IX двочас вежби — Владимир Балтић

8. Низови

Овде је дат кратак преглед IX двочаса вежби. Потребно је да обновите одговарајућу теоријску материју која је обрађена на предавањима и у уџбенику.

Како се највећим делом на вежбама раде задаци из збирке, након броја задатка плавом бојом је означен број задатка у збирци "МАТЕМАТИКА 1" професора Р. Лазовића, Д. Ђорића и Ђ. Јованова у форми p.z, где је p број поглавља, а z број задатка у том поглављу. Ови задаци са преосталима из збирке (из поглавља "8. Низови" и делом из "9. Реалне функције једне променљиве", као и оним из поглавља "15. Други колоквијум" који су везани за ову материју) чине целину довољну за припрему ових области.

1. 8.36. Доказати конвергенцију низа (a_n) и израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ако је $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

Решење. Како је $n^2+k > n^2$ за $k = 1, 2, \ldots, n$ добијамо да је и $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}} < \dfrac{1}{\sqrt{n^2}} = \dfrac{1}{n}$ за $k = 1, 2, \ldots, n$. Стога имамо да је $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}} < \underbrace{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} + \ldots + \dfrac{1}{n}}_{n} = n \cdot \dfrac{1}{n} = 1$.

Слично, како је $n^2+k < n^2+n+1$ за $k = 1, 2, \ldots, n$ добијамо да је и $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}} > \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}$ за $k = 1, 2, \ldots, n$. Стога имамо да је $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}} > \underbrace{\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}}_{n} = n \cdot \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n+1}}$.

Овим смо добили низове $b_n = 1$ и $c_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n+1}}$ који се јављају у Леми о 2 полицајца. Њихове граничне вредности су једнаке: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n+1}} \cdot \dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n} = \sqrt{\frac{1}{n^2}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} = 1$. Како је $c_n < a_n < b_n$, по Леми о 2 полицајца добијамо да је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1$. ■

2. сличан 8.40. Користећи Кошијев критеријум испитати конвергенцију низа (a_n) датог формулом општег члана $a_n = \dfrac{\cos 1}{1\cdot 2} + \dfrac{\cos 4}{2 \cdot 3} + \ldots + \dfrac{\cos n^2}{n\cdot(n+1)}$.

Решење. Да бисмо искористили Кошијев критеријум конвергенције низова потребно је да наместимо да нам је $|a_{n+k} - a_n| < \varepsilon$ када су $n > n_0$ и $n+k > n_0$. У доказу ћемо користити да је $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, тј. да је $|\cos x| \leqslant 1$.

$|a_{n+k} - a_n| = \left|\frac{\cos 1}{1\cdot 2} + \frac{\cos 4}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{\cos n^2}{n\cdot(n+1)} + \frac{\cos(n+1)^2}{(n+1)\cdot(n+2)} + \ldots + \frac{\cos(n+k)^2}{(n+k)\cdot(n+k+1)} - \left(\frac{\cos 1}{1\cdot 2} + \frac{\cos 4}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{\cos n^2}{n\cdot(n+1)}\right)\right| =$
$\left|\frac{\cos(n+1)^2}{(n+1)\cdot(n+2)} + \frac{\cos(n+2)^2}{(n+2)\cdot(n+3)} + \ldots + \frac{\cos(n+k)^2}{(n+k)\cdot(n+k+1)}\right| \leqslant \left|\frac{\cos(n+1)^2}{(n+1)\cdot(n+2)}\right| + \left|\frac{\cos(n+2)^2}{(n+2)\cdot(n+3)}\right| + \ldots + \left|\frac{\cos(n+k)^2}{(n+k)\cdot(n+k+1)}\right| \leqslant$
$\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} + \frac{1}{(n+2)\cdot(n+3)} + \ldots + \frac{1}{(n+k)\cdot(n+k+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+k+1} < \frac{1}{n+1} < \varepsilon$.

Да би последња неједнакост важила потребно је да буде $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$ за свако $n > n_0$. Стога треба да важи $n+1 > \frac{1}{\varepsilon}$, па можемо узети да је $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$, где ознака $\lfloor\ \rfloor$ представља цео део. Тиме су испуњени критеријуми Кошијевог критеријума конвергенције низова, па дати низ конвергира. ■

Напомена. Методама које излазе ван оквира овог курса Математике 1 може се добити да је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \approx 0.11827$.

3. 8.41. Испитати конвергенцију низа (a_n) ако је $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$.

Решење 1. У изразу Кошијевог критеријума ставимо да је $k = n$ и искористимо да $n+1 < 2n \Rightarrow \frac{1}{n+1} > \frac{1}{2n}$, $n+2 < 2n \Rightarrow \frac{1}{n+2} > \frac{1}{2n}$, ..., $2n-1 < 2n \Rightarrow \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n}$. Тада добијамо

$$|a_{2n} - a_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Стога израз $|a_{2n} - a_n|$ не можемо учинити произвољно малим, тј. не може бити $|a_{2n} - a_n| < \varepsilon$ када је $\varepsilon < 1/2$. Стога по Кошијевом критеријуму конвергенције добијамо да низ a_n дивергира. ■

Наредно решење је из предмета Математика 2 (оно користи теорију везану за редове).

Низ $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ представља хармонијски ред.

Решење 2. Како је $a_n = \frac{1}{n} > 0$ имамо да је хармонијски ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ред са позитивним члановима. Како је функција $f(x) = \frac{1}{x}$ непрекидна, позитивна и нерастућа функција на $[1, +\infty)$, можемо применити интегрални критеријум. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_1^{b} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{b \to +\infty} \ln x \Big|_1^b = \lim\limits_{b \to +\infty} \ln b - \ln 1 = +\infty$. Како интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ дивергира добијамо да и хармонијски ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ дивергира. ■

4. 15.ср7.1. Одредити тачке нагомилавања низа (a_n) ако је $a_n = \dfrac{(1+(-1)^n)n^2 + n}{3n^2 - 1} + \cos\dfrac{2n\pi}{3}$.

Решење. Како је $1 + (-1)^n = \begin{cases} 2 & n = 2k \\ 0 & n = 2k+1 \end{cases}$, то ће сабирак $\dfrac{(1+(-1)^n)n^2 + n}{3n^2 - 1}$ имати 2 тачке нагомилавања: $\frac{2}{3}$ (за парне n) и 0 (за непарне n).

Како је $\cos\dfrac{2n\pi}{3} = \begin{cases} 1 & n = 3k \\ -\frac{1}{2} & n = 3k+1 \\ -\frac{1}{2} & n = 3k+2 \end{cases}$, то ће и други сабирак $\cos\dfrac{2n\pi}{3}$ имати 2 тачке нагомилавања: 1 (за $n = 3k$) и $-\frac{1}{2}$ (за $n = 3k \pm 1$).

Комбиновањем ова 2 резултата добијамо да су тачке нагомилавања

$$\begin{cases} \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3} & n = 6k \\ 0 + (-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} & n = 6k+1 \\ \frac{2}{3} + (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{6} & n = 6k+2 \\ 0 + 1 = 1 & n = 6k \\ \frac{2}{3} + (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{6} & n = 6k+1 \\ 0 + (-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} & n = 6k+2 \end{cases}$$

тј. да низ (a_n) има 4 тачке нагомилавања: $\frac{5}{3}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ и 1. ■

5. Нека је $a_n = \left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)^n + A\sin\dfrac{n\pi}{2}$, $A \in \mathbb{R}$.

а) Одредити тачке нагомилавања низа (a_n).

б) Одредити вредност A тако да низ (a_n) буде конвергентан.

Решење. **а)** Како је $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{2}{2n+1}\right)^{\frac{2n+1}{2}}\right)^{\frac{2n}{2n+1}} = e^1 = e$ то први сабирак $\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^n$ конвергира ка e, па има само једну тачку нагомилавања која је исто e. Како је $A\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ A & n = 4k+1 \\ -A & n = 4k-1 \end{cases}$, то ће други сабирак $A\sin\frac{n\pi}{2}$ имати тачке нагомилавања: 0, A и $-A$.

Стога низ (a_n) има тачке нагомилавања e, $e + A$ и $e - A$.

б) Конвергентан низ има само једну тачку нагомилавања, а то је могуће само за $A = 0$. Тада је $a_n = \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^n$, а за тај низ смо већ видели да конвергира (тежи ка e). ■

9. Реалне функције једне промењиве

6. 9.2. Одредити област дефинисаности D_f функције $f(x) = \ln \dfrac{x-5}{x^2-10x+24} - \sqrt[3]{x+5}$.

Решење. Полиноми су увек дефинисани (тј. $\forall x \in \mathbb{R}$), а и трећи корен је увек дефинисан (само парни корени "праве проблеме") када је и оно под кореном дефинисано. Стога је $\sqrt[3]{x+5}$ дефинисан за све $x \in \mathbb{R}$.

Логаритам $\ln \dfrac{x-5}{x^2-10x+24}$ је дефинисан када је $\dfrac{x-5}{x^2-10x+24}$ дефинисан и када је $\dfrac{x-5}{x^2-10x+24} > 0$. Разломак $\dfrac{x-5}{x^2-10x+24}$ је дефинисан када је $x^2-10x+24 \neq 0$, тј. када је $x \neq 4, 6$ (то добијемо решавањем квадратне једначине. Остаје да решимо неједначину $\dfrac{x-5}{x^2-10x+24} > 0$. То радимо тако што за сваки од чланова овог разломка понаособ испитамо знак, а затим све то унесемо у таблицу:

	$(-\infty,4)$	4	$(4,5)$	5	$(5,6)$	6	$(6,+\infty)$
$x-5$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$x^2-10x+24$	$+$	x	$-$	$-$	$-$	x	$+$
$\frac{x-5}{x^2-10x+24}$	$+$	x	$-$	0	$+$	x	$-$

Из таблице видимо да је решење неједначине $(-\infty,4) \cup (5,6)$.

На основу свега добијамо да је и област дефинисаности $D = (-\infty,4) \cup (5,6)$. ■

7. 9.3. Одредити област дефинисаности D_f функције $f(x) = \sqrt{3-x} + \arcsin \dfrac{3-2x}{5}$.

Решење. Квадратни корен $\sqrt{3-x}$ је дефинисан када је оно под кореном, $3-x$ дефинисано (што је увек) и кад је $3-x \geqslant 0$, тј. за $x \in (-\infty, 3]$.

Аркуссинус $\arcsin \frac{3-2x}{5}$ је дефинисан када је $\frac{3-2x}{5}$ дефинисано (што је увек) и кад је $-1 \leqslant \frac{3-2x}{5} \leqslant 1$. Ова двострука неједначина се своди на решавање 2 неједначине:

$$-1 \leqslant \frac{3-2x}{5} \;\Rightarrow\; -5 \leqslant 3-2x \;\Rightarrow\; 2x \leqslant 8 \;\Rightarrow\; x \leqslant 4 \qquad \text{и} \qquad \frac{3-2x}{5} \leqslant 1 \;\Rightarrow\; 3-2x \leqslant 5 \;\Rightarrow\; -2 \leqslant 2x \;\Rightarrow\; x \geqslant -1,$$

те је њено решење $x \in [-1,4]$.

Област дефинисаности дате функције добијамо у пресеку претходна 2 решења неједначина, тј. имамо да је $D = [-1,3]$. ■

8. 9.17. Одредити нуле и испитати знак функције $f(x) = \dfrac{x^2-4x}{\sqrt{6-x-x^2}}$.

Решење. Пре него што кренемо да испитујемо нуле и знак, прво ћемо одредити област дефинисаности (она нам је потребна за све тачке у испитивању функције).

Разломак је дефинисан када су и именилац и бројилац дефинисани и када је именилац различит од 0. Полином x^2-4x је увек дефинисан, корен $\sqrt{6-x-x^2}$ је дефинисан када је $6-x-x^2 \geqslant 0$, тј. за $x \in [-3,2]$ и још треба да буде $\sqrt{6-x-x^2} \neq 0$, што се своди на $x \neq -3, 2$. Стога је $D = (-3,2)$.

Разломак $f(x) = \frac{x^2-4x}{\sqrt{6-x-x^2}}$ је једнак нули ако је бројилац $x^2-4x=0$, што је испуњено за $x_1 = 0$ и $x_2 = 4$. Али како је $x_1 = 0 \in D$ и $x_2 = 4 \notin D$, добијамо да функција $f(x)$ има само једну нулу $x = 0$.

Квадратни корен кад год је дефинисан је ненегативан. Знак ћемо одредити помоћу таблице:

	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,4)$	4	$(4,+\infty)$
x^2-4x	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\sqrt{6-x-x^2}$	x	x	$+$	$+$	$+$	x	x	x	x
$f(x)$	x	x	$+$	0	$-$	x	x	x	x

Добили смо да је $f(x) > 0$ за $x \in (-3,0)$, $f(x) = 0$ за $x = 0$ и $f(x) < 0$ за $x \in (0,2)$. ■

9. 9.17. Испитати парност функције $f(x) = \dfrac{x^2-4x}{\sqrt{6-x-x^2}}$.

Решење. У претходном задатку смо добили да је домен $D = (-3,2)$. Како функција $f(x)$ нема симетричан домен у односу на $x = 0$ она није ни парна ни непарна. ■

10. 9.20. Испитати парност функције $f(x) = \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$.

Решење. Како је $f(-x) = \dfrac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1} = \dfrac{\frac{1}{e^x}+1}{\frac{1}{e^x}-1} = \dfrac{\frac{1+e^x}{e^x}}{\frac{1-e^x}{e^x}} = \dfrac{1+e^x}{1-e^x} = -\dfrac{e^x+1}{e^x-1} = -f(x)$ функција $f(x)$ је непарна. ■

11. 9.21. Испитати парност функције $f(x) = \sin x - \cos x$.

Решење. $f(\frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$ и $f(-\frac{\pi}{4}) = \sin(-\frac{\pi}{4}) - \cos(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$.
Како је $f(\frac{\pi}{4}) = 0 \neq -\sqrt{2} = f(-\frac{\pi}{4})$ функција $f(x)$ није парна.
Како је $f(\frac{\pi}{4}) = 0 \neq \sqrt{2} = -f(-\frac{\pi}{4})$ функција $f(x)$ није непарна. ■

12. 9.36. Доказати да је функција $f(x) = \sqrt{\sin(\pi x + 2\pi)}$ периодична и наћи основни период.

Решење. Покажимо да је функција $g(x) = \sin(\pi x + 2\pi)$ периодична, одакле ће следити и да је функција $f(x) = \sqrt{\sin(\pi x + 2\pi)}$ периодична.

Нађимо број T такав да је $g(x) = g(x+T)$, тј. $\sin(\pi x + 2\pi) = \sin\big(\pi(x+T) + 2\pi\big)$ за свако за свако x. Како је $\sin\big(\pi(x+T)+2\pi\big) = \sin\big(\pi x + 2\pi + \pi T\big)$, а синус периодична функција са периодом 2π, то можемо узети да је $T = 2$ и онда важи $g(x) = g(x+2)$, што повлачи и $f(x) = f(x+2)$, па је дата функција периодична.

Из чињенице да је основни период синуса 2π следи да је и основни период функције $f(x)$ једнак $\omega = 2$. ■