

2. Линеарна алгебра

Овде је дат кратак преглед III двочаса вежби. Потребно је да обновите одговарајућу теоријску материју која је обрађена на предавањима и у уџбенику.

Како се највећим делом на вежбама раде задаци из збирке, након броја задатка плавом бојом је означен број задатка у збирци "Методичка збирка решених задатака из Математике 1" аутора Владимира Балтића и Оливере Мизић у форми $x.z.$, где је x број главе, а z број задатка у тој глави. Ови задаци са оним са писмених и колоквијума од претходних година чине целину довољну за припрему ове области.

2.3. Матрице

1. Ако су A , B , X и $B - I$ регуларне матрице, одредити матрицу X из матричне једначине $AX^{-1}B - B = AX^{-1}$.

Решење. Прво ћемо пребацити изразе који имају непознату матрицу X на једну страну, а све остале на другу. Тада добијамо

$$AX^{-1}B - AX^{-1} = B, \quad \text{тј.} \quad AX^{-1}(B - I) = B.$$

$$AX^{-1}(B - I) = B \quad / \quad \underline{A^{-1}}.$$

$$X^{-1}(B - I) = A^{-1}B \quad / \quad \underline{X}.$$

$$(B - I) = XA^{-1}B \quad / \quad \underline{\cdot B^{-1}}$$

$$(B - I)B^{-1} = XA^{-1} \quad / \quad \underline{\cdot A}$$

$$(B - I)B^{-1}A = X,$$

тј. добили смо да је $X = (B - I)B^{-1}A$. ■

Напомена. Овај задатак смо могли да решимо и тако што би добили да је $X^{-1} = A^{-1}B(B - I)^{-1}$ и онда коришћењем формуле за инверзну матрицу производа квадратних матрица M и N , $(M \cdot N)^{-1} = N^{-1} \cdot M^{-1}$, би дошли до истог резултата.

2. Нека је

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Q}, c \neq 0, |a| \neq |b| \right\},$$

а \cdot је операција множења матрица. Испитати да ли је (\mathcal{A}, \cdot) Абелова група.

Упутства. Означити са $A(a, b, c) = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix}$.

Затвореност следи из чињенице $A(a, b, c) \cdot A(m, n, p) = A(am + bn, an + bm, cp) \in \mathcal{A}$.

Како је множење матрица асоцијативно у скупу свих матрица \mathcal{M} облика 3×3 то је оно асоцијативно и у скупу $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$.

Неутрални елемент је јединична матрица $I = A(1, 0, 1) \in \mathcal{A}$.

Инверзни елемент је инверзна матрица A^{-1} матрице $A = A(a, b, c)$ — то је $A^{-1} = A(\frac{a}{a^2 - b^2}, \frac{-b}{a^2 - b^2}, \frac{1}{c}) \in \mathcal{A}$.

Због комутативности множења и сабирања рационалних бројева важи

$$A(a, b, c) \cdot A(m, n, p) = A(am + bn, an + bm, cp) = A(ma + nb, mb + na, pc) = A(m, n, p) \cdot A(a, b, c),$$

па је операција \cdot комутативна у \mathcal{A} .

Ова структура јесте Абелова група. ■

3. Одредити ранг матрице

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Решење 1. Ова матрица има 5 субматрица реда 4 (њих добијамо кад редом избацимо прву колону, другу колону, трећу колону, четврту колону и на крају пету):

$$\begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & -4 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Детерминанте свих ових матрица су једнаке 0 (проверите!). Добили смо да су све субматрице реда 4 сингуларне, те ранг матрице A није 4, тј. $r(A) \neq 4$.

Уочимо сада неку субматрицу реда 3, нпр. ону која се добија од полазне матрице када се избаце четврта врста и четврта и пета колона. Њена детерминанта је

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 0 + 3 - 0 - 2 - 4 = 1 \neq 0,$$

па је ова субматрица регуларна. Значи нашли смо регуларну субматрицу реда 3, а све субматрице већег реда су сингуларне, те је ранг матрице A , $r(A) = 3$. ■

Решење 2.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{II} - 2 \cdot \text{I} \\ \text{IV} - 4 \cdot \text{I} \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{IV} - \text{II} \\ \text{IV} - \text{III} \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Како све матрице у овом низу имају исти ранг (што означавамо са \sim) то је и $r(A) = 3$. ■

4. Одредити ранг матрице

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -a \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -a & -1 \end{bmatrix}$$

у зависности од реалног параметра a .

Решење. У овом решењу ћемо комбиновати методе из два решења претходног задатка.

Прво ћемо одредити детерминанту ове матрице:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -a \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -a & -1 \end{vmatrix} = a^2 + 7a - 8 = (a - 1)(a + 8).$$

Када је $a \neq 1, -8$ имамо да је $|A| \neq 0$, па је матрица A регуларна и како је она 3×3 у овом случају је $r(A) = 3$. За $a = 1$ или $a = -8$ матрица A је сингуларна ($|A| = 0$), па је $r(A) \neq 3$, тачније $r(A) < 3$. Уочимо субматрицу која се добије када избацимо III врсту и III колону матрице A — она је регуларна јер је:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5 \neq 0,$$

па како је она облика 2×2 добијамо да је у ова 2 случаја $r(A) = 2$.

Коначан закључак је да је

$$r(a) = \begin{cases} 3 & \text{за } a \neq 1, -8 \\ 2 & \text{за } a = 1 \text{ или } a = -8. \end{cases}$$

Напомена. Случајеве $a = 1$ и $a = -8$ смо могли и да добијемо на други начин.

Када је $a = 1$ матрица A је сингуларна ($|A| = 0$), па је $r(A) \neq 3$, тачније $r(A) < 3$. У полазној матрици A заменимо свако a са 1 и добијамо

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{II} - 2 \cdot \text{I} \\ \text{III} - 3 \cdot \text{I} \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & -10 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \text{III} - 2 \cdot \text{II} \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

па је за $a = 1$ ранг матрице A једнак $r(A) = 2$.

Када је $a = -8$ матрица A је сингуларна. У полазној матрици A заменимо свако a са -8 и добијамо

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 8 \\ 3 & 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{II} - 2 \cdot \text{I} \\ \text{III} - 3 \cdot \text{I} \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 10 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \text{III} - 5 \cdot \text{II} \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

па је и за $a = -8$ ранг матрице A једнак $r(A) = 2$.

5. Одредити ранг матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 1 & 2a-1 & 3 & 1 \\ 1 & 3a-2 & b+1 & b-2 \end{pmatrix}$$

у зависности од реалних параметара a и b .

Упутства.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 1 & 2a-1 & 3 & 1 \\ 1 & 3a-2 & b+1 & b-2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{II} - \text{I} \\ \text{III} - \text{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 0 \\ 0 & 2a-2 & b-1 & b-3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \text{III} - \text{II} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b-3 & b-3 \end{pmatrix}.$$

Шта може да нам ”поквари” ове степенице? Па ако је неки елемент на почетку ”степеника” једнак 0, тј. ако је (за 2. степен) $a - 1 = 0$ или ако је (за 3. степен) $b - 3 = 0$.

Дакле ако је $a \neq 1$ и $b \neq 3$ онда је ранг $r(A) = 3$.

За $b = 3$ добијамо да је ранг $r(A) = 2$ (проверити!).

За $a = 1$ и $b \neq 3$ добијамо да је ранг $r(A) = 3$ (проверити!).

■

2.2. Системи линеарних једначина

6. Решити систем линеарних једначина

$$\begin{array}{rrcrcl} x & + & y & - & z & = & -4 \\ 2x & + & y & & & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 6 \end{array}$$

а) матричном методом;

б) Гаусовим системом елиминације;

в) Крамеровим правилом;

г) применом Кронекер-Капелијеве теореме.

Решење. а) Матрица овог система је $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ (то је била матрица A за коју смо одређивали A^{-1}

на II двочасу). Означимо матрицу непознатих $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ и матрицу слободних чланова $B = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$.

Уочимо једнакост $A \cdot X = B$. Она је једнака

$$\begin{bmatrix} x + y - z \\ 2x + y \\ x - y + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

што је еквивалентно са нашим системом. Значи ако решимо матричну једначину $A \cdot X = B$ решили смо и систем.

Њено решење је $X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Како је $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ добијамо да је решење система $x = 1, y = -2, z = 3$.

б) Гаусовим системом елиминације прво елиминишемо променљиве x из II и III једначине, а затим y из III:

$$\begin{array}{rrrrrr} x & + & y & - & z & = & -4 \\ 2x & + & y & & & = & 0 & \text{II} - 2 \cdot \text{I} \\ x & - & y & + & z & = & 6 & \text{III} - \text{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrr} x & + & y & - & z & = & -4 \\ & - & y & + & 2z & = & 8 \\ & - & 2y & + & 2z & = & 10 & \text{III} - 2 \cdot \text{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrr} x & + & y & - & z & = & -4 \\ & - & y & + & 2z & = & 8 \\ & & & - & 2z & = & -6 \end{array}$$

Променљиве на почетку сваке од једначина се налазе везане променљиве, а све остале су слободне (слободним променљивим додељујемо вредности параметара). Значи овде су све променљиве x, y, z везане. Из последње једначине добијамо $z = \frac{-6}{-2} = 3$. Када то уврстимо у II једначину добијамо $-y + 2 \cdot 3 = 8 \Rightarrow y = -2$. Када добијене вредности за y и z убацимо у I једначину добијамо $x + (-2) - 3 = -4 \Rightarrow x = 1$.

в) Детерминанта система Δ и остале детерминанте које се јављају у Крамеровим формулама ($\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$) су једнаке:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -4, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 6.$$

Како је $\Delta = 2 \neq 0$ систем има јединствено решење и оно је дато са $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 1, y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -2$ и $z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = 3$.

г) Решавање преко Кронекер-Капелијеве теореме је у ствари чист Гаусов систем елиминације, само користимо матрични запис.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{II} - 2 \cdot \text{I} \\ \text{III} - \text{I} \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & -2 & 2 & 10 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \text{III} - 2 \cdot \text{II} \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array} \right] \text{III} : (-2)$$

Овде имамо да је ранг матрице система једнак рангу проширене матрице система, $r(A) = r(B) = 3$, па систем има решења, а како је то једнако броју променљивих (имамо 3 променљиве: x, y, z) то решење је јединствено. Њега добијамо даљим трансформацијама проширене матрице система:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{I} + \text{III} \\ \text{II} - 2 \cdot \text{III} \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{I} + \text{II} \\ (-1) \cdot \text{II} \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right].$$

Ова последња матрица је еквивалентна са системом $x = 1, y = -2$ и $z = 3$, што је и решење полазног система. ■