin x \cdot \ln x) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2x\cos x \ln x + 2\sin x + \ln x \sin x}{2\sqrt{x}}$. ■

17. $f(x) = \sin(\ln \sqrt{x})$.

Решење. Овде ћемо 2 пута за редом користити формулу за извод сложене функције.

$f'(x) = \cos(\ln\sqrt{x}) \cdot (\ln\sqrt{x})' = \cos(\ln\sqrt{x}) \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})' = \cos(\ln\sqrt{x}) \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\cos(\ln\sqrt{x})}{2x}$. ■

18. Одредити други извод функције $y(x) = 4x^3 - 2x^2 - x$.

Решење. $y'(x) = 12x^2 - 4x - 1,\ y''(x) = \big(y'(x)\big)' = 24x - 4$. ■

19. 12.73. Одредити вредности реалних параметара a и b тако да функција $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leqslant 2 \\ ax+b, & x > 2 \end{cases}$ буде диференцијабилна у тачки $x = 2$.

Решење. Да би $f(x)$ била диференцијабилна у $x = 2$ потребно је да је непрекидна у $x = 2$ и да је $f'_-(2) = f'_+(2)$.

За непрекидност у $x = 2$ имамо да треба да буде $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = f(2) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$. Како је
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^3 = 2^3 = 8, \quad f(2) = 2^3 = 8 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} ax+b = a\cdot 2 + b,$$
добијамо да мора да важи $2a + b = 8$.

$f'_-(2) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{(2+h)^3-8}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{8+12h+6h^2+h^3-8}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} 12+6h+h^2 = 12+0+0 = 12,$

$f'_+(2) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{a(2+h)+b-8}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{(2a+b-8)+ah}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{0+ah}{h} = a.$

Одавде добијамо $a = 12$, што кад уврстимо у $2a + b = 8$ даје $b = -16$.

Дакле, функција $f(x)$ је диференцијабилна у тачки $x = 2$ само за $a = 12$ и $b = -16$. ■

20. Ако је $x = \dfrac{1}{t}$ и $y = t^2 - 3t + 2$ израчунати y'_x за $x = \frac{1}{2}$.

Решење. $\dot{y} = 2t - 3,\ \dot{x} = -\dfrac{1}{t^2}$. Стога је $y'_x = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = \dfrac{2t-3}{-\frac{1}{t^2}} = 3t^2 - 2t^3$.

Потребно је још одредити извод у конкретној тачки: $x = \frac{1}{2} \ \Rightarrow t = 2 \ \Rightarrow y'_x \Big|_{t=2} = 3\cdot 2^2 - 2\cdot 2^3 = -4$. ■

21. Одредити извод y'_x имплицитно задате функције $3y^5 + 2y^3 + y - x = 0$.

Решење 1. Направимо изводе по x и "извучимо" y'_x. Како је y функција од x то ћемо за изводе од y^5 и y^3 по x користити правила за извод сложене функције.
$15y^4 \cdot y'_x + 6y^2 \cdot y'_x + y'_x - 1 = 0$. Одавде је $y'_x(15y^4 + 6y^2 + 1) = 1$, што даје $y'_x = \dfrac{1}{15y^4 + 6y^2 + 1}$. ■

Решење 2. Ово решење излази из оквира курса Математике 1 на ФОН-у (али је добар увод у Математику 2) јер користи парцијалне изводе функције 2 променљиве.

Представимо дату функцију као функцију 2 променљиве $F(x,y) = 3y^5 + 2y^3 + y - x = 0$. Одредимо парцијалне изводе функције $F(x,y)$ по x, $\dfrac{\partial F}{\partial x}$, ($y$ и све што нема x третирамо као константу и правимо извод по x) и по y, $\dfrac{\partial F}{\partial y}$, ($x$ третирамо као константу и правимо извод по y):

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 + 0 + 0 - 1 = -1, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 15y^4 + 6y^2 + 1 + 0.$$

Тада је тражени извод $y'_x = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\dfrac{-1}{15y^4 + 6y^2 + 1} = \dfrac{1}{15y^4 + 6y^2 + 1}$. ■

Решење 3. Приметимо да из дате једнакости можемо добити да је $x = 3y^5 + 2y^3 + y$. Ово је инверзна функција па је $y'_x = \dfrac{1}{x'_y} = \dfrac{1}{(3y^5 + 2y^3 + y)'_y} = \dfrac{1}{15y^4 + 6y^2 + 1}$. ■

22. 12.61. Одредити извод функције $f : x \mapsto y$ задате имплицитно $e^x \sin y - e^{-y} \cos x = 0$.

Резултат. $y'_x = -\dfrac{e^x \sin y + e^{-y} \sin x}{e^x \cos y + e^{-y} \cos x}$. ■

23. 12.50. Одредити извод функције $f(x) = x^{\sin x}$.

Решење 1. Овај задатак ћемо решавати преко логаритамског извода. Одредимо чему је једнако $\ln f(x)$: $\ln f(x) = \ln x^{\sin x}$, тј.

$$\ln f(x) = \sin x \cdot \ln x.$$

Сада ћемо одредити извод ове једнакости: на левој страни имамо извод сложене функције, а на десној извод производа, па имамо $\dfrac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = (\sin x)' \cdot \ln x + \sin x \cdot (\ln x)' = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \dfrac{1}{x}$. Када све помножимо са $f(x) = x^{\sin x}$ добијамо $f'(x) = x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \dfrac{\sin x}{x}\right)$. ■

Решење 2. Полазну функцију можемо представити на следећи начин $f(x) = x^{\sin x} = \left(e^{\ln x}\right)^{\sin x} = e^{\ln x \cdot \sin x}$. Сада кад правимо извод ове функције прво ћемо користити извод сложене функције, а затим извод производа.
$f'(x) = e^{\ln x \cdot \sin x} \cdot (\ln x \cdot \sin x)' = x^{\sin x} \cdot \left(\dfrac{1}{x} \cdot \sin x + \ln x \cdot \cos x\right) = x^{\sin x}(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x})$. ■

24. 12.76. Одредити диференцијал функције $f(x) = xe^x$.

Решење. Израчунајмо први извод ове функције $f'(x) = (x \cdot e^x)' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (1+x)e^x$. Тада је диференцијал $\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x = (1+x)e^x\,\mathrm{d}x$. ■