

### 3. Вектори

Овде је дат кратак преглед V двочаса вежби. Потребно је да обновите одговарајућу теоријску материју која је обрађена на предавањима и у уџбенику.

Како се највећим делом на вежбама раде задаци из збирке, након броја задатка плавом бојом је означен број задатка у збирци "Методичка збирка решених задатака из Математике 1" аутора Владимира Балтића и Оливере Милић у форми  $x.z.$ , где је  $x$  број главе, а  $z$  број задатка у тој глави. Ови задаци са оним са писмених и колоквијума од претходних година чине целину довољну за припрему ове области.

1. **3.3.** Нека је  $\mathbb{R}^3 = \{(a_1, a_2, a_3) \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$  и нека су  $+$  и  $\cdot$  операције у  $\mathbb{R}^3$  дефинисане једнакостима  $(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$  и  $\lambda \cdot (a_1, a_2, a_3) = (\lambda \cdot a_1, \lambda \cdot a_2, \lambda \cdot a_3)$ , где је  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

а) Доказати да је  $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$  векторски простор над пољем  $\mathbb{R}$ .

б) Доказати да вектори  $\vec{e}_1 = (2, 1, -3)$ ,  $\vec{e}_2 = (3, 2, -5)$ ,  $\vec{e}_3 = (1, -1, 1)$  чине базу у  $\mathbb{R}^3$  и изразити вектор  $\vec{x} = (6, 2, -7)$  помоћу вектора те базе.

**Решење.** а) Да би  $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$  био векторски простор потребно је да  $(V, +)$  буде Абелова група и да важи:

$$k \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = k \cdot \vec{v} + k \cdot \vec{w}, \quad (k + m) \cdot \vec{v} = k \cdot \vec{v} + m \cdot \vec{v}, \quad k \cdot (m \cdot \vec{v}) = (k \cdot m) \cdot \vec{v}, \quad 1 \cdot \vec{v} = \vec{v}.$$

Означимо векторе  $\vec{v} = (a, b, c)$  и  $\vec{w} = (m, n, p)$ .

У  $\mathbb{R}^3$  операција  $+$  сабирања вектора је затворена јер је  $\vec{v} + \vec{w} = (a, b, c) + (m, n, p) = (a + m, b + n, c + p) \in \mathbb{R}^3$ .

Асоцијативност сабирања вектора је директна последица асоцијативности операције сабирања у  $\mathbb{R}$ .

Неутрални елемент је нула-вектор  $\vec{0} = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ .

Инверзан елемент вектора  $\vec{v} = (a, b, c)$  је супротан вектор  $-\vec{v} = (-a, -b, -c) \in \mathbb{R}^3$ .

Комутативност сабирања вектора је директна последица комутативности операције сабирања у  $\mathbb{R}$ .

На основу овога следи да је  $(\mathbb{R}^3, +)$  Абелова група.

На основу дистрибутивности операција  $\cdot$  и  $+$  у  $\mathbb{R}$  добијамо да је

$$\begin{aligned} k \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= k \cdot ((a, b, c) + (m, n, p)) = k \cdot (a + m, b + n, c + p) = (k(a + m), k(b + n), k(c + p)) \\ &= (ka + km, kb + kn, kc + kp) = (ka, kb, kc) + (km, kn, kp) = k \cdot \vec{v} + k \cdot \vec{w}. \end{aligned}$$

На основу дистрибутивности операција  $\cdot$  и  $+$  у  $\mathbb{R}$  добијамо да је

$$\begin{aligned} (k + m) \cdot \vec{v} &= (k + m) \cdot (a, b, c) = ((k + m)a, (k + m)b, (k + m)c) = (ka + ma, kb + mb, kc + mc) \\ &= (ka, kb, kc) + (ma, mb, mc) = k \cdot \vec{v} + m \cdot \vec{v}. \end{aligned}$$

Из асоцијативности операције  $\cdot$  у  $\mathbb{R}$  добијамо

$$k \cdot (m \cdot \vec{v}) = k \cdot (m \cdot (a, b, c)) = k \cdot (ma, mb, mc) = (kma, kmb, kmc) = (k \cdot m) \cdot \vec{v}.$$

И коначно имамо

$$1 \cdot \vec{v} = 1 \cdot (a, b, c) = (1 \cdot a, 1 \cdot b, 1 \cdot c) = (a, b, c) = \vec{v}.$$

На основу свега изложеног следи да је  $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$  векторски простор.

б) Да би вектори  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  и  $\vec{e}_3$  чинили базу у  $\mathbb{R}^3$  треба да су линеарно независни и да генеришу простор  $\mathbb{R}^3$ .

Вектори  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  и  $\vec{e}_3$  су линеарно независни ако и само ако једначина

$$\alpha \cdot \vec{e}_1 + \beta \cdot \vec{e}_2 + \gamma \cdot \vec{e}_3 = \vec{0}$$

има само тривијално решење  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ . Та једначина је једнака

$$\alpha \cdot (2, 1, -3) + \beta \cdot (3, 2, -5) + \gamma \cdot (1, -1, 1) = (2\alpha, \alpha, -3\alpha) + (3\beta, 2\beta, -5\beta) + (\gamma, -\gamma, \gamma) = (2\alpha + 3\beta + \gamma, \alpha + 2\beta - \gamma, -3\alpha - 5\beta + \gamma) = \vec{0},$$

$$\text{односно добијамо } (2\alpha + 3\beta + \gamma, \alpha + 2\beta - \gamma, -3\alpha - 5\beta + \gamma) = (0, 0, 0), \text{ што се своди на систем } \begin{aligned} 2\alpha + 3\beta + \gamma &= 0 \\ \alpha + 2\beta - \gamma &= 0 \\ -3\alpha - 5\beta + \gamma &= 0. \end{aligned}$$

Ово је хомогени систем и како му је детерминанта

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

он има јединствено решење, а то је тривијално решење  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ , па су вектори  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  и  $\vec{e}_3$  линеарно независни.

Вектори  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  и  $\vec{e}_3$  генеришу цео простор  $\mathbb{R}^3$ , ако се произвољан вектор  $\vec{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  може представити као линеарна комбинација вектора  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  и  $\vec{e}_3$ .

Сада решавамо једначину  $\alpha \cdot \vec{e}_1 + \beta \cdot \vec{e}_2 + \gamma \cdot \vec{e}_3 = \vec{v}$ , односно

$$(2\alpha + 3\beta + \gamma, \alpha + 2\beta - \gamma, -3\alpha - 5\beta + \gamma) = (a, b, c).$$

Како и овај систем има исту детерминанту система  $\Delta = 1 \neq 0$  добијамо да и он има јединствено решење (одредити решење овог система!).

Тиме смо показали да је  $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  база векторског простора  $\mathbb{R}^3$ .

Остаје још да изразимо вектор  $\vec{x} = (6, 2, -7)$  преко вектора из базе  $B$ . Сада решавамо векторску једначину

$$(2\alpha + 3\beta + \gamma, \alpha + 2\beta - \gamma, -3\alpha - 5\beta + \gamma) = (6, 2, -7) \text{ која је еквивалентна са системом } \begin{array}{rrcr} 2\alpha & + & 3\beta & + & \gamma & = & 6 \\ \alpha & + & 2\beta & - & \gamma & = & 2 \\ -3\alpha & - & 5\beta & + & \gamma & = & -7. \end{array}$$

Овај систем има детерминанту  $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ , што са осталим детерминантама из Крамерових формула

$$\Delta_\alpha = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -7 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_\beta = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_\gamma = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \\ -3 & -5 & -7 \end{vmatrix} = 1,$$

даје  $\alpha = \frac{\Delta_\alpha}{\Delta} = 1$ ,  $\beta = \frac{\Delta_\beta}{\Delta} = 1$  и  $\gamma = \frac{\Delta_\gamma}{\Delta} = 1$ . Дакле тражено представљање је

$$\vec{x} = 1 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + 1 \cdot \vec{e}_3,$$

односно  $(6, 2, -7) = 1 \cdot (2, 1, -3) + 1 \cdot (3, 2, -5) + 1 \cdot (1, -1, 1)$ . ■

**Напомена.** Линеарну зависност вектора  $\vec{e}_1 = (2, 1, -3)$ ,  $\vec{e}_2 = (3, 2, -5)$  и  $\vec{e}_3 = (1, -1, 1)$  можемо испитати тако што одредимо ранг матрице  $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$  (која као врсте има векторе  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  и  $\vec{e}_3$ ).

Из  $r(M) = 3$  следи да имамо 3 линеарно независна вектора  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  и  $\vec{e}_3$ , тј. да су вектори  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  и  $\vec{e}_3$  линеарно независни.

**2. 3.34.** Ако је  $\vec{a} = (1, 2, 3)$ ,  $\vec{b} = (4, 1, 1)$  и  $\vec{c} = (-9, 3, 6)$  доказати да су вектори  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  компланарни, а затим изразити трећи вектор преко прва два.

*Решење.* Да су ова 3 вектора компланарна (тј. у истој равни у  $\mathbb{R}^3$ ) показаћемо тако што покажемо да су они линеарно зависни. У ту сврху ћемо израчунати детерминанту чије су врсте (или колоне) дати вектори:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ -9 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

па су они линеарно зависни. Из једначине  $(-9, 3, 6) = \alpha(1, 2, 3) + \beta(4, 1, 1)$  добијамо систем  $\begin{array}{rrcr} \alpha & + & 4\beta & = & -9 \\ 2\alpha & + & \beta & = & 3 \\ 3\alpha & + & \beta & = & 6 \end{array}$  који има решење  $\alpha = 3$  и  $\beta = -3$ , тј.  $(-9, 3, 6) = 3 \cdot (1, 2, 3) - 3 \cdot (4, 1, 1)$ . ■

**3. 3.21.** Дати су вектори  $\vec{u} = (6, 1, 1)$ ,  $\vec{v} = (0, 3, -1)$  и  $\vec{w} = (-2, 3, 5)$ . Одредити  $t$  тако да вектори  $\vec{u} + t\vec{v}$  и  $\vec{w}$  буду ортогонални.

**Решење.** Означимо  $\vec{x} = \vec{u} + t \cdot \vec{v} = (6, 1 + 3t, 1 - t)$ .

$$\vec{x} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{w} = 0.$$

$$(6, 1 + 3t, 1 - t) \cdot (-2, 3, 5) = -12 + (3 + 9t) + (5 - 5t) = 0, \text{ тј. } -4 + 4t = 0 \Rightarrow \text{ортогонални су за } t = 1. \quad \blacksquare$$

**4. 3.13.** Израчунати меру  $\varphi$  угла који граде вектори  $\vec{a} = 7\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$  и  $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ .

**Решење.** Из формуле  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$  добијамо да је  $\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ .

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (7, 2, -1) \cdot (1, 2, -3) = 7 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-3) = 14.$$

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = (7, 2, -1) \cdot (7, 2, -1) = 54 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{54}.$$

$$|\vec{b}|^2 = \vec{b} \cdot \vec{b} = (1, 2, -3) \cdot (1, 2, -3) = 14 \Rightarrow |\vec{b}| = \sqrt{14}.$$

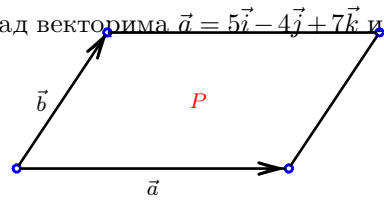
$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{14}{\sqrt{54} \cdot \sqrt{14}} = \sqrt{\frac{7}{27}} \text{ па је тражени угао } \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos \sqrt{\frac{7}{27}}. \quad \blacksquare$$

**5. 3.27.** Израчунати површину  $P$  паралелограма конструисаног над векторима  $\vec{a} = 5\vec{i} - 4\vec{j} + 7\vec{k}$  и  $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ .

**Упутства.** Векторски производ  $\vec{a} \times \vec{b}$  је једнак

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -4 & 7 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1\vec{i} + 17\vec{j} + 9\vec{k} = (1, 17, 9), \text{ па је}$$

$$P = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{1^2 + 17^2 + 9^2} = \sqrt{371}. \quad \blacksquare$$



Слика уз задатак 5.

**6. 3.32.** Наћи површину и дужину висине  $BD$  троугла  $ABC$  ако је  $A(-3, -2, 0)$ ,  $B(3, -3, 1)$  и  $C(5, 0, 2)$ .

**Решење 1.** Одредимо прво векторе који одређују троугао  $\triangle ABC$ :

$$\vec{a} = \overrightarrow{CA} = (x_A - x_C, y_A - y_C, z_A - z_C) = (-8, -2, -2) \quad \text{и} \quad \vec{b} = \overrightarrow{CB} = (-2, -3, -1).$$

Њихов векторски производ је  $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -8 & -2 & -2 \\ -2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = (-4, -4, 20)$ . Тражена површина је

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + 20^2} = \frac{1}{2} \sqrt{432} = 6\sqrt{3}.$$

Како је са друге стране ова површина  $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} CA \cdot BD$  и како је  $|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{(-8)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$  добијамо да је дужина висине  $BD = \frac{2P}{CA} = \frac{12\sqrt{3}}{6\sqrt{2}} = \sqrt{6}$ .  $\blacksquare$

**Решење 2.** Површину троугла  $\triangle ABC$  у простору можемо израчунати и преко формуле  $P = \frac{1}{2} \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2}$ , где су  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$  следеће детерминанте:

$$P_1 = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 20, \quad P_2 = \begin{vmatrix} y_A & z_A & 1 \\ y_B & z_B & 1 \\ y_C & z_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4, \quad P_3 = \begin{vmatrix} z_A & x_A & 1 \\ z_B & x_B & 1 \\ z_C & x_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -4.$$

$$P = \frac{1}{2} \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2} = \frac{1}{2} \sqrt{432} = 6\sqrt{3}.$$

Даље смо  $BD$  могли да рачунамо као и у претходном решењу, али ћемо и то урадити другачије.

Нађимо координате тачке  $D$  која је подножје висине из темена  $B$  на страницу  $CA$ . Означимо са  $b$  праву која садржи страницу  $CA$ . Произволна тачка  $T$  са праве  $b$  дата је са

$$(x_T, y_T, z_T) = (x_C, y_C, z_C) + t \cdot \overrightarrow{CA} = (5 - 8t, -2t, 2 - 2t)$$

(разлог је јер су вектори  $\overrightarrow{CA}$  и  $\overrightarrow{CT}$  колинеарни, тј. важи  $\overrightarrow{CT} = t \cdot \overrightarrow{CA}$ ).

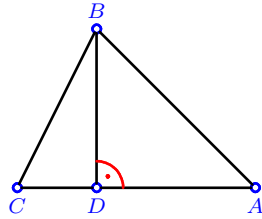
Како и тачка  $D$  припада правој  $b$  то ће бити  $D(5 - 8t, -2t, 2 - 2t)$ , за неку вредност параметра  $t$ .

То  $t$  одређујемо из услова да су страница  $CA$  и висина  $BD$  ортогоналне, тј.  $CA \perp BD$ , па важи  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ .  
 $\overrightarrow{BD} = (2 - 8t, 3 - 2t, 2 - 2t)$ , па је

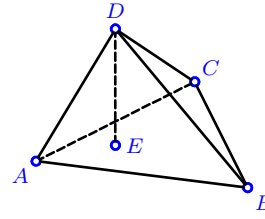
$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = (-8, -2, -2) \cdot (2 - 8t, 3 - 2t, 2 - 2t) = 16 - 64t + 6 - 4t + 2 - 4t = 24 - 72t = 0,$$

одакле налазимо  $t = \frac{1}{3}$ , па је подножје висине из  $B$  тачка  $D(\frac{7}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$ .

Вектор  $\overrightarrow{BD} = (-\frac{2}{3}, \frac{7}{3}, \frac{1}{3})$ , па је тражена висина  $|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{49}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{6}$ . ■



Слика уз задатак 6.



Слика уз задатак 7.

7. 3.46. Дате су тачке  $A(1, -1, 1)$ ,  $B(1, 3, 1)$ ,  $C(3, 1, 1)$ , и  $D(1, 1, 3)$ .

а) Израчунати запремину  $V$  пирамиде  $ABCD$ .

б) Израчунати дужину висине  $h_D$  из темена  $D$  пирамиде  $ABCD$ .

**Решење.** а) Одредимо прво следеће векторе:  $\overrightarrow{AB} = (0, 4, 0)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (2, 2, 0)$  и  $\overrightarrow{AD} = (0, 2, 2)$ .

Запремина пирамиде  $ABCD$  дата је са

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]| = \frac{1}{6} |\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD})| = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \right| = \frac{|-16|}{6} = \frac{8}{3}.$$

б) Површина троугла  $ABC$  је  $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$ . Како је  $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, -8)$  добијамо да је

$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |(0, 0, -8)| = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$ . Како је запремина пирамиде  $ABCD$  једнака  $V_{ABCD} = \frac{1}{3} P_{\triangle ABC} \cdot h_D$ , одатле добијамо да је  $h_D = 2$ . ■

**Напомена.** Уколико би као у претходном решењу хтели да одредимо подножје  $E$  висине из темена  $D$  на страну  $ABC$  (тј. пројекцију тачке  $D$  на раван  $ABC$ ), узели би да је произвољна тачка  $T$  равни  $ABC$  дата са

$$(x_T, y_T, z_T) = (x_A, y_A, z_A) + t \cdot \overrightarrow{AB} + p \cdot \overrightarrow{AC} = (1 + 2p, -1 + 4t + 2p, 1),$$

тј.  $\overrightarrow{DE} = (2p, -2 + 4t + 2p, -2)$  па бисмо решавали систем (по  $t$  и  $p$ )  $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ ,  $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ .

Његово решење је  $t = \frac{1}{2}$ ,  $p = 0$ , па је подножје  $E(1, 1, 1)$ .

Коначно,  $h_D = |\overrightarrow{DE}| = 2$ .

**Питање.** Шта је једначина равни  $ABC$ ? (Ово питање мало улази у следећу област)