VIII двочас вежби — Владимир Балтић

8. Низови

Овде је дат кратак преглед VIII двочаса вежби. Потребно је да обновите одговарајућу теоријску материју која је обрађена на предавањима и у уџбенику.

Како се највећим делом на вежбама раде задаци из збирке, након броја задатка плавом бојом је означен број задатка у збирци "МАТЕМАТИКА 1" професора Р. Лазовића, Д. Ђорића и Ђ. Јованова у форми p.z, где је p број поглавља, a z број задатка у том поглављу. Ови задаци са преосталима из збирке (из поглавља "8. Низови", као и оним из поглавља "15. Други колоквијум" који су везани за ову материју) чине целину довољну за припрему ове области.

1. 8.1. Користећи дефиницију граничне вредност низа, доказати да је $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+2}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$.

Решење 1. Означимо са $a_n = \frac{n+2}{2n+1}$.

Потребно је да нађемо $n_0(\varepsilon)$ у дефиницији граничне вредности низа:

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant n_0) \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Одредимо колико је $a_n - a = \frac{n+2}{2n+1} - \frac{1}{2} = \frac{(2n+4)-(2n+1)}{4n+2} = \frac{3}{4n+2}$. Из услова $|a_n - a| < \varepsilon$ добијамо $\frac{3}{4n+2} < \varepsilon$, одакле налазимо да је $\frac{3}{\varepsilon} < 4n+2$, тј. $\frac{3}{\varepsilon} - 2 < 4n$ и коначно $\frac{3}{4\varepsilon} - \frac{1}{2} < n$. Како је $n \geqslant n_0$ можемо узети да је $n_0 = \left\lceil \frac{3}{4\varepsilon} - \frac{1}{2} \right\rceil$.

Тиме смо показали да за сваки позитиван број ε постоји природан број $n_0 = \left\lceil \frac{3}{4\varepsilon} - \frac{1}{2} \right\rceil$ (који зависи од ε) такав да за свако $n \geqslant n_0$ важи $|a_n - \frac{1}{2}| < \varepsilon$, па смо по дефиницији показали да је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$. ∎

Решење 2. У овом начину ћемо илустровати како ћемо углавном рачунати граничне вредности низова.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{2n+1} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n} + \frac{2}{n}}{\frac{2n}{n} + \frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{2}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}. \quad ∎$$

2. 8.9. Израчунати граничну вредност низа (a_n) датог формулом општег члана $a_n = \left(\dfrac{2n+1}{3n-5}\right)^3$.

Решење. $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-5}\right)^3 = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-5}\right)^3 \cdot \left(\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^3 = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2+\frac{1}{n}}{3-\frac{5}{n}}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}. \quad ∎$$

3. 8.11. Израчунати граничну вредност низа (a_n) датог формулом општег члана $a_n = \dfrac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$.

Решење. У овом задатку ћемо користити следећи лимес:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & -1 < q < 1 \\ 1 & q = 1 \\ +\infty & q > 1 \\ \text{не постоји} & q \leqslant -1 \end{cases}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} \cdot \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{3^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{-2}{3}\right)^n + \frac{1}{3}\cdot 1^n}{\left(\frac{-2}{3}\right)^{n+1} + 1^{n+1}} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot 1}{0+1} = \frac{1}{3}. \quad ∎$$

4. 8.15. Израчунати граничну вредност низа (a_n) датог формулом општег члана $a_n = \sqrt{n^2+n} - n$.

Решење. $$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - n \cdot \frac{\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}.$$

Сада ћемо и горњу и доњу страну разломка помножити са $\frac{1}{n}$, при чему ћемо кад множимо са кореном узимати да је $\frac{1}{n} = \sqrt{\frac{1}{n^2}}$ (ово важи јер $n\to\infty$, тј. јер је $n > 0$, па је тада $\sqrt{n^2} = |n| = n$):

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{\sqrt{1}+1}=\frac{1}{2}\,.$$ ■

5. 8.17. Израчунати граничну вредност низа (a_n) датог са $a_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$.

Решење. $L=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2-1}{1\cdot 2}+\frac{3-2}{2\cdot 3}+\frac{4-3}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{(n+1)-n}{n\cdot(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}1-\frac{1}{n+1}=1.$ ■

6. 8.19. Израчунати граничну вредност низа (a_n) датог формулом општег члана $a_n=\frac{1+2+\ldots+n}{n^2}$.

Решење. Сума аритметичке прогресије је дата формулом

$$1+2+\ldots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}\,.$$

Убацимо у дату граничну вредност и добијамо $L=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n\cdot(n+1)}{2}}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}.$ ■

7. Користећи теорему о конвергенцији монотоног и ограниченог низа доказати конвергенцију низа (a_n) ако је $a_n=\frac{n^2+1}{3^n}$.

Решење. Одредимо првих неколико чланова низа: $a_1=\frac{2}{3}$, $a_2=\frac{5}{9}$, $a_3=\frac{10}{29}$, $a_4=\frac{17}{81}$, ...
Примећујемо да је овај низ растући, али то морамо и строго математички да покажемо.
<u>Монотоност</u>:

$$a_{n+1}=\frac{(n+1)^2+1}{3^{n+1}}=\frac{n^2+2n+2}{3\cdot 3^n}\overset{\text{за } n\geqslant 2}{\leqslant}\frac{\frac{1}{3}(n^2+n^2+n^2)}{3^n}=\frac{n^2}{3^n}<\frac{n^2+1}{3^n}=a_n.$$

Овим смо показали да је низ опадајући.
<u>Ограниченост</u>: Како је низ опадајући то важи да је $\frac{2}{3}=a_1>a_2>\ldots>a_n$.
Са друге стране имамо $n^2\geqslant 0\Rightarrow n^2+1>0$, што са $3^n>0$ даје $a_n=\frac{n^2+1}{3^n}>0$.
Значи, укупно имамо да је $0\leqslant a_n\leqslant\frac{2}{3}$, те је низ ограничен.
На основу теореме о конвергенцији монотоног и ограниченог низа добијамо да низ је низ a_n који је монотон (монотоно опадајући) и ограничен и конвергентан. ■

8. 15.пр2.1. Испитати конвергенцију низа (a_n) ако је $a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n}$.

Упутства. Показати да је низ монотоно опадајући посматрањем израза $a_{n+1}-a_n$.
Како су сви сабирци позитивни то је и $a_n>0$. За ограничење са друге стране користи се $\frac{1}{n+k}<\frac{1}{n}$, па је $a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n}<\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}}_{2n}=2n\cdot\frac{1}{n}=2.$

Како је низ монотон и ограничен добијамо да је он и конвергентан. ■

9. 8.11. Користећи теорему о конвергенцији монотоног и ограниченог низа доказати конвергенцију низа (a_n) ако је $a_n=\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3n+1)\cdot(3n+4)}$.

Упутства. Низ је монотоно растући. За ограниченост искористити да је

$$\frac{1}{(3k+1)\cdot(3k+4)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot 3}{(3k+1)\cdot(3k+4)}<\frac{\frac{1}{3}}{3k+1}-\frac{\frac{1}{3}}{3k+4}.$$

Монотон и ограничен низ конвергира. ■

10. 8.28 (2). Доказати конвергенцију низа (a_n) и израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ако је $5a_{n+1} = {a_n}^2 + 6$ и $a_1 \in (2, 3)$.

Решење. Покажимо прво да је дати низ ограничен, тј. да важи $2 < a_n < 3$. То ћемо урадити Принципом математичке индукције.

База индукције: За $n = 1$ тврђење важи на основу услова задатка да је $a_1 \in (2, 3)$.

Индукцијска претпоставка: Претпоставимо да за $n = k$ тврђење важи, тј. $2 < a_k < 3$.

Индукцијски корак: Посматрајмо шта се дешава за $n = k + 1$:

$$2 < a_k < 3 \ \Rightarrow\ 4 < {a_k}^2 < 9 \ \Rightarrow\ 10 < {a_k}^2 + 6 < 15 \ \Rightarrow\ 2 = \frac{10}{5} < \frac{{a_k}^2 + 6}{5} < \frac{15}{5} = 3 \ \Rightarrow\ 2 < a_{k+1} < 3.$$

На основу Принципа математичке индукције следи да $2 < a_n < 3$ важи за све природне бројеве.

Сада ћемо испитати монотоност: $a_{n+1} - a_n = \dfrac{{a_n}^2 + 6}{5} - a_n = \dfrac{{a_n}^2 - 5a_n + 6}{5} < 0$ јер је квадратни трином $t^2 - 5t + 6 < 0$ за $2 < t < 3$. Тиме смо показали да је овај низ и опадајући, тј. монотон је.

На основу тога што је монотон и ограничен добијамо да овај низ и конвергира. Означимо са $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Тада је и $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = A$, па кад у једнакости $5a_{n+1} = {a_n}^2 + 6$ пустимо да $n \to \infty$ добијамо

$$5A = A^2 + 6.$$

Када решимо ову квадратну једначину добијамо да је $A = 2$ или $A = 3$. Како је низ опадајући и како је $a_1 < 3$ (из поставке задатка) добијамо да овај низ не може да тежи ка 3 него мора ка 2, тј. показали само да је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$. ■