6. Аналитичка геометрија у простору

Овде је дат кратак преглед VI и VII двочаса вежби. Потребно је да обновите одговарајућу теоријску материју која је обрађена на предавањима и у уџбенику.

Како се највећим делом на вежбама раде задаци из збирке, након броја задатка плавом бојом је означен број задатка у збирци "МАТЕМАТИКА 1" професора Р. Лазовића, Д. Ђорића и Ђ. Јованова у форми p.z, где је p број поглавља, а z број задатка у том поглављу. Ови задаци са преосталима из збирке (из поглавља "6. Аналитичка геометрија у простору", као и оним из поглавља "7. Први колоквијум" који су везани за ову материју) чине целину довољну за припрему ове области.

1. 6.1 (4). Написати једначину равни која садржи тачке $A(1,1,1)$, $B(0,-1,2)$ и $C(2,3,-1)$.

Решење 1. Једначина непознате равни је $\pi\colon ax+by+cz+d=0$. Како равни π припада тачка A, координате тачке A задовољавају једначину равни π: $a\cdot1+b\cdot1+c\cdot1+d=0$. Од тачке B добијамо једначину $a\cdot0+b\cdot(-1)+c\cdot2+d=0$. Од тачке C добијамо једначину $a\cdot2+b\cdot3+c\cdot(-1)+d=0$. Дакле, добили смо следећи хомоген систем:

$$\begin{array}{rcrcrcrcll} a & + & b & + & c & + & d & = & 0 & \\ & - & b & + & 2c & + & d & = & 0 & \\ 2a & + & 3b & - & c & + & d & = & 0 & \mathrm{III}-2\cdot\mathrm{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcll} a & + & b & + & c & + & d & = & 0 & \\ & - & b & + & 2c & + & d & = & 0 & \\ & & b & - & 3c & - & d & = & 0 & \mathrm{III}+\mathrm{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} a & + & b & + & c & + & d & = & 0 \\ & - & b & + & 2c & + & d & = & 0 \\ & & & - & c & & & = & 0. \end{array}$$

Овде су a, b и c везане промењливе, док је d слободна промењлива, па ћемо узети да је $d=t$, $t\in\mathbb{R}$. Враћањем уназад добијамо $c=0$, $b=t$ и $a=-2t$, тј. $(a,b,c,d)=(-2t,t,0,t)$, $t\in\mathbb{R}$.

Како нама није потребно да одредимо сва решења (него само једно), можемо узети неку конкретну вредност за параметар t, нпр. $t=-1$, па добијамо да је $(a,b,c,d)=(2,-1,0,-1)$, одакле добијамо да је раван π која садржи тачке A, B и C дата са $\pi:\ 2x-y-1=0$. ∎

Решење 2. Искористимо формулу за једначину равни π кроз три тачке $A(x_A,y_A,z_A)$, $B(x_B,y_B,z_B)$ и $C(x_C,y_C,z_C)$

$$\pi\colon \begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A & z_C-z_A \end{vmatrix}=0,$$

где су x, y и z координате тачака равни. $\pi\colon \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0-1 & -1-1 & 2-1 \\ 2-1 & 3-1 & -1-1 \end{vmatrix}=0$, тј. $\pi\colon \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}=0.$

Када развијемо детерминанту по првој врсти добијамо $+(x-1)\cdot(4-2)-(y-1)\cdot(2-1)+(z-1)\cdot\big(-2-(-2)\big)=0$. $2x-2-(y-1)=0$, тј. раван која садржи тачке A, B и C је $\pi:\ 2x-y-1=0$. ∎

Решење 3. Ако су вектори $\vec a=\overrightarrow{AC}=(x_C-x_A,y_C-y_A,z_C-z_A)=(1,2,-2)$ и $\vec b=\overrightarrow{BC}=(2,4,-3)$ дати преко својих координата онда је вектор нормале на раван одређену тачкама A, B и C дат са

$$\vec n=\vec a\times\vec b=\begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix}=2\cdot\vec i-1\cdot\vec j+0\cdot\vec k=(2,-1,0).$$

Једначина равни која има вектор нормале $\vec n=(n_x,n_y,n_z)$ и пролази кроз тачку $A(x_A,y_A,z_A)$ је

$$\pi\colon n_x\cdot(x-x_A)+n_y\cdot(y-y_A)+n_z\cdot(z-z_A)=0.$$

$2\cdot(x-1)-1\cdot(y-1)+0\cdot(z-1)=0$. Тражена раван је $\pi:\ 2x-y-1=0$. ∎

2. 6.1 (6). Написати једначину равни која садржи тачку $A(2,-1,1)$ и нормална је на равни $\alpha\colon 3x+2y-z+4=0$ и $\beta\colon x+y+z-3=0$.

Решење 1. Раван $\alpha\colon 3x+2y-z+4=0$ има вектор нормале $\vec{n}_\alpha=(3,2,-1)$, док раван $\beta\colon x+y+z-3=0$ има вектор нормале $\vec{n}_\beta=(1,1,1)$. Како је тражена раван π нормална и на раван α и на раван β, то и њен вектор нормале $\vec{n}_\pi$ мора бити нормалан на векторе нормала $\vec{n}_\alpha=(3,2,-1)$ и $\vec{n}_\beta=(1,1,1)$, тј. $\vec{n}_\pi\perp\vec{n}_\alpha$ и $\vec{n}_\pi\perp\vec{n}_\beta$. Стога је најпогодније да узмемо да је $\vec{n}_\pi=\vec{n}_\alpha\times\vec{n}_\beta$, односно

$$\vec{n}_\pi=(3,2,-1)\times(1,1,1)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=(3,-4,1).$$

Даље, исто као у Решењу 3 претходног задатка добијамо раван π ако знамо њен вектор нормале $\vec{n}_\pi$ и једну тачку A: $3\cdot(x-2)-4\cdot\big(y-(-1)\big)+1\cdot(z-1)=0$. Тражена раван је $\pi:\ 3x-4y+z-11=0$. ∎

Решење 2. Како је тражена раван π нормална и на раван α и на раван β, то она мора бити нормална и на праву p која је пресек равни α и β, тј. $\pi\perp p$. Права p припада и равни α и β, па је она решење система

$$\begin{array}{rrcrcrcr}\alpha\colon & 3x & + & 2y & - & z & = & -4\\ \beta\colon & x & + & y & + & z & = & 3.\end{array}$$

Решење овог система је $(x,y,z)=(3t-10,13-4t,t)$, $t\in\mathbb{R}$, што је права p задата у параметарском облику. Пребацимо је на канонски облик: $p\colon \dfrac{x+10}{3}=\dfrac{y-13}{-4}=\dfrac{z}{1}=t$, те је вектор правца праве p једнак $\vec{v}_p=(3,-4,1)$. Како је $\pi\perp p$ то за вектор нормале на раван π баш можемо узети вектор правца праве p, тј. $\vec{n}_\pi=\vec{v}_p=(3,-4,1)$. Даље, исто као и у претходном решењу добијамо да је $\pi:\ 3x-4y+z-11=0$. ∎

3. 6.7 (3),(4). Испитати узајамни положај равни α и β $\big($ако су α и β паралелне израчунати растојање између њих, $d(\alpha,\beta)$, а ако се секу израчунати угао који заклапају, $\sphericalangle(\alpha,\beta)\big)$ ако је:

а) $\alpha\colon x-y+1=0$ и $\beta\colon y-z+1=0$;

б) $\alpha\colon x-2y+z-1=0$ и $\beta\colon 2x-4y+2z-1=0$.

Упутства. **а)** Како су вектори нормала $\vec{n}_\alpha=(1,-1,0)$ и $\vec{n}_\beta=(0,1,-1)$ линеарно независни (јер не важи $\vec{n}_\alpha=k\cdot\vec{n}_\beta$) имамо да ове 2 равни нису паралелне. Угао φ који образују дат је са

$$\cos\varphi=\frac{|\vec{n}_\alpha\cdot\vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha|\cdot|\vec{n}_\beta|}=\frac{|-1|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \varphi=\frac{\pi}{3}.$$

б) У овом случају су равни паралелне јер је $\vec{n}_\alpha=(1,-2,1)=\frac{1}{2}\vec{n}_\beta=\frac{1}{2}(2,-4,2)$. Растојање између равни α и равни β једнако је растојању произвољне тачке A равни α до равни β. Произвољну тачку A равни $\alpha\colon x-2y+z-1=0$ можемо добити тако што фиксирамо 2 координате, нпр. $y=z=0$, и онда из једначине равни одредимо трећу: $x=1$. Растојање тачке $A(1,0,0)$ од равни $\beta\colon 2x-4y+2z-1=0$ дато је обрасцем

$$d(A,\beta)=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|2\cdot1-4\cdot0+2\cdot0-1|}{\sqrt{2^2+(-4)^2+2^2}}=\frac{1}{\sqrt{24}}.$$

Коначно имамо да је $d(\alpha,\beta)=d(A,\beta)=\dfrac{1}{\sqrt{24}}=\dfrac{\sqrt{6}}{12}$. ∎

4. 6.13. Одредити једначину равни π која садржи пресек равни $\alpha\colon x+2y+3z-4=0$ и $\beta\colon 3x+z-5=0$ и која на координатним осама Oy и Oz одсеца подударне одсечке.

Решење. Једначина равни (тачније снопа равни) која пролази кроз пресечну праву двеју равни $\pi_1: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ и $\pi_2: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ је

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1+\lambda(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0.$$

Стога је тражена раван $\pi\colon x+2y+3z-4+\lambda(3x+z-5)=0$, односно

$$\pi\colon (1+3\lambda)x+2y+(3+\lambda)z+(-4-5\lambda)=0.$$

Одсечак на оси Oy добијамо кад заменимо $x=z=0$ и нађемо колико је y: $y=\dfrac{4+5\lambda}{2}$.

Одсечак на оси Oz добијамо кад заменимо $x=y=0$ и нађемо колико је z: $z=\dfrac{4+5\lambda}{3+\lambda}$.

Како су ови одсечци једнаке дужине имамо 2 могућа случаја:

1° $\dfrac{4+5\lambda}{2}=\dfrac{4+5\lambda}{3+\lambda}$, за $4+5\lambda\neq 0$ имамо $2=3+\lambda \Rightarrow \lambda=-1$, па је $\pi_1\colon -2x+2y+2z+1=0$.

2° $\dfrac{4+5\lambda}{2}=-\dfrac{4+5\lambda}{3+\lambda}$, за $4+5\lambda\neq 0$ имамо $2=-3-\lambda \Rightarrow \lambda=-5$, па је $\pi_2\colon -14x+2y-2z+21=0$.

Уколико је $4+5\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{4}{5}$, па је $\pi_3\colon -\frac{7}{5}x+2y+\frac{11}{5}z=0$, односно када све помножимо са 5 добијамо $\pi_3\colon -7x+10y+11z=0$.

Услове задатка задовољавају 3 равни: $\pi_1\colon -2x+2y+2z+1=0$, $\pi_2\colon -14x+2y-2z+21=0$ и $\pi_3\colon -7x+10y+11z=0$. ■

Напомена. Права p која се налази у пресеку равни $\alpha\colon x+2y+3z-4=0$ и $\beta\colon 3x+z-5=0$ је дата у параметарском облику са $x=t$, $y=-\frac{11}{2}+4t$, $z=5-3t$, $t\in\mathbb{R}$.

5. 6.17 (1). Одредити праву q која садржи тачку $A(-1,3,-2)$ и паралелна је правој $p\colon \begin{cases} 3x-y+2z-7=0 \\ x+3y-2z-3=0 \end{cases}$.

Решење. Паралелне праве имају пропорционалне векторе правца, тј. важи $\vec{v}_q=k\cdot\vec{v}_p$. Када решимо систем

$$\begin{aligned} 3x-y+2z-7=0 \\ x+3y-2z-3=0 \end{aligned}$$

добијамо да је права p у параметарском облику дата са $x=-\frac{2}{5}t+\frac{18}{5}$, $y=\frac{4}{5}t-\frac{1}{5}$, $z=t$, $t\in\mathbb{R}$, а у канонском са

$$p\colon \frac{x-\frac{18}{5}}{-\frac{2}{5}}=\frac{y+\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{z}{1},$$

одакле добијамо да је вектор правца $\vec{v}_p=(-\frac{2}{5},\frac{4}{5},1)$. Како су вектори $\vec{v}_p$ и $\vec{v}_q$ пропорционални можемо узети да је $k=5$ (да не би имали разломке) и онда је $\vec{v}_q=(-2,4,5)$. Једначина праве q која има вектор правца $\vec{v}_q=(-2,4,5)$ и садржи тачку $A(-1,3,-2)$ је $q\colon \dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z+2}{5}$. ■

6. 6.25. Одредити праву r која садржи тачку $A(3,2,-5)$ и вектор правца јој је нормалан на праве $p\colon \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$ и $q\colon \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z+1}{-3}$.

Упутства. Вектори правца су $\vec{v}_p=(3,-2,1)$ и $\vec{v}_q=(2,3,-3)$. Због $\vec{v}_r\perp\vec{v}_p$ и $\vec{v}_r\perp\vec{v}_q$ можемо узети

$$\vec{v}_r=\vec{v}_p\times\vec{v}_q=(3,11,13).$$

Како права r садржи тачку A добијамо да је $r\colon \dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-2}{11}=\dfrac{z+5}{13}$. ■

7. Дате су праве $p\colon \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-5}{-4}=\dfrac{z+4}{1}$ и $q\colon \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+5}{-2}=\dfrac{z+3}{\lambda}$, $(\lambda\in\mathbb{R})$.

а) Одредити вредност реалног параметра λ тако да се праве p и q секу.

б) За вредност λ одређену у делу под а) одредити меру оштрог угла који граде праве p и q, као и једначину равни коју одређују ове праве.

Решење. **а)** Потребан услов да се непаралелне праве $\dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1}$ и $\dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_2}{n_2}$ секу јесте

$$\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0.$$

За праве p и q добијамо $\begin{vmatrix} (-2)-2 & 5-(-5) & (-4)-(-3) \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & \lambda \end{vmatrix}=6\lambda+6=0$, одакле је $\lambda=-1$.

б) Угао φ између правих p и q које се секу је дат са $\cos\varphi = \dfrac{|\vec{v}_p \cdot \vec{v}_q|}{|\vec{v}_p| \cdot |\vec{v}_q|}$. Како су вектори правца ових правих $\vec{v}_p = (1, -4, 1)$ и $\vec{v}_q = (2, -2, -1)$ добијамо да је

$$\vec{v}_p \cdot \vec{v}_q = (1, -4, 1) \cdot (2, -2, -1) = 2 + 8 - 1 = 9, \quad |\vec{v}_p| = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 1^2} = 3\sqrt{2}, \quad |\vec{v}_q| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = 3,$$

па је $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, што повлачи да је угао између правих $\varphi = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\pi}{4}$.

Раван π која садржи праве p и q има вектор нормале $\vec{n}_\pi$ који је нормалан и на праве p и q, па је $\vec{n}_\pi \perp \vec{v}_p$ и $\vec{n}_\pi \perp \vec{v}_q$, те можемо узети да је $\vec{n}_\pi = \frac{1}{3}\vec{v}_p \times \vec{v}_q$, тј.

$$\vec{n}_\pi = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(6\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}) = (2, 1, 2).$$

Раван π садржи $P(-2, 5, -4)$ са p, па је $\alpha\colon 2 \cdot \big(x - (-2)\big) + 1 \cdot (y - 5) + 2 \cdot \big(z - (-4)\big) = 0$, тј. $2x + y + 2z + 7 = 0$. ■

Напомена. Део под а) смо могли да решимо тако што бисмо тражили пресечну тачку правих p и q. Како је права p у канонском облику $p\colon \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-5}{-4} = \dfrac{z+4}{1} = t$, она је у параметарском облику

$$x = -2 + t, \quad y = 5 - 4t, \quad z = -4 + t,$$

док је $q\colon \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+5}{-2} = \dfrac{z+3}{\lambda} = s$ у параметарском облику

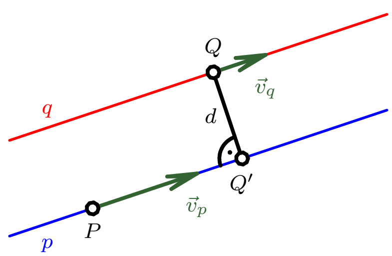
$$x = 2 + 2s, \quad y = -5 - 2s, \quad z = -3 + \lambda s.$$

Пресечна тачка T припада обема правама па за њу важи

$$x = -2 + t = 2 + 2s, \qquad y = 5 - 4t = -5 - 2s, \qquad z = -4 + t = -3 + \lambda s.$$

Из I и II једначине добијамо да је $t = 2$ и $s = -1$, што кад заменимо у III даје $-4 + 2 = -3 + \lambda \cdot (-1)$, тј. $\lambda = -1$. Приметимо да смо овако добили и координате пресечне тачке $T(0, -3, -2)$, док смо првим начином само утврдили да се ове праве секу.

8. Израчунати растојање између правих $p\colon \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{2}$ и $q\colon \begin{cases} 2x + y - 2z - 1 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases}$.



Слика уз задатак 8.

Упутства. Из канонског облика праве p налазимо вектор правца $\vec{v}_p = (1, 2, 2)$ и једну њену тачку $P(3, -1, 2)$.

Права q у параметарском облику је $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t$, $y = t$, $z = t$ $(t \in \mathbb{R})$, па је вектор правца $\vec{v}_q = (\frac{1}{2}, 1, 1)$. Како је $\vec{v}_q = \frac{1}{2}\vec{v}_p$ добијамо да су праве p и q паралелне. За неку конкретну вредност параметра t, нпр. $t = -1$, добијамо тачку $Q(0, -1, -1)$ са праве q. Растојање од праве q до праве p је једнако растојању од тачке Q до праве p, тј. $d(q, p) = d(Q, p) = \dfrac{|\vec{v}_p \times \overrightarrow{PQ}|}{|\vec{v}_p|}$. $\overrightarrow{PQ} = (-3, 0, -3)$ па је $\vec{v}_p \times \overrightarrow{PQ} = (-6, -3, 6) \Rightarrow |\vec{v}_p \times \overrightarrow{PQ}| = 9$. Још је $|\vec{v}_p| = 3$, па је тражено растојање $d(q, p) = d(Q, p) = \dfrac{9}{3} = 3$. ■

Напомена. Задатак смо могли решити и тако што би одредили пројекцију P' тачке P на праву q. Исто као у претходном начину би добили $\vec{v}_p = (1, 2, 2)$ и $P(3, -1, 2)$, као и $q\colon x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t$, $y = t$, $z = t$ $\quad (t \in \mathbb{R})$. Како $P' \in q$ имамо да је $P'(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t, t, t)$, одакле је $\overrightarrow{PP'} = (\frac{1}{2}t - \frac{5}{2}, t + 1, t - 2)$. Из услова $\overrightarrow{PP'} \perp \vec{v}_p$, тј. $\overrightarrow{PP'} \cdot \vec{v}_p = 0$ имамо

$$\overrightarrow{PP'} \cdot \vec{v}_p = \frac{1}{2}t - \frac{5}{2} + 2t + 2 + 2t - 4 = 0.$$

Добијамо $t = 1$, па је $P'(1, 1, 1)$. Коначно је $d(p, q) = |\overrightarrow{PP'}| = |(-2, 2, -1)| = \sqrt{9} = 3$.

9. 6.22 (1). Израчунати растојање између правих $p\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ и $q\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{4}$.

Решење 1. Праве p и q нису паралелне јер им вектори правца $\vec{v}_p=(1,1,2)$ и $\vec{v}_q=(1,3,4)$ нису пропорционални. Слично као и у Задатку 7 из детерминанте $\begin{vmatrix}(-1)-0 & 0-(-1) & 1-2\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 4\end{vmatrix}=-2\neq 0$ добијамо да се праве p и q не секу. Како оне нису паралелне и не секу се оне су мимоилазне.

Растојање између две мимоилазне праве p и q (p је дата тачком $P(-1,0,1)$ и вектором правца $\vec{v}_p=(1,1,2)$, а q са $Q(0,-1,2)$ и $\vec{v}_q=(1,3,4)$) дато је обрасцем $d(p,q)=\dfrac{|(\vec{v}_p\times\vec{v}_q)\cdot\overrightarrow{PQ}|}{|\vec{v}_p\times\vec{v}_q|}$. Како је $\vec{v}_p\times\vec{v}_q=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 4\end{vmatrix}=(-2,-2,2)$ имамо да је $(\vec{v}_p\times\vec{v}_q)\cdot\overrightarrow{PQ}=(-2,-2,2)\cdot(1,-1,1)=2$ и $|\vec{v}_p\times\vec{v}_q|=2\sqrt{3}$, па је растојање $d(p,q)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. ■

Решење 2. Произвољна тачка T са праве p дата је са $x=t-1$, $y=t$, $z=2t+1$ ($t\in\mathbb{R}$), односно $T(t-1,t,2t+1)$ и слично је $S(s,3s-1,4s+2)$ произвољна тачка са праве q, па је $\overrightarrow{TS}=(s-t+1,3s-t-1,4s-2t+1)$. Растојање између правих p и q је

$$\begin{aligned} d(p,q) &= \min d(T,S)=\min|\overrightarrow{TS}|=\min\sqrt{(s-t+1)^2+(3s-t-1)^2+(4s-2t+1)^2}\\ &= \min\sqrt{26s^2-24st+4s+6t^2-4t+3}=\sqrt{\min(26s^2-24st+4s+6t^2-4t+3)}. \end{aligned}$$

Квадратни трином $26s^2+(4-24t)s+(6t^2-4t+3)$ има коефицијент $a=26>0$ ($b=4-24t$ и $c=6t^2-4t+3$) па се минимум достиже за $s=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{4-24t}{52}=\dfrac{6t-1}{13}$ и тај минимум је

$$26\left(\tfrac{6t-1}{13}\right)^2+(4-24t)\cdot\tfrac{6t-1}{13}+(6t^2-4t+3)=\tfrac{6}{13}t^2-\tfrac{28}{13}t+\tfrac{37}{13}.$$

Минимум израза $\frac{6}{13}t^2-\frac{28}{13}t+\frac{37}{13}$ се достиже за $t=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-\frac{28}{13}}{\frac{12}{13}}=\dfrac{7}{3}$ и он је једнак $\frac{6}{13}\cdot(\frac{7}{3})^2-\frac{28}{13}\cdot\frac{7}{3}+\frac{37}{13}=\frac{1}{3}$. Коначно добијамо да је $d(p,q)=\sqrt{\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. ■

Напомена 1. Дискусија у овом решењу ће ићи мало лакше ако користимо изводе за тражење минимума функције или методе за тражење екстрема функција више промењљивих (на ФОН-у се уче у Математици 2).

Напомена 2. На овај начин смо одредили и координате тачке T са p и тачке S са q које су на том минималном одстојању. За $t=\frac{7}{3}$ добијамо $T(\frac{4}{3},\frac{7}{3},\frac{17}{3})$ и $s=\frac{6t-1}{13}=1$ одређује $S(1,2,6)$.

Решење 3. Одредимо праву n која је заједничка нормала праве p и праве q. Како је $n\perp p$, $n\perp q$ то и за њихове векторе правца важи $\vec{v}_n\perp\vec{v}_p$, $\vec{v}_n\perp\vec{v}_q$. Стога можемо узети да је $\vec{v}_n=\frac{1}{2}\vec{v}_p\times\vec{v}_q$ или неки колинеаран вектор. Како је

$$\vec{v}_p\times\vec{v}_q=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 4\end{vmatrix}=(-2,-2,2)$$

узећемо $\vec{v}_n=-\frac{1}{2}\vec{v}_p\times\vec{v}_q=-\frac{1}{2}(-2,-2,2)=(1,1,-1)$.

Одредили смо вектор правца праве n, али нам је потребно да одредимо и једну тачку на тој правој да бисмо имали једначину праве n.

Одредимо раван π која је одређена правама p и n. Њен вектор нормале је $\vec{n}_\pi\perp\vec{v}_p$ и $\vec{n}_\pi\perp\vec{v}_n$, па можемо узети да је $\vec{n}_\pi=\vec{v}_p\times\vec{v}_n$ или неки колинеаран вектор. Како је

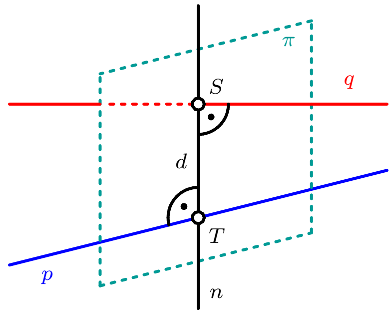
$$\vec{v}_p\times\vec{v}_n=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=(-3,3,0)$$

узећемо $\vec{n}_\pi=-\frac{1}{3}\vec{v}_p\times\vec{v}_n=-\frac{1}{3}(-3,3,0)=(1,-1,0)$.

Како раван π садржи целу праву p она садржи и њену тачку $P(-1,0,1)$, па добијамо да је једначина равни π једнака $\pi\colon 1\cdot\big(x-(-1)\big)-1\cdot(y-0)+0\cdot(z-1)=0$, односно

$$\pi\colon x-y+1=0.$$

У пресеку равни π и праве q добијамо тачку S. Та тачка задовољава и једначину равни $\pi\colon x-y+1=0$ и једначину праве q (најпогдније је да узмемо параметарски облик) $q\colon\ x=s,\ y=3s-1,\ z=4s+2$ ($s\in\mathbb{R}$). Стога имамо да је $x-y+1=s-(3s-1)+1=-2s+2=0$, одакле је $s=1$, што даје тачку $S(1,2,6)$.



Слика уз задатак 9.

Да бисмо одредили тачку T поновићемо исти поступак: одредићемо раван σ која садржи праве q и n и у пресеку равни σ са правом p добијамо тачку T.

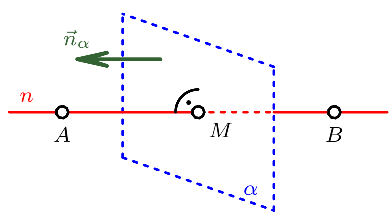
$$\vec{n}_\sigma = \vec{v}_p \times \vec{v}_n = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-7, 5, -2) \quad \text{и} \quad Q(0, -1, 2) \;\Rightarrow\; \sigma\colon\, -7(x-0) + 5\big(y-(-1)\big) - 2(z-2) = 0,$$

тј. $\sigma\colon\, -7x + 5y - 2z + 9 = 0$. Уврстимо овде параметарски задату праву p: $x = t - 1$, $y = t$, $z = 2t + 1$ и добијамо $-6t + 14 = 0$, тј. $t = \frac{7}{3}$, чиме смо одредили тачку $T(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{17}{3})$.

Тражено растојање између праве p и q је једнако растојању тачке $T(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{17}{3})$ и тачке $S(1, 2, 6)$, што је интензитет вектора $\overrightarrow{ST}$, тј. $d(p, q) = d(T, S) = |\overrightarrow{ST}| = |(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3})| = \sqrt{(\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2 + (-\frac{1}{3})^2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. ■

Напомена 3. Након што смо одредили $S(1, 2, 6)$, собзиром да смо пре нашли $\vec{v}_n = (1, 1, -1)$, могли смо да одредимо једначину заједничке нормале n на праве p и q — то је $n\colon\, \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-6}{-1}$. Даље смо тачку T могли да нађемо као пресек праве p и праве q.

10. 6.28. Одредити тачку B симетричну тачки $A(-1, 0, -1)$ у односу на раван $\alpha\colon 2x + y - z + 7 = 0$.



Слика уз задатак 10.

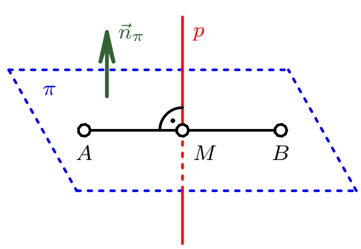
Решење. Да би одредили симетричну тачку B потребно је да прво одредимо пројекцију M тачке A на раван α. Вектор $\vec{v}_n$ нормале n раван α је $\vec{v}_n = \vec{n}_\alpha = (2, 1, -1)$ и права n садржи тачку $A(-1, 0, -1)$. Стога је права n у параметарском облику $n\colon\ x = 2t - 1,\ y = t,\ z = -t - 1$. Када то заменимо у једначину равни α добијамо $2(2t-1) + t - (-t-1) + 7 = 0$, тј. $6t + 6 = 0$, односно $t = -1$, па је $M(-3, -1, 0)$.

За координате средишта M дужи AB важе једнакости

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}, \qquad z_M = \frac{z_A + z_B}{2},$$

па одатле налазимо $x_B = 2x_M - x_A = -5$, $y_B = 2y_M - y_A = -2$, $z_B = 2z_M - z_A = 1$, тј. $B(-5, -2, 1)$. ■

11. Одредити тачку B симетричну тачки $A(-1, 0, -1)$ у односу на праву p: $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+1}{0} = \dfrac{z-4}{2}$.



Слика уз задатак 11.

Упутства. Нека раван π садржи тачку A и нормална је на праву p. Можемо узети да је њен вектор нормале $\vec{n}_\pi = \vec{v}_p = (1,0,2)$. Одатле добијамо да је $\pi\colon x+2z+3=0$. У пресеку праве p и равни π добијамо тачку $M(-3,1,0)$. На основу координата тачака A и M добијамо симетричну тачку $B(-5,2,1)$. ∎

12. 2. испит октобар 2007. Дате су тачке $A(0,2,-5)$, $B(5,1,-4)$, $C(1,3,-3)$ и $M(3,-7,9)$. Одредити једначину равни којој припадају тачке A, B и C, а затим одредити пројекцију тачке M на ту раван.

Упутства. Раван која садржи тачке A, B и C је $\pi:\ x+3y-2z=16$.
Нормала на раван π из тачке M је права $n:\ \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+7}{3}=\dfrac{z-9}{-2}\ (=t)$, па се пројекција P тачке M на раван π добија за вредност параметра $t=\frac{26}{7}$, тј. $P\left(\frac{47}{7},\frac{29}{7},\frac{11}{7}\right)$. ∎

13. 6.31 или 7.пр5.3. Одредити једначину праве која садржи тачку $A(3,-2,4)$, паралелна је равни $\alpha\colon 3x-2y-3z-7=0$ и сече праву $p\colon \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+4}{-2}=\dfrac{z-1}{2}$.

Резултат. $a\colon \dfrac{x-3}{5}=\dfrac{y+2}{-6}=\dfrac{z+4}{1}$.
Проучити сва 4 начина за решавање овог задатка који су дати у збирци! ∎

14. Одредити једначину равни која садржи тачку $A(2,-3,1)$ и паралелна је правама $p\colon \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-1}{2}$ и $q\colon \dfrac{x-7}{2}=\dfrac{y+4}{-2}=\dfrac{z-1}{2}$.

Упутства. За тражену раван α важи $\alpha \parallel p$, $\alpha \parallel q \ \Rightarrow \vec{n}_\alpha \perp \vec{v}_p$, $\vec{n}_\alpha \perp \vec{v}_q$. Стога можемо узети, нпр. да је $\vec{n}_\alpha = -\frac{1}{2}\vec{v}_p\times\vec{v}_q=(1,1,0)$. Одатле је $\alpha\colon 1\cdot(x-2)+1\cdot\big(y-(-3)\big)+0\cdot(z-1)=0$, односно $\alpha\colon x+y+1=0$. ∎

15. Одредити једначину праве која садржи тачку $A(2,-3,1)$ и сече праве $p\colon \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-1}{2}$ и $q\colon \dfrac{x-7}{2}=\dfrac{y+4}{-2}=\dfrac{z-1}{2}$.

Решење 1. Произвољну праву a кроз тачку A можемо представити као $a\colon \dfrac{x-2}{u}=\dfrac{y+3}{v}=\dfrac{z-1}{w}$ јер је $A(2,-3,1)$, а можемо узети да је непознати вектор правца $\vec{v}_a=(u,v,w)$.

У задатку 7 смо се срели са условом да се две праве секу. Кад то искористимо за праве p и a добијамо

$$\begin{vmatrix} (-1)-2 & (-2)-(-3) & 1-1 \\ 3 & -3 & 2 \\ u & v & w \end{vmatrix} = 2u+6v+6w=0.$$

Кад то искористимо за праве q и a добијамо

$$\begin{vmatrix} 7-2 & (-4)-(-3) & 1-1 \\ 2 & -2 & 2 \\ u & v & w \end{vmatrix} = -2u-10v-8w=0.$$

Добили смо хомогени систем $\begin{array}{rcrcrcl} 2u & + & 6v & + & 6w & = & 0 \\ -2u & - & 10v & - & 8w & = & 0 \end{array}$ и потребно нам је једно његово решење (јер нам треба само једна вредност за $\vec{v}_a$). Решавањем добијамо нпр. $w=-2$, $v=1$, $u=3$, тј. тражена права је $a\colon \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-1}{-2}$. ∎

Решење 2. Прво ћемо проверити да ли се непаралелне праве p и q секу (нису паралелне јер је $\vec{v}_q \neq \lambda\cdot\vec{v}_p$): $\begin{vmatrix} (-1)-7 & (-2)-(-4) & 1-1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \Rightarrow p$ и q се не секу (да смо добили да се секу тражена права a би пролазила кроз дату тачку A и кроз пресечну тачку T праве p и праве q).

Даље ћемо као у решењу 3 задатка 9 формирати раван π која садржи праве p и a, односно праву p и тачку A. Њу добијамо тако што узмемо тачку $P(-1,-2,1)$ из канонског облика праве p и добијамо да је

$$\vec{n}_\pi = \vec{v}_p\times\overrightarrow{PA} = (3,-3,2)\times(3,-1,0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (2,6,6).$$

Раван π је одређена са $\vec{n}_\pi$ и A, па је $\pi\colon 2\cdot(x-2)+6\cdot\big(y-(-3)\big)+6\cdot(z-1)=0$, односно $\pi\colon 2x+6y+6z+8=0$. У пресеку равни π и праве q добијамо тачку S:

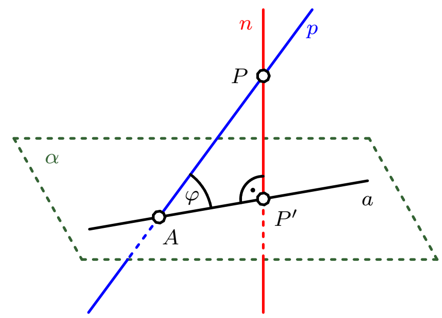
$$2\cdot(2s+7)+6(-2s-4)+6(2s+1)+8=0 \;\Rightarrow\; 4s+4=0 \;\Rightarrow\; s=-1 \;\Rightarrow\; S(5,-2,-1).$$

Тражена права a је права кроз тачке A и S, па можемо узети да је њен вектор правца $\vec{v}_a=\frac{1}{3}\overrightarrow{AS}=(3,1,-2)$ и коначно добијамо да је $a\colon \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-1}{-2}$. ■

16. Дата је раван $\alpha\colon x+y-z+1=0$ и права $p\colon \dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{1}$. Одредити

а) пресечну тачку праве p и равни α;

б) меру угла између праве p и равни α.



Слика уз задатак 16.

Решење 1. **а)** Права p у параметарском облику је $p\colon\ x=1,\ y=2t,\ z=t-1$, што кад уврстимо у једначину равни α добијамо $1+2t-(t-1)+1=0$, односно $t=-3$, па је пресечна тачка $A(1,-6,-4)$.

б) Узмимо једну тачку P са праве p (различиту од продора A) и одредимо њену пројекцију P' на раван α. Узећемо $P(1,0,-1)$ која је дата канонским обликом једначиное праве p. Права n нормална на раван α и која пролази кроз тачку P има вектор правца $\vec{v}_n=\vec{n}_\alpha=(1,1,-1)$, па је $n\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$, тј. $n\colon\ x=s+1,\ y=s,\ z=-s-1$. Када ово уврстимо у једначину равни α добијамо $s=-1$, тј. $P'(0,-1,0)$.

Сада из правоуглог троугла $\triangle AP'P$ добијамо да је тражени угао φ одређен са

$$\cos\varphi=\frac{|\overrightarrow{P'A}|}{|\overrightarrow{PA}|}=\frac{|(-1,5,4)|}{|(0,6,3)|}=\frac{\sqrt{42}}{\sqrt{45}}=\sqrt{\frac{14}{15}},$$

одакле је $\varphi=\arccos\sqrt{\frac{14}{15}}$. ■

Напомена 1. Да нам се тражила пројекција праве p на раван α, задатак би потпуно исто радили, само што би још тражену пројекцију (што је права a на горњој слици) одредили као праву кроз тачке A и P'.

Решење 2. **а)** Овај део задатка решавамо исто као малопре.

б) Угао φ између праве p и равни α (које се секу), чији су вектори правца $\vec{v}_p$ и нормале $\vec{n}_\alpha$ дат је са:

$$\sin\varphi=\frac{|\vec{v}_p\cdot\vec{n}_\alpha|}{|\vec{v}_p|\cdot|\vec{n}_\alpha|}.$$

Како је $\vec{v}_p=(0,2,1)$ и $\vec{n}_\alpha=(1,1,-1)$ добијамо да је $\sin\varphi=\dfrac{|1|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{15}}$, тј. $\varphi=\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{15}}$. ■

Напомена 2. У ова два начина је одређен потпуно исти угао, само је он другачије записан. То можемо проверити јер за сваки угао важи $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$, а како је $0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ то је и $0\leqslant\sin\varphi\leqslant 1$ и $0\leqslant\cos\varphi\leqslant 1$. Тј. из $\cos\varphi=\sqrt{\frac{14}{15}}\;\Rightarrow\;\sin\varphi=\sqrt{1-\cos^2\varphi}=\sqrt{1-\frac{14}{15}}=\frac{1}{\sqrt{15}}$.