

Алгебарске структуре

Овде је дат кратак преглед I двочаса вежби. Потребно је да обновите одговарајућу теоријску материју која је обрађена на предавањима и у уџбенику.

Како се највећим делом на вежбама раде задаци из збирке, након броја задатка плавом бојом је означен број задатка у збирци "МАТЕМАТИКА 1" професора Р. Лазовића, Д. Борића и Ђ. Јованова у форми $p.z$, где је p број поглавља, а z број задатка у том поглављу. Ови задаци са преосталима из збирке (из поглавља "1. Алгебарске структуре", као и оним из поглавља "7. Први колоквијум" који су везани за ову материју) чине целину довољну за припрему ове области.

1. 1.6 (3),(4), тј. 1.2 (3),(4). Испитати да ли је $(A, *)$ група ако је:

$$(1) A = \{x + y\sqrt{2} \mid x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}\}, \quad (2) A = \{x + y\sqrt{2} \mid x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}, x^2 + y^2 \neq 0\}$$

и ако је $a * b = a \cdot b$.

Решење. (1) $A = \{x + y\sqrt{2} \mid x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}\}$.

Проверимо прво затвореност. Нека је $a = x + y\sqrt{2}$ и $b = v + w\sqrt{2}$. Тада је

$$a * b = (x + y\sqrt{2}) \cdot (v + w\sqrt{2}) = xv + xw\sqrt{2} + yv\sqrt{2} + 2yw = (xv + 2yw) + (xw + yv)\sqrt{2},$$

па како из $x, y, v, w \in \mathbb{Q}$ следи и $xv + 2yw \in \mathbb{Q}$ и $xw + yv \in \mathbb{Q}$, добијамо да је и $a * b \in A$, тј. да је операција $*$ затворена у скупу A .

На основу чињенице да је множење реалних бројева асоцијативно следи и да је операција $*$ асоцијативна, тј. важи

$$a * (b * c) = a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = (a * b) * c.$$

Неутралан елемент је $e = 1$ јер важи $1 * a = 1 \cdot a = a$ и $a * 1 = a \cdot 1 = a$. Овај елемент припада скупу A јер га можемо записати као $e = 1 + 0 \cdot \sqrt{2}$, а $1, 0 \in \mathbb{Q}$.

Потражимо инверзан елемент за $a = x + y\sqrt{2}$. Нека је инверзан елемент $a' = z + t\sqrt{2}$. Тада треба да важи $a * a' = a' * a = e$ (где је e неутралан елемент који смо добили у претходној тачки, тј. $e = 1$), па добијамо једначину

$$(x + y\sqrt{2}) \cdot (z + t\sqrt{2}) = (z + t\sqrt{2}) \cdot (x + y\sqrt{2}) = 1.$$

Одавде за $(x, y) = (0, 0)$, тј. за $a = 0$ добијамо $0 \cdot (z + t\sqrt{2}) = 1$, што је немогуће, па елемент $a = 0$ нема инверзан елемент.

На основу чињенице да је множење реалних бројева комутативно следи и да је операција $*$ комутативна, тј. важи

$$a * b = a \cdot b = b \cdot a = b * a.$$

Због свега овога добијамо да структура $(A, *)$ није група (не важи да сваки елемент из A има инверзан елемент). Та структура је комутативан моноид.

$$(2) A = \{x + y\sqrt{2} \mid x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}, x^2 + y^2 \neq 0\}.$$

Аналогно као у делу под (1) добијамо да је операција $*$ на скупу A затворена (треба проверити и да је $a * b \neq 0$), асоцијативна, комутативна и има неутралан елемент $e = 1$.

Код тражења инверзног елемента опет добијамо једначину

$$(x + y\sqrt{2}) \cdot (z + t\sqrt{2}) = (z + t\sqrt{2}) \cdot (x + y\sqrt{2}) = 1.$$

Одавде за $(x, y) \neq (0, 0)$, што је еквивалентно са $x^2 + y^2 \neq 0$, добијамо да је

$$z + t\sqrt{2} = \frac{1}{x + y\sqrt{2}} = \frac{1}{x + y\sqrt{2}} \cdot \frac{x - y\sqrt{2}}{x - y\sqrt{2}} = \frac{x - y\sqrt{2}}{x^2 - 2y^2} = \frac{x}{x^2 - 2y^2} + \frac{-y}{x^2 - 2y^2}\sqrt{2}.$$

Из чињенице да су $x, y \in \mathbb{Q}$ следи да је $x^2 - 2y^2 \neq 0$ (из $x^2 - 2y^2 = 0$ би следило да је број $\frac{x}{y} = \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ што није тачно), па су и $\frac{x}{x^2 - 2y^2}, \frac{-y}{x^2 - 2y^2} \in \mathbb{Q}$, док из $(x, y) \neq (0, 0)$ следи $(\frac{x}{x^2 - 2y^2}, \frac{-y}{x^2 - 2y^2}) \neq (0, 0)$. Тиме смо показали и да је инверзан елемент $a' \in A$.

Стога је у овом случају структура $(A, *)$ група, а како је операција $*$ и комутативна то је Абелова група. ■

2. 1.6 (1), тј. 1.2 (1). Испитати да ли је $(A, *)$ група ако је $A = \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ и $a * b = a + b + a \cdot b$.

Упутства. Када се проверава затвореност потребно је показати и да је $a * b \neq -1$, тј. да је $a * b \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$.
Асоцијативност је последица асоцијативности, комутативности и дистрибутивности операција \cdot и $+$ у \mathbb{R} .
Неутралан елемент је $e = 0 \in A$.
Инверзан елемент је $x' = \frac{-x}{1+x}$ (треба показати да је $x' \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$).
Комутативност је последица комутативности операција $+$ и \cdot у \mathbb{R} .
Структура $(A, *)$ је Абелова група. ■

3. 1.8 (2). Испитати да ли је $(A, *)$ група ако је $A = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}, a \neq 0\}$ и $(a, b) * (c, d) = (ac, bc + c + d)$.

Упутства. Затвореност: $(a, b), (c, d) \in A \Rightarrow a, c \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ и $b, d \in \mathbb{Q} \Rightarrow a \cdot c \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ и $bc + c + d \in \mathbb{Q} \Rightarrow (a, b) * (c, d) = (ac, bc + c + d) \in A$.
Асоцијативност је последица асоцијативности, комутативности и дистрибутивности операција \cdot и $+$ у \mathbb{R} .
Неутралан елемент је $e = (1, -1) \in A$.
За елемент $x = (a, b)$ инверзан елемент је $x' = (\frac{1}{a}, \frac{-1-a-b}{a}) \in A$.

Ова структура је група, али није Абелова група јер операција $*$ није комутативна у скупу A .
На пример имамо да је $(1, 0) * (2, 1) = (2, 3) \neq (2, 2) = (2, 1) * (1, 0)$. ■

4. 1.11. Нека је $A = \{f_{a,b}(x) : f_{a,b}(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ и нека је \circ операција на скупу A дефинисана као композиција пресликавања. Доказати да је (A, \circ) група и испитати да ли је Абелова.

Упутства. Композиција функција $f_{a,b} \circ f_{c,d}$ је дефинисана као $f_{a,b}(x) \circ f_{c,d}(x) = f_{c,d}(f_{a,b}(x))$.
За затвореност имамо да важи

$$f_{a,b}(x) \circ f_{c,d}(x) = f_{c,d}(f_{a,b}(x)) = f_{c,d}(ax + b) = c(ax + b) + d = acx + bc + d = f_{ac, bc+d}(x).$$

Како су $a, c \neq 0$ то је и $ac \neq 0$, па је $f_{ac, bc+d}(x) = f_{ac, bc+d}(x) \in A$.

Асоцијативност је последица асоцијативности, комутативности и дистрибутивности операција \cdot и $+$ у \mathbb{R} :

$$f_{a,b}(x) \circ (f_{c,d}(x) \circ f_{g,h}(x)) = f_{acg, bcg+dg+h}(x) = (f_{a,b}(x) \circ f_{c,d}(x)) \circ f_{g,h}(x).$$

Идентичко пресликавање $f_{1,0}(x) = x$ је неутралан елемент за операцију композиције \circ .

Инверзан елемент за линеарну функцију $f_{a,b}(x) = ax + b$ је линеарна функција $f_{\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$.

Структура (A, \circ) је група.

Ова група није Абелова јер у скупу A операција композиције \circ није комутативна јер на пример имамо да је $f_{1,2}(x) \circ f_{2,1}(x) = f_{2,5}(x) \neq f_{2,3} = f_{2,1}(x) \circ f_{1,2}(x)$. ■

5. 1.28. Доказати да је $(\{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}, +, \cdot)$ поље.

Упутства. Означимо са $A = \{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$.

Покажимо прво да је $(A, +)$ Абелова група.

Операција сабирања $+$ је затворена у скупу A јер је $(x + y\sqrt{2}) + (v + w\sqrt{2}) = (x + v) + (y + w)\sqrt{2}$.

На основу чињенице да је операција $+$ у \mathbb{R} асоцијативна добијамо да је и она асоцијативна и у скупу $A \subset \mathbb{R}$.

Неутралан елемент за операцију $+$ је $e = 0 = 0 + 0 \cdot \sqrt{2} \in A$.

Инверзан елемент елемента $a = x + y\sqrt{2}$ је $a' = -a = (-x) + (-y)\sqrt{2} \in A$.

На основу чињенице да је операција $+$ у \mathbb{R} комутативна добијамо да је и она комутативна и у скупу $A \subset \mathbb{R}$.

На основу свега овога следи да је структура $(A, +)$ Абелова група.

У 1. задатку смо показали да је структура $(A \setminus \{0\}, \cdot)$ Абелова група.

Како је операција \cdot дистрибутивна у односу на операцију $+$ у скупу \mathbb{R} , то је она дистрибутивна и у његовом подскупу A .

На основу свега овога добијамо да је структура $(A, +, \cdot)$ поље. ■