X двочас вежби — Владимир Балтић

10. Граничне вредности функција

Овде је дат кратак преглед X двочаса вежби. Потребно је да обновите одговарајућу теоријску материју која је обрађена на предавањима и у уџбенику.

Како се највећим делом на вежбама раде задаци из збирке, након броја задатка плавом бојом је означен број задатка у збирци "МАТЕМАТИКА 1" професора Р. Лазовића, Д. Ђорића и Ђ. Јованова у форми p.z, где је p број поглавља, а z број задатка у том поглављу. Ови задаци са преосталима из збирке (из поглавља "10. Граничне вредности функција", као и оним из поглавља "15. Други колоквијум" који су везани за ову материју) чине целину довољну за припрему ове области.

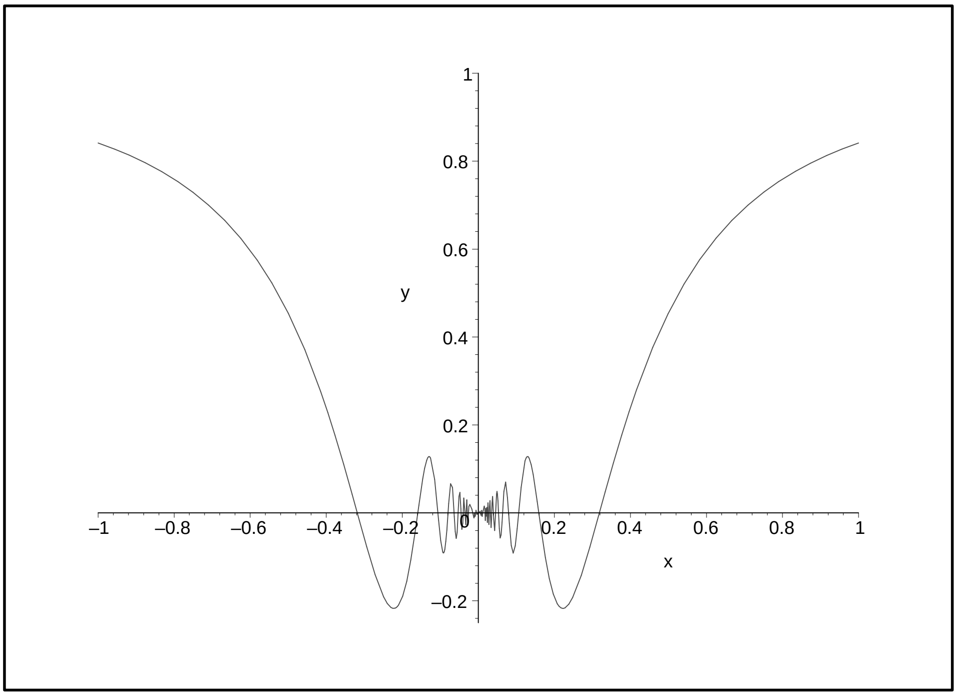
1. 10.2. Користећи дефиницију граничне вредности функције доказати да је $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$.

Решење. Како за синус важи $-1 \leqslant \sin t \leqslant 1$ имамо да је за ε из дефиниције $\delta = \varepsilon$ и тада имамо да за

$$0 < |x| < \varepsilon \;\Rightarrow\; |x\sin\frac{1}{x}| \leqslant |x|\cdot|\sin\frac{1}{x}| \leqslant |x|\cdot 1 = |x| \leqslant \varepsilon = \delta.$$

Тиме смо показали да је $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$. ■

Напомена. На следећој слици је приказан график функције $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$.



Израчунати дате граничне вредности:

2. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3+3x^2+2x}{x+1}$.

Решење. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3+3x^2+2x}{x+1} = \dfrac{2^3+3\cdot 2^2+2\cdot 2}{2+1} = \dfrac{24}{3} = 8.$ ■

3. 10.15. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

Решење. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+1}{2x+1} = \dfrac{2}{3}$. ■

4. 10.20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

Решење. Потребно је да се ослободимо корена. У ту сврху ћемо користити формулу за разлику квадрата $(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}\cdot\dfrac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x})^2-1^2}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)}=$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\dfrac{1}{2}$. ■

5. 10.33. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x^3+x+1}{3x^3+x^2+1}$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x^3+x+1}{3x^3+x^2+1}$.

Решење. Прво ћемо урадити један од ова два лимеса, па ћемо онда да приметимо и да други иде потпуно исто, тако да ћемо онда то што смо радили преправити да је за $\pm\infty$, тј. имаћемо следећи запис:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3x^3+x+1}{3x^3+x^2+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3x^3+x+1}{3x^3+x^2+1}\cdot\frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}=\frac{-3+0+0}{3+0+0}=-1.$$

■

Напомена. На основу ових лимеса имамо закључак да функција $f(x)=\dfrac{-3x^3+x+1}{3x^3+x^2+1}$ има обострану хоризонталну асимптоту $y=-1$.

6. 10.34. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

Решење. Подсетимо се да је $\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$. Стога имамо да када $x\to+\infty$ (тад је $x>0$) имамо да је $\frac{1}{x}=\frac{1}{|x|}=\frac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{\frac{1}{x^2}}$, док кад $x\to-\infty$ (тад је $x<0$) имамо $\frac{1}{x}=\frac{1}{-|x|}=\frac{1}{-\sqrt{x}}=-\sqrt{\frac{1}{x^2}}$.
Због овога тражене лимесе рачунамо на следеће начине:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\cdot\frac{\frac{1}{x}=\sqrt{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\cdot\frac{\frac{1}{x}=-\sqrt{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1}=-1.$$ ■

Напомена. На основу ових лимеса имамо закључак да функција $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ има десну хоризонталну асимптоту $y=1$, док је права $y=-1$ лева хоризонтална асимптота.

7. 10.31. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{3/2}(\sqrt{x^3+2}-\sqrt{x^3-2})$.

Упутства. Користити идеје из претходна 3 задатка. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{3/2}(\sqrt{x^3+2}-\sqrt{x^3-2})=2.$ ■

8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+1)^{2/3}-(x-1)^{2/3}\right]$.

Упутства. Трећег корена се ослободити помоћу формуле за разлику кубова: $(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+1)^{2/3}-(x-1)^{2/3}\right]=0.$ ■

9. 10.39. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$, $a,b\in\mathbb{R},\ b\neq 0.$

Решење. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{ax}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{\sin bx}{bx}}\cdot\dfrac{ax}{bx}=1\cdot\dfrac{1}{1}\cdot\dfrac{a}{b}=\dfrac{a}{b}$. ■

10. 10.42. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Решење 1. $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}\cdot\dfrac{1+\cos x}{1+\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}=$
$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x}{x}\right)^2\cdot\dfrac{1}{1+\cos x}=1^2\cdot\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$. ■

Решење 2. Можемо користити еквивалентне величине. Како је $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$ кад $x\to 0$ то је тражени лимес $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\dfrac{1}{2}$. ■

11. 10.57. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-4}\right)^{(x+1)/3}$.

Решење. Ово је лимес облика 1^∞. Један начин да се изборимо са таквим лимесом је да сређивањем израза дођемо до неког који личи на таблични лимес $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$ (то ћемо илустровати у овом задатку), а други начин је да одредимо логаритам оваквог лимеса (што ћемо илустровати у наредном задатку).

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-4}\right)^{(x+1)/3}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-4+6}{3x-4}\right)^{(x+1)/3}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3x-4}{6}}\right)^{\frac{3x-4}{6}\cdot\frac{6}{3x-4}\cdot\frac{x+1}{3}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{3x-4}{6}}\right)^{\frac{3x-4}{6}}\right)^{\frac{2x+2}{3x-4}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{3x-4}{6}}\right)^{\frac{3x-4}{6}}\right)^{\frac{2x+2}{3x-4}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{3x-4}{6}}\right)^{\frac{3x-4}{6}}\right)^{\frac{2+\frac{2}{x}}{3-\frac{4}{x}}}=e^{\frac{2}{3}}.$$ ■

12. 10.70. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$.

Решење. Означимо дату граничну вредност са $L=\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$. Тада имамо да је

$$\ln L=\ln\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}=\lim_{x\to 0}\ln(\cos x)^{1/x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}.$$

Како нам се у табличним лимесима не јавља косинус него синус то ћемо косинус изразити преко синуса дупло мањег угла: $\cos x=\cos(2\cdot\frac{x}{2})=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=(1-\sin^2\frac{x}{2})-\sin^2\frac{x}{2}=1-2\sin^2\frac{x}{2}$. Убацимо ово у претходни лимес:

$$\ln L=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-2\sin^2\frac{x}{2})}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-2\sin^2\frac{x}{2})}{-2\sin^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot\frac{x^2}{4}}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-2\sin^2\frac{x}{2})}{-2\sin^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{-1}{2}\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=1\cdot\frac{-1}{2}\cdot 1^2=-\frac{1}{2}.$$

Да би завршили задатак треба да антилогаритмујемо овај резултат, тј. $\ln L=-\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ L=e^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$. ■

Напомена. Знатно брже би стигли до резултата уколико би користили еквивалентне величине, што ћемо видети у наредним задацима.

13. 10.111. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}$.

Решење. Користићемо еквивалентне величине кад $x\to 0$: како је $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$ имамо да је $\cos x\sim 1-\frac{1}{2}x^2$, па је $\ln(\cos x)\sim\ln(1-\frac{1}{2}x^2)\sim-\frac{1}{2}x^2$. За именилац разломка имамо да је $\sqrt[4]{1+x^2}-1=(1+x^2)^{1/4}-1\sim\frac{1}{4}\cdot x^2$. Стога је дати лимес $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{4}x^2}=-2.$ ■

14. 10.115. $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x+2\,\mathrm{arctg}\,2x+3x^2}{\ln(1+2x+\sin x)+xe^x}$.

Решење. Када $x\to 0$ имамо да је $I=\dfrac{\sin 3x+2\,\mathrm{arctg}\,2x+3x^2}{\ln(1+2x+\sin x)+xe^x}\sim\dfrac{3x+2\cdot 2x+3x^2}{2x+\sin x+x(1+x)}\sim\dfrac{3x+4x+3x^2}{2x+x+x+x^2}=\dfrac{7x+3x^2}{4x+x^2}$, па је $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x+3x^2}{4x+x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x+3x^2}{4x+x^2}\cdot\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7+3x}{4+x}=\dfrac{7+0}{4+0}=\dfrac{7}{4}$. ■

15. 10.119. $L = \lim_{x \to 0} \left(\dfrac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x}$.

Упутства. Одредити прво $\ln L$ користећи еквивалентне величине кад $x \to 0$. Када се вратимо на L добијамо $L = \sqrt{ab}$. ■

16. $\lim_{x \to 3^-} \dfrac{x^2 + x - 5}{3 - x}$ и $\lim_{x \to 3^+} \dfrac{x^2 + x - 5}{3 - x}$.

Решење. $\lim_{x \to 3^-} \dfrac{x^2 + x - 5}{3 - x} = \left[\dfrac{3^2 + 3 - 5}{3 - 3^-} = \dfrac{+7}{0^+} \right] = +\infty$. $\lim_{x \to 3^+} \dfrac{x^2 + x - 5}{3 - x} = \left[\dfrac{3^2 + 3 - 5}{3 - 3^+} = \dfrac{+7}{0^-} \right] = -\infty$. ■

Напомена. На основу ових лимеса следи да функција $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 5}{3 - x}$ има вертикалну асимптоту $x = 3$ (са обе стране).