II двочас вежби — Владимир Балтић

2. Детерминанте

Овде је дат кратак преглед II двочаса вежби. Потребно је да обновите одговарајућу теоријску материју која је обрађена на предавањима и у уџбенику.

Како се највећим делом на вежбама раде задаци из збирке, након броја задатка плавом бојом је означен број задатка у збирци "МАТЕМАТИКА 1" професора Р. Лазовића, Д. Ђорића и Ђ. Јованова у форми p.z, где је p број поглавља, а z број задатка у том поглављу. Ови задаци са преосталима из збирке (из поглавља "2. Детерминанте" и делом из "3. Матрице", као и оним из поглавља "7. Први колоквијум" који су везани за ову материју) чине целину довољну за припрему ових области.

0. Исписати по дефиницији детерминанту трећег реда.

Упутства. Нека је $A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. У скупу $\mathbb{S}_3$ имамо 6 пермутација:

$\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, sgn $\epsilon = +1$; $c_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3)$, sgn $c_1 = +1$; $c_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 2)$, sgn $c_2 = +1$;

$\tau_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, sgn $\tau_{12} = -1$; $\tau_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, sgn $\tau_{13} = -1$; $\tau_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, sgn $\tau_{23} = -1$.

(објаснити зашто је овакав знак сваке од ових 6 пермутација!). Коначно добијамо да је детерминанта:
$|\mathrm{A}_3| = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_2} (\mathrm{sgn}\ \sigma) a_{1\ \sigma(1)} \cdot a_{2\ \sigma(2)} \cdot a_{3\ \sigma(3)} = (\mathrm{sgn}\ \epsilon) a_{1\ \epsilon(1)} \cdot a_{2\ \epsilon(2)} \cdot a_{3\ \epsilon(3)} + (\mathrm{sgn}\ c_1) a_{1\ c_1(1)} \cdot a_{2\ c_1(2)} \cdot a_{3\ c_1(3)} + (\mathrm{sgn}\ c_2) a_{1\ c_2(1)} \cdot a_{2\ c_2(2)} \cdot a_{3\ c_2(3)} + (\mathrm{sgn}\ \tau_{13}) a_{1\ \tau_{13}(1)} \cdot a_{2\ \tau_{13}(2)} \cdot a_{3\ \tau_{13}(3)} + (\mathrm{sgn}\ \tau_{23}) a_{1\ \tau_{23}(1)} \cdot a_{2\ \tau_{23}(2)} \cdot a_{3\ \tau_{23}(3)} + (\mathrm{sgn}\ \tau_{12}) a_{1\ \tau_{12}(1)} \cdot a_{2\ \tau_{12}(2)} \cdot a_{3\ \tau_{12}(3)}$,
односно $|\mathrm{A}_3| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$. ■

1. Израчунати детерминанту $\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a^2 \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix}$, при чему је $a^3 = 1$ и $a \neq 1$.

Решење 1. Применом Сарусовог правила добијамо да је $D = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot a^2 \cdot a^2 + a \cdot 1 \cdot a - a \cdot 1 \cdot a^2 - 1 \cdot a^2 \cdot a - 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 + a^4 + a^2 - a^3 - a^3 - 1 = a^4 - 2a^3 + a^2 = a^3 \cdot a - 2 + a^2 = 1 + a + a^2 - 3 = (1 + a + a^2) \cdot \frac{1-a}{1-a} - 3 = \frac{1-a^3}{1-a} - 3 = 0 - 3 = -3$. ■

Решење 2. Користићемо особине детерминанти. Ако од друге врсте одузмемо прву добијамо матрицу која има исту детерминанту. Затим ту извршимо Лапласов развој по елементима друге врсте (јер она има највише елемента једнаких 0):

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & a^2 - a \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix} = -0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & a \\ a^2 & 1 \end{vmatrix} - (a^2 - a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a^2 & a \end{vmatrix} = -(a^2 - a) \cdot (a - a^2) = (a^2 - a)^2 = a^4 - 2a^3 + a^2 = \ldots = -3.$$

■

2. 2.6 (1). Користећи Лапласову теорему израчунати $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

Решење. Најпогодније је да вршимо Лапласов развој по II колони (јер она има 2 елемента 0):

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} + 0 - 0 + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(20 + 8 + 0 - 16 - 0 - 10) - 0 = -2.$$

Детерминанта $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ јер су јој прва и трећа колона једнаке. ■

3. 2.9 (2). Користећи особине детерминаната израчунати $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

Решење. Прво ћемо прву врсту одузети од свих осталих, затим ћемо првој колони додати све остале и на крају ћемо од III врсте одузети двоструку II и IV ћемо додати II.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \text{II}-\text{I} \\ \text{III}-\text{I} \\ \text{IV}-\text{I} \end{matrix} = \underset{\text{I+II+III+IV}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{III}-2\cdot\text{II} \\ \text{IV}+\text{II} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}.$$

Добили смо детерминанту троугаоне матрице, па је: $D = 10 \cdot 1 \cdot (-4) \cdot (-4) = 160$. ■

4. 2.10 (1). Израчунати $D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & c & d \\ -a & -b & c & d \\ -a & -b & -c & d \end{vmatrix}$.

Упутства. Користећи особине детерминанти добити детерминанту троугаоне матрице.
Резултат је $D = 8abcd$. ■

3. Матрице

5. Израчунати $AB + 2C$ ако је $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & -3 \\ 5 & -2 & 8 \end{pmatrix}$.

Резултати. $AB = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 2 & 3 & 4 \\ 8 & -7 & 7 \end{pmatrix}$ и $AB + 2C = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 16 \\ 2 & 15 & -2 \\ 18 & -11 & 23 \end{pmatrix}$. ■

6. Одредити инверзну матрицу матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Решење 1. Прво ћемо израчунати детерминанту дате матрице:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 2 - (-1) - 0 - 2 = 2.$$

Како је $|A| = 2 \neq 0$ то за матрицу A постоји инверзна матрица A^{-1}.

Одредимо адјунговану матрицу $\operatorname{adj} A$ и инверзну матрицу A^{-1}. Кофактори су

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \qquad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \qquad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Њих можемо искористити и за одређивање $\det(A)$ (Лапласов развој по трећој колони је најједноставнији јер имамо један члан 0): $\det(A) = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} = (-1) \cdot (-3) + 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 2$. Стога је

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Коначно добијамо да је инверзна матрица $A^{-1} = \dfrac{\operatorname{adj} A}{\det(A)} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$. ■

Решење 2. Инверзна матрица A^{-1} је истог реда као и A. Ставимо да је инверзна матрица $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & a & m \\ y & b & n \\ z & c & p \end{bmatrix}$, где су $x, y, z, a, b, c, m, n, p$ непознати бројеви које треба одредити. Треба да важи $A \cdot A^{-1} = I$, односно

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & a & m \\ y & b & n \\ z & c & p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot x + 1\cdot y - 1\cdot z & 1\cdot a + 1\cdot b - 1\cdot c & 1\cdot m + 1\cdot n - 1\cdot p \\ 2\cdot x + 1\cdot y + 0\cdot z & 2\cdot a + 1\cdot b + 0\cdot c & 2\cdot m + 1\cdot n + 0\cdot p \\ 1\cdot x - 1\cdot y + 1\cdot z & 1\cdot a - 1\cdot b + 1\cdot c & 1\cdot m - 1\cdot n + 1\cdot p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Из матричне једнакости $\begin{bmatrix} x+y-z & a+b-c & m+n-p \\ 2x+y & 2a+b & 2m+n \\ x-y+z & a-b+c & m-n+p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ добијамо 3 система са по 3 непознате:

$$\begin{array}{rcl} x + y - z &=& 1 \\ 2x + y &=& 0 \\ x - y + z &=& 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} a + b - c &=& 0 \\ 2a + b &=& 1 \\ a - b + c &=& 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} m + n - p &=& 0 \\ 2m + n &=& 0 \\ m - n + p &=& 1 \end{array}.$$

Решавањем ових система добијамо:

$$x = \frac{1}{2}, \quad y = -1, \quad z = -\frac{3}{2}, \quad a = 0, \quad b = 1, \quad c = 1, \quad m = \frac{1}{2}, \quad n = -1, \quad p = -\frac{1}{2},$$

па је тражена инверзна матрица $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$. ■

Напомена. Приметимо да су сва 3 система истог облика (разликују им се само колоне слободних чланова). Овакав приступ, заједно са решавањем система преко Крамерових формула (које ће бити рађено касније) даје нам доказ следећег тврђења:

> **Теорема 1.** Матрица A има инверзну матрицу ако и само ако је $\det(A) \neq 0$. У случају када постоји инверзна матрица је дата формулом $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj} A$.

Решење 3. Елементарним трансформацијама врста ћемо извршити прелаз од матрице A и јединичне матрице до јединичне матрице и инверзне матрице:

$$A \;\;|\;\; I \qquad \rightsquigarrow \qquad I \;\;|\;\; A^{-1}.$$

Са стране су назначене елементарне трансформације које вршимо на врсте (и са леве и са десне стране црте).

$$\left.\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\;\begin{array}{l} \\ \text{II}-2\cdot\text{I} \\ \text{III}-\text{I} \end{array}\right. \rightsquigarrow \left.\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\;\begin{array}{l} \\ /\cdot(-1) \\ \\ \end{array}\right. \rightsquigarrow \left.\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\;\begin{array}{l} \\ \\ \text{III}+2\cdot\text{I} \end{array}\right. \rightsquigarrow$$

$$\left.\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -2 & 1 \end{array}\;\begin{array}{l} \\ \text{II}-\text{III} \\ /:(-2) \end{array}\right. \rightsquigarrow \left.\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\;\begin{array}{l} \text{I}-\text{II}+\text{III} \\ \\ \\ \end{array}\right. \rightsquigarrow \begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}.$$

Тако смо добили инверзну матрицу: $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$. ■

Напомена. Када одредимо инверзну матрицу пожељно је да проверимо да нисмо направили неку грешку у рачуну. Проверу вршимо тако што извршимо матрично множење матрице и њене инверзне матрице и треба да добијемо јединичну матрицу, тј. $A \cdot A^{-1} = I$.

7. Решити матричну једначину $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot X = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{Vmatrix}$.

Решење. Ову матричну једначину можемо написати у облику $A \cdot X = B$. Ако обе стране помножимо са A^{-1} са <u>ЛЕВЕ СТРАНЕ</u> добијамо $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$, тј. $I \cdot X = A^{-1} \cdot B$, тј. $X = A^{-1} \cdot B$.

Искористимо резултат претходног задатка и након множења матрица добијамо $X = \begin{Vmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 4 \\ 2 & 6 & -6 \\ 2 & \frac{11}{2} & -5 \end{Vmatrix}$. ■