

IV двочас вежби

мр Владимир Балтић

2. Линеарна алгебра

4. Системи линеарних једначина

Теоријски увод

Кронекер-Капелијева теорема

Посматрајмо систем:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \dots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \dots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \dots + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array}$$

Кронекер-Капелијева теорема

Посматрајмо систем:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \dots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \dots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \dots + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

је *матрица система*.

Кронекер-Капелијева теорема

Посматрајмо систем:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \dots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \dots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \dots + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array}$$

$$B = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

је *проширена матрица система*.

Теорема 1. Кронекер-Капелијева теорема.
Систем линеарних једначина је сагласан акко

$$r(A) = r(B).$$

Теорема 1. Кронекер-Капелијева теорема.

Систем линеарних једначина је сагласан акко

$$r(A) = r(B).$$

1° $r(A) < r(B)$ систем нема решења;

Теорема 1. Кронекер-Капелијева теорема.

Систем линеарних једначина је сагласан акко

$$r(A) = r(B).$$

1° $r(A) < r(B)$ систем нема решења;

2° $r(A) = r(B) = n$ систем има јединствено решење;

Теорема 1. Кронекер-Капелијева теорема.

Систем линеарних једначина је сагласан акко

$$r(A) = r(B).$$

1° $r(A) < r(B)$ систем нема решења;

2° $r(A) = r(B) = n$ систем има јединствено решење;

3° $r(A) = r(B) < n$ систем има вишеструко решење које зависи од $n - r(A)$ параметара.

Крамерове формуле

Систем од n једначина са n променљивих:
можемо решавати помоћу детерминанти.

Крамерове формуле

Систем од n једначина са n променљивих:
можемо решавати помоћу детерминанти.

Детерминанта матрице система

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

је *детерминанта система*.

Детерминанте

$$\Delta_i = \det B_i, \quad \text{за } i = 1, \dots, n.$$

Детерминанте

$$\Delta_i = \det B_i, \quad \text{за} \quad i = 1, \dots, n.$$

Матрица B_i се добија од матрице A заменом i -те колоне колоном слободних чланова

$$b_1$$
$$b_2$$
$$\vdots$$
$$b_n$$

- $\Delta \neq 0$ систем има јединствено решење.

- $\Delta \neq 0$ систем има јединствено решење.
Оно је дато помоћу *Крамерових формула*:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

- $\Delta \neq 0$ систем има јединствено решење.
Оно је дато помоћу *Крамерових формула*:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

- $\Delta = 0$ и неко $\Delta_i \neq 0$ систем нема решења.

- $\Delta \neq 0$ систем има јединствено решење.
Оно је дато помоћу *Крамерових формула*:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

- $\Delta = 0$ и неко $\Delta_i \neq 0$ систем нема решења.
- $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \dots = \Delta_n = 0$ тада

???

- $\Delta \neq 0$ систем има јединствено решење.
Оно је дато помоћу *Крамерових формула*:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

- $\Delta = 0$ и неко $\Delta_i \neq 0$ систем нема решења.
- $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \dots = \Delta_n = 0$ тада

???

нема решења

или

вишеструко
решење

- $\Delta \neq 0$ систем има јединствено решење.
Оно је дато помоћу *Крамерових формула*:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

- $\Delta = 0$ и неко $\Delta_i \neq 0$ систем нема решења.
- $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \dots = \Delta_n = 0$ тада

???

нема решења

или

вишеструко
решење

МОРА Гаусовим сис. ел.

Задаци

0. Решити систем

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & - & z & = & -4 \\ 2x & + & y & & & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 6 \end{array}$$

3) Крамеровим правилом;

4) применом Кронекер-Капелијеве теореме.

Решение 3. КРАМЕРОВО ПРАВИЛО

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & -4 \\ 2x & + & y & & & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 6 \end{array}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

Решение 3. КРАМЕРОВО ПРАВИЛО

$$\begin{array}{rrrrrr} x & + & y & - & z & = & -4 \\ 2x & + & y & & & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 6 \end{array}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -4, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 6.$$

Решење 3. КРАМЕРОВО ПРАВИЛО

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -4, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 6.$$

$\Delta = 2 \neq 0 \Rightarrow$ систем има јединствено решење:

Решење 3. КРАМЕРОВО ПРАВИЛО

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -4, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 6.$$

$\Delta = 2 \neq 0 \Rightarrow$ систем има јединствено решење:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -2 \text{ и } z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = 3. \quad \blacksquare$$

Решење 4. КРОНЕКЕР-КАПЕЛИЈЕВА Т.

Гаусов систем елиминације са матричним записом.

Решење 4. КРОНЕКЕР-КАПЕЛИЈЕВА Т.

Гаусов систем елиминације са матричним записом.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \text{II} - 2 \cdot \text{I} \\ \text{III} - \text{I} \end{array} \sim$$

Решење 4. КРОНЕКЕР-КАПЕЛИЈЕВА Т.

Гаусов систем елиминације са матричним записом.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \text{II} - 2 \cdot \text{I} \\ \text{III} - \text{I} \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & -2 & 2 & 10 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ \text{III} - 2 \cdot \text{II} \end{array} \sim$$

Решење 4. КРОНЕКЕР-КАПЕЛИЈЕВА Т.

Гаусов систем елиминације са матричним записом.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \text{II} - 2 \cdot \text{I} \sim \\ \text{III} - \text{I} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & -2 & 2 & 10 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ \text{III} - 2 \cdot \text{II} \sim \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array} \right]$$

Проширеној матрици система

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array} \right]$$

одговара систем

$$\begin{array}{rclclcl} x & + & y & - & z & = & -4 \\ & - & y & + & 2z & = & 8 \\ & & & - & 2z & = & -6 \end{array}$$

Проширеној матрици система

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array} \right]$$

одговара систем

$$\begin{array}{rclclcl} x & + & y & - & z & = & -4 \\ & & - & y & + & 2z & = & 8 \\ & & & & - & 2z & = & -6 \end{array}$$

$$r(A) = r(B) = 3 \text{ (број променљивих)}$$

\Rightarrow решење је јединствено.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array} \right] \quad \text{III} : (-2) \quad \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array} \right] \quad \text{III} : (-2) \quad \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \text{I} + \text{III} \\ \text{II} - 2 \cdot \text{III} \end{array} \quad \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \\ \\ \text{III} : (-2) \end{array} \quad \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \text{I} + \text{III} \\ \text{II} - 2 \cdot \text{III} \\ \end{array} \quad \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \text{I} + \text{II} \\ (-1) \cdot \text{II} \\ \end{array} \quad \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

Матрица $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$ је еквивалентна са

$$x = 1, \quad y = -2, \quad z = 3,$$

што је решење система.



1.

Испитати сагласност и решити систем

$$\begin{array}{rclclcl} x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 3x & + & 3y & + & z & = & 2. \end{array}$$

Решение 1. ПОМОЩЬ ДЕТЕРМИНАНТИ

$$\begin{array}{rrcrcl} x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 3x & + & 3y & + & z & = & 2 \end{array}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

Решење 1. ПОМОЋУ ДЕТЕРМИНАНТИ

$$\begin{array}{rrcrcl} x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 3x & + & 3y & + & z & = & 2 \end{array}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$\Delta = 0$ и $\Delta_x = 5 \neq 0 \Rightarrow$ систем нема решења.



Решење 2. ГАУСОВ СИСТЕМ. ЕЛИМИНАЦИЈЕ

$$x - y + 3z = 1$$

$$x + 2y - z = 1 \quad \text{II} - \text{I}$$

$$3x + 3y + z = 2 \quad \text{III} - 3 \cdot \text{I}$$

Решење 2. ГАУСОВ СИСТЕМ. ЕЛИМИНАЦИЈЕ

$$\begin{array}{rrcrcl} x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & 2y & - & z & = & 1 & \text{II} - \text{I} \\ 3x & + & 3y & + & z & = & 2 & \text{III} - 3 \cdot \text{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcrcl} x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ & & 3y & - & 4z & = & 0 \\ & & 6y & - & 8z & = & -1 & \text{III} - 2 \cdot \text{II} \end{array}$$

Решење 2. ГАУСОВ СИСТЕМ. ЕЛИМИНАЦИЈЕ

$$\begin{array}{rrcrcl} x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & 2y & - & z & = & 1 & \text{II} - \text{I} \\ 3x & + & 3y & + & z & = & 2 & \text{III} - 3 \cdot \text{I} \end{array}$$


$$\begin{array}{rrcrcl} x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ & & 3y & - & 4z & = & 0 \\ & & 6y & - & 8z & = & -1 & \text{III} - 2 \cdot \text{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcrcl} x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ & & 3y & - & 4z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & -1 \end{array}$$

Решење 2. ГАУСОВ СИСТЕМ. ЕЛИМИНАЦИЈЕ

$$\begin{array}{rrcrcl} x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & 2y & - & z & = & 1 & \text{II} - \text{I} \\ 3x & + & 3y & + & z & = & 2 & \text{III} - 3 \cdot \text{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcrcl} x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ & & 3y & - & 4z & = & 0 \\ & & 6y & - & 8z & = & -1 & \text{III} - 2 \cdot \text{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcrcl} x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ & & 3y & - & 4z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & -1 \end{array}$$


Систем нема решења.



2.

Испитати сагласност и решити систем

$$\begin{array}{rclclcl} x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 3x & + & 3y & + & z & = & 3. \end{array}$$

Решење. Како је

$$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$$

систем МОРАМО решавати Гаусовим
системом елиминације.

$$\begin{array}{rclclcl}
 x & - & y & + & 3z & = & 1 \\
 x & + & 2y & - & z & = & 1 & \text{II} - \text{I} \\
 3x & + & 3y & + & z & = & 3 & \text{III} - 3 \cdot \text{I}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclclcl}
 x & - & y & + & 3z & = & 1 \\
 x & + & 2y & - & z & = & 1 & \text{II} - \text{I} \\
 3x & + & 3y & + & z & = & 3 & \text{III} - 3 \cdot \text{I}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclclcl}
 x & - & y & + & 3z & = & 1 \\
 & & 3y & - & 4z & = & 0 \\
 & & 6y & - & 8z & = & 0 & \text{III} - 2 \cdot \text{II}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclclcl}
 x & - & y & + & 3z & = & 1 \\
 x & + & 2y & - & z & = & 1 & \text{II} - \text{I} \\
 3x & + & 3y & + & z & = & 3 & \text{III} - 3 \cdot \text{I}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclclcl}
 x & - & y & + & 3z & = & 1 \\
 & & 3y & - & 4z & = & 0 \\
 & & 6y & - & 8z & = & 0 & \text{III} - 2 \cdot \text{II}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclclcl}
 x & - & y & + & 3z & = & 1 \\
 & & 3y & - & 4z & = & 0 \\
 & & & & 0 & = & 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcrcl}
 x & - & y & + & 3z & = & 1 \\
 x & + & 2y & - & z & = & 1 & \text{II} - \text{I} \\
 3x & + & 3y & + & z & = & 3 & \text{III} - 3 \cdot \text{I}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcrcl}
 x & - & y & + & 3z & = & 1 \\
 & & 3y & - & 4z & = & 0 \\
 & & 6y & - & 8z & = & 0 & \text{III} - 2 \cdot \text{II}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcrcl}
 x & - & y & + & 3z & = & 1 \\
 & & 3y & - & 4z & = & 0 \\
 & & & & 0 & = & 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcrcl}
 x & - & y & + & 3z & = & 1 \\
 & & 3y & - & 4z & = & 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclclcl}
 x & - & y & + & 3z & = & 1 \\
 x & + & 2y & - & z & = & 1 & \text{II} - \text{I} \\
 3x & + & 3y & + & z & = & 3 & \text{III} - 3 \cdot \text{I}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclclcl}
 x & - & y & + & 3z & = & 1 \\
 & & 3y & - & 4z & = & 0 \\
 & & 6y & - & 8z & = & 0 & \text{III} - 2 \cdot \text{II}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclclcl}
 x & - & y & + & 3z & = & 1 \\
 & & 3y & - & 4z & = & 0 \\
 & & & & \cancel{0} & = & \cancel{0}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclclcl}
 x & - & y & + & 3z & = & 1 \\
 & & 3y & - & 4z & = & 0
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}x - y + 3z &= 1 \\ 3y - 4z &= 0\end{aligned}$$

x и y везане променљиве

z слободна променљива

$$\begin{aligned}x - y + 3z &= 1 \\ 3y - 4z &= 0\end{aligned}$$

x и y везане променљиве

z слободна променљива:

$$z = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} x - y + 3z &= 1 \\ 3y - 4z &= 0 \end{aligned}$$

x и y везане променљиве

z слободна променљива:

$$z = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Из II:

$$3y - 4\alpha = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{3} \alpha.$$

$$\begin{array}{rccccccc} x & & - & y & + & 3z & = & 1 \\ & & & 3y & - & 4z & = & 0 \end{array}$$

$$z = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

ИЗ II:

$$3y - 4\alpha = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{3} \alpha.$$

ИЗ I:

$$x - \frac{4}{3}\alpha + 3\alpha = 1 \Rightarrow x = 1 - \frac{5}{3}\alpha.$$

Из II:

$$3y - 4\alpha = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{3} \alpha.$$

Из I:

$$x - \frac{4}{3}\alpha + 3\alpha = 1 \Rightarrow x = 1 - \frac{5}{3} \alpha.$$

ЗАКЉУЧАК:

Систем има вишеструко решење које зависи од 1 параметра:

$$(x, y, z) = \left(1 - \frac{5}{3} \alpha, \frac{4}{3} \alpha, \alpha \right), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$



Напомена. Како је α произвољан реалан број,
могли смо узети

$$z = 3t, \quad t \in \mathbb{R}$$

и добили би ”лепше” решење

$$(x, y, z) = (1 - 5t, 4t, 3t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

3. Испитати сагласност и решити систем

$$\begin{array}{rcccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 2 \\ x & + & y & + & z & = & 3. \end{array}$$

Решење. Како је

$$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$$

систем МОРАМО решавати Гаусовим
системом елиминације.

$$x + y + z = 1$$

$$x + y + z = 2 \quad \text{II} - \text{I}$$

$$x + y + z = 3 \quad \text{III} - \text{I}$$

$$x + y + z = 1$$

$$x + y + z = 2 \quad \text{II} - \text{I}$$

$$x + y + z = 3 \quad \text{III} - \text{I}$$


$$x + y + z = 1$$

$$0 = 1$$

$$0 = 2$$

$$\begin{array}{rclclcl}
 x & + & y & + & z & = & 1 \\
 x & + & y & + & z & = & 2 & \text{II} - \text{I} \\
 x & + & y & + & z & = & 3 & \text{III} - \text{I}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclclcl}
 x & + & y & + & z & = & 1 \\
 & & & & 0 & = & 1 \\
 & & & & 0 & = & 2
 \end{array}$$



ЗАКЉУЧАК:

Систем нема решења.



4.

У зависности од $a \in \mathbb{R}$ одредити
фундаментални систем решења
и опште решење система

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 5z + au &= 0 \\ 6x - ay + 4z + 3u &= 0 \\ 9x - 6y + 3z + 2u &= 0. \end{aligned}$$

Решење.

Систем има 3 једначине и 4 непознате

Решење.

Систем има 3 једначине и 4 непознате

\Rightarrow НЕ МОЖЕ преко детерминанти,

Решење.

Систем има 3 једначине и 4 непознате

⇒ НЕ МОЖЕ преко детерминанти,

⇒ НЕ МОЖЕ матричном методом,

Решење.

Систем има 3 једначине и 4 непознате

⇒ НЕ МОЖЕ преко детерминанти,

⇒ НЕ МОЖЕ матричном методом,

⇒ МОРА Гаусовим системом елиминације
(Кронекер-Капели = Гаусов систем елим.)!

$$3x - 2y + 5z + au = 0$$

$$6x - ay + 4z + 3u = 0$$

$$9x - 6y + 3z + 2u = 0$$

II $- 2 \cdot$ I

III $- 3 \cdot$ I

$$\begin{array}{rclclcl}
 3x & - & 2y & + & 5z & + & au & = & 0 \\
 6x & - & ay & + & 4z & + & 3u & = & 0 & \text{II} - 2 \cdot \text{I} \\
 9x & - & 6y & + & 3z & + & 2u & = & 0 & \text{III} - 3 \cdot \text{I}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclclcl}
 3x & - & & 2y & + & 5z & + & au & = & 0 \\
 & & (4 - a)y & - & 6z & + & (3 - 2a)u & = & 0 \\
 & & & - & 12z & + & (2 - 3a)u & = & 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclclcl}
 3x & - & 2y & + & 5z & + & au & = & 0 \\
 6x & - & ay & + & 4z & + & 3u & = & 0 & \text{II} - 2 \cdot \text{I} \\
 9x & - & 6y & + & 3z & + & 2u & = & 0 & \text{III} - 3 \cdot \text{I}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclclcl}
 3x & - & & 2y & + & 5z & + & & au & = & 0 \\
 & & \boxed{(4-a)} & y & - & 6z & + & (3-2a)u & = & 0 \\
 & & & & - & 12z & + & (2-3a)u & = & 0
 \end{array}$$

2 случаја:

$$\mathbf{1^\circ} \quad a \neq 4 \quad \text{и} \quad \mathbf{2^\circ} \quad a = 4$$

1° За $a \neq 4$:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 5z + au &= 0 \\ (4 - a)y - 6z + (3 - 2a)u &= 0 \\ -12z + (2 - 3a)u &= 0 \end{aligned}$$

Систем у степенастом облику

1° За $a \neq 4$:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 5z + au &= 0 \\ (4 - a)y - 6z + (3 - 2a)u &= 0 \\ -12z + (2 - 3a)u &= 0 \end{aligned}$$

Систем у степенастом облику

x , y и z везане

u слободна променљива:

$$u = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{array}{rclclcl}
 3x & - & 2y & + & 5z & + & au & = & 0 \\
 & & (4-a)y & - & 6z & + & (3-2a)u & = & 0 \\
 & & & - & 12z & + & (2-3a)u & = & 0
 \end{array}$$

$$u = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Враћањем уназад добијамо:

$$z = \frac{2-3a}{12} t$$

$$\begin{array}{rclclcl}
 3x & - & 2y & + & 5z & + & au & = & 0 \\
 & & (4-a)y & - & 6z & + & (3-2a)u & = & 0 \\
 & & & - & 12z & + & (2-3a)u & = & 0
 \end{array}$$

$$u = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Враћањем уназад добијамо:

$$z = \frac{2-3a}{12} t$$

$$y = \frac{1}{2} t$$

$$\begin{array}{rclclcl}
 3x & - & 2y & + & 5z & + & au & = & 0 \\
 & & (4-a)y & - & 6z & + & (3-2a)u & = & 0 \\
 & & & - & 12z & + & (2-3a)u & = & 0
 \end{array}$$

$$u = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Враћањем уназад добијамо:

$$z = \frac{2-3a}{12} t$$

$$y = \frac{1}{2} t$$

$$x = \frac{3a-22}{36} t.$$

Враћањем уназад добијамо:

$$z = \frac{2 - 3a}{12} t$$

$$y = \frac{1}{2} t$$

$$x = \frac{3a - 22}{36} t.$$

$$(x, y, z, u) = \left(\frac{3a - 22}{36} t, \frac{1}{2} t, \frac{2 - 3a}{12} t, t \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$(x, y, z, u) = \left(\frac{3a - 22}{36} t, \frac{1}{2} t, \frac{2 - 3a}{12} t, t \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$(x, y, z, u) = t \cdot \left(\frac{3a - 22}{36}, \frac{1}{2}, \frac{2 - 3a}{12}, 1 \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$(x, y, z, u) = \left(\frac{3a - 22}{36} t, \frac{1}{2} t, \frac{2 - 3a}{12} t, t \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$(x, y, z, u) = t \cdot \left(\frac{3a - 22}{36}, \frac{1}{2}, \frac{2 - 3a}{12}, 1 \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Вектор $X_1 = \left(\frac{3a-22}{36}, \frac{1}{2}, \frac{2-3a}{12}, 1 \right)$ је
фундаментално решење система.

2° За $a = 4$ систем се своди на:

$$3x - 2y + 5z + 4u = 0$$

$$- 6z - 5u = 0$$

$$- 12z - 10u = 0 \quad \text{III} - 2 \cdot \text{II}$$

2° За $a = 4$ систем се своди на:

$$\begin{array}{cccccccl} 3x & - & 2y & + & 5z & + & 4u & = & 0 \\ & & & & - & 6z & - & 5u & = & 0 \\ & & & & - & 12z & - & 10u & = & 0 \end{array} \quad \text{III} - 2 \cdot \text{II}$$

$$\begin{array}{cccccccl} 3x & - & 2y & + & 5z & + & 4u & = & 0 \\ & & & & - & 6z & - & 5u & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

2° За $a = 4$ систем се своди на:

$$\begin{array}{cccccccl} 3x & - & 2y & + & 5z & + & 4u & = & 0 \\ & & & & - & 6z & - & 5u & = & 0 \\ & & & & - & 12z & - & 10u & = & 0 & \text{III} - 2 \cdot \text{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccl} 3x & - & 2y & + & 5z & + & 4u & = & 0 \\ & & & & - & 6z & - & 5u & = & 0 \\ & & & & & & \cancel{0} & = & \cancel{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccl} 3x & - & 2y & + & 5z & + & 4u & = & 0 \\ & & & & - & 6z & - & 5u & = & 0 \end{array}$$

2° За $a = 4$ систем се своди на:

$$\begin{array}{cccccccl} 3x & - & 2y & + & 5z & + & 4u & = & 0 \\ & & & & - & 6z & - & 5u & = & 0 \\ & & & & - & 12z & - & 10u & = & 0 \end{array} \quad \text{III} - 2 \cdot \text{II}$$

$$\begin{array}{cccccccl} 3x & - & 2y & + & 5z & + & 4u & = & 0 \\ & & & & - & 6z & - & 5u & = & 0 \\ & & & & & & \cancel{0} & = & \cancel{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccl} 3x & - & 2y & + & 5z & + & 4u & = & 0 \\ & & & & - & 6z & - & 5u & = & 0 \end{array}$$

Систем у степенастом облику

$$\begin{array}{ccccccccc} 3x & - & 2y & + & 5z & + & 4u & = & 0 \\ & & & & - & 6z & - & 5u & = & 0 \end{array}$$

Систем у степенастом облику

x и z везане

y и u слободне променљиве:

$$y = t, \quad u = p, \quad t, p \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 3x & - & 2y & + & 5z & + & 4u & = & 0 \\ & & & & - & 6z & - & 5u & = & 0 \end{array}$$

$$y = t, \quad u = p, \quad t, p \in \mathbb{R}.$$

Враћањем уназад добијамо:

$$z = -\frac{5}{6}p$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 3x & - & 2y & + & 5z & + & 4u & = & 0 \\ & & & & - & 6z & - & 5u & = & 0 \end{array}$$

$$y = t, \quad u = p, \quad t, p \in \mathbb{R}.$$

Враћањем уназад добијамо:

$$z = -\frac{5}{6}p$$

$$x = \frac{2}{3}t + \frac{1}{18}p.$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 3x & - & 2y & + & 5z & + & 4u & = & 0 \\ & & & & - & 6z & - & 5u & = & 0 \end{array}$$

$$y = t, \quad u = p, \quad t, p \in \mathbb{R}.$$

Враћањем уназад добијамо:

$$z = -\frac{5}{6} p$$

$$x = \frac{2}{3} t + \frac{1}{18} p.$$

$$(x, y, z, u) = \left(\frac{2}{3} t + \frac{1}{18} p, t, -\frac{5}{6} p, p \right), \quad t, p \in \mathbb{R}.$$

$$(x, y, z, u) = \left(\frac{2}{3} t + \frac{1}{18} p, t, -\frac{5}{6} p, p \right), \quad t, p \in \mathbb{R}.$$

$$(x, y, z, u) = \left(\frac{2}{3} t, t, 0, 0 \right) + \left(\frac{1}{18} p, 0, -\frac{5}{6} p, p \right), \quad t, p \in \mathbb{R}.$$

$$(x, y, z, u) = \left(\frac{2}{3} t + \frac{1}{18} p, t, -\frac{5}{6} p, p \right), \quad t, p \in \mathbb{R}.$$

$$(x, y, z, u) = \left(\frac{2}{3} t, t, 0, 0 \right) + \left(\frac{1}{18} p, 0, -\frac{5}{6} p, p \right), \quad t, p \in \mathbb{R}.$$

$$(x, y, z, u) = t \cdot \left(\frac{2}{3}, 1, 0, 0 \right) + p \cdot \left(\frac{1}{18}, 0, -\frac{5}{6}, 1 \right), \quad t, p \in \mathbb{R}.$$

$$(x, y, z, u) = \left(\frac{2}{3} t + \frac{1}{18} p, t, -\frac{5}{6} p, p \right), \quad t, p \in \mathbb{R}.$$

$$(x, y, z, u) = \left(\frac{2}{3} t, t, 0, 0 \right) + \left(\frac{1}{18} p, 0, -\frac{5}{6} p, p \right), \quad t, p \in \mathbb{R}.$$

$$(x, y, z, u) = t \cdot \left(\frac{2}{3}, 1, 0, 0 \right) + p \cdot \left(\frac{1}{18}, 0, -\frac{5}{6}, 1 \right), \quad t, p \in \mathbb{R}.$$

$$X_1 = \left(\frac{2}{3}, 1, 0, 0 \right) \quad \text{и} \quad X_2 = \left(\frac{1}{18}, 0, -\frac{5}{6}, 1 \right)$$

су фундаментална решења система.

ЗАКЉУЧАК:

1° За $a \neq 4$ има 1 фунд. решење

$$X_1 = \left(\frac{3a - 22}{36}, \frac{1}{2}, \frac{2 - 3a}{12}, 1 \right)$$

које одређује опште решење

$$(x, y, z, u) = t \cdot X_1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

ЗАКЉУЧАК:

1° За $a \neq 4$ има 1 фунд. решење

$$X_1 = \left(\frac{3a - 22}{36}, \frac{1}{2}, \frac{2 - 3a}{12}, 1 \right)$$

које одређује опште решење

$$(x, y, z, u) = t \cdot X_1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2° За $a = 4$ има 2 фунд. решења

$$X_1 = \left(\frac{2}{3}, 1, 0, 0 \right) \quad \text{и} \quad X_2 = \left(\frac{1}{18}, 0, -\frac{5}{6}, 1 \right)$$

која одређују опште решење

$$(x, y, z, u) = t \cdot X_1 + p \cdot X_2, \quad t, p \in \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

5.

У зависности од $a, b \in \mathbb{R}$ решити систем

$$\begin{array}{rcccccc} 2x & - & y & + & 3z & = & 2 \\ x & + & 2y & + & z & = & -1 \\ 4x & + & 3y & + & az & = & 0 \\ x & - & 3y & + & bz & = & a - 2. \end{array}$$

Решение.

$$\begin{array}{rcccccc} 2x & - & y & + & 3z & = & 2 \\ x & + & 2y & + & z & = & -1 \\ 4x & + & 3y & + & az & = & 0 \\ x & - & 3y & + & bz & = & a - 2 \end{array}$$



Решение.

$$\begin{array}{rrcrcl} 2x & - & y & + & 3z & = & 2 \\ x & + & 2y & + & z & = & -1 \\ 4x & + & 3y & + & az & = & 0 \\ x & - & 3y & + & bz & = & a - 2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \curvearrowleft \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & -1 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 2 & \text{II} - 2 \cdot \text{I} \\ 4x & + & 3y & + & az & = & 0 & \text{III} - 4 \cdot \text{I} \\ x & - & 3y & + & bz & = & a - 2 & \text{IV} - \text{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl}
 x & + & 2y & + & z & = & -1 \\
 2x & - & y & + & 3z & = & 2 & \text{II} - 2 \cdot \text{I} \\
 4x & + & 3y & + & az & = & 0 & \text{III} - 4 \cdot \text{I} \\
 x & - & 3y & + & bz & = & a - 2 & \text{IV} - \text{I}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl}
 x & + & 2y & + & z & = & -1 \\
 & - & 5y & + & z & = & 4 \\
 & - & 5y & + & (a - 4)z & = & 4 & \text{III} - \text{II} \\
 & - & 5y & + & (b - 1)z & = & a - 1 & \text{IV} - \text{II}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclclcl}
 x & + & 2y & + & z & = & -1 \\
 2x & - & y & + & 3z & = & 2 & \text{II} - 2 \cdot \text{I} \\
 4x & + & 3y & + & az & = & 0 & \text{III} - 4 \cdot \text{I} \\
 x & - & 3y & + & bz & = & a - 2 & \text{IV} - \text{I}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclclcl}
 x & + & 2y & + & z & = & -1 \\
 & - & 5y & + & z & = & 4 \\
 & - & 5y & + & (a - 4)z & = & 4 & \text{III} - \text{II} \\
 & - & 5y & + & (b - 1)z & = & a - 1 & \text{IV} - \text{II}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclclcl}
 x & + & 2y & + & z & = & -1 \\
 & - & 5y & + & z & = & 4 \\
 & & & & (a - 5)z & = & 0 \\
 & & & & (b - 2)z & = & a - 5
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & & z & = & -1 \\ & - & 5y & + & & z & = & 4 \end{array}$$

$$(a - 5) z = 0$$

$$(b - 2) z = (a - 5)$$

Имамо 3 случаја:

1° $a \neq 5$ **2°** $a = 5, b \neq 2$ **3°** $a = 5, b = 2$.

1° 3a $a \neq 5$:

$$x + 2y + z = -1$$

$$- 5y + z = 4$$

$$(a - 5)z = 0$$

$$(b - 2)z = a - 5 \quad \text{IV} - \frac{b-2}{a-5} \cdot \text{III}$$

1° 3a $a \neq 5$:

$$\begin{array}{rclcl} x & + & 2y & + & z & = & -1 \\ & - & 5y & + & z & = & 4 \\ & & & & (a-5)z & = & 0 \\ & & & & (b-2)z & = & a-5 \quad \text{IV} - \frac{b-2}{a-5} \cdot \text{III} \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl} x & + & 2y & + & z & = & -1 \\ & - & 5y & + & z & = & 4 \\ & & & & (a-5)z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & a-5 \end{array}$$

1° За $a \neq 5$:

$$\begin{array}{rclcl} x & + & 2y & + & z & = & -1 \\ & - & 5y & + & z & = & 4 \\ & & & & (a-5)z & = & 0 \\ & & & & (b-2)z & = & a-5 \quad \text{IV} - \frac{b-2}{a-5} \cdot \text{III} \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl} x & + & 2y & + & z & = & -1 \\ & - & 5y & + & z & = & 4 \\ & & & & (a-5)z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & a-5 \end{array} \quad \downarrow$$

Систем нема решења.

2° За $a = 5$ и $b \neq 2$:

$$x + 2y + z = -1$$

$$-5y + z = 4$$

$$0 = 0$$

$$(b - 2)z = 0$$

2° За $a = 5$ и $b \neq 2$:

$$\begin{array}{rclclcl} x & + & 2y & + & z & = & -1 \\ & & -5y & + & z & = & 4 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & (b-2)z & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclclcl} x & + & 2y & + & z & = & -1 \\ & & -5y & + & z & = & 4 \\ & & & & (b-2)z & = & 0 \end{array}$$

2° За $a = 5$ и $b \neq 2$:

$$\begin{array}{rccccccc} x & + & 2y & + & & z & = & -1 \\ & & - & 5y & + & z & = & 4 \\ & & & & & \cancel{0} & - & \cancel{0} \\ & & & & & (b-2)z & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccccc} x & + & 2y & + & & z & = & -1 \\ & & - & 5y & + & z & = & 4 \\ & & & & & (b-2)z & = & 0 \end{array}$$

Систем у степенастом облику

x , y и z везане променљиве

\Rightarrow систем има јединствено решење.

$$\begin{array}{rcccccccl}
 x & + & 2y & + & & z & = & -1 \\
 & & - & 5y & + & & z & = & 4 \\
 & & & & & (b-2)z & = & 0
 \end{array}$$

Враћањем уназад добијамо:

$$z = \frac{0}{b-2} = 0$$

$$\begin{array}{rclclcl}
 x & + & 2y & + & z & = & -1 \\
 & - & 5y & + & z & = & 4 \\
 & & & & (b-2)z & = & 0
 \end{array}$$

Враћањем уназад добијамо:

$$z = \frac{0}{b-2} = 0$$

$$y = -\frac{4}{5}$$

$$\begin{array}{rclclcl}
 x & + & 2y & + & z & = & -1 \\
 & - & 5y & + & z & = & 4 \\
 & & & & (b-2)z & = & 0
 \end{array}$$

Враћањем уназад добијамо:

$$z = \frac{0}{b-2} = 0$$

$$y = -\frac{4}{5}$$

$$x = \frac{3}{5}.$$

3° За $a = 5$ и $b = 2$:

$$\begin{array}{rcccccc} x & + & 2y & + & z & = & -1 \\ & - & 5y & + & z & = & 4 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

3° За $a = 5$ и $b = 2$:

$$x + 2y + z = -1$$

$$- 5y + z = 4$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$x + 2y + z = -1$$

$$- 5y + z = 4$$

3° За $a = 5$ и $b = 2$:

$$x + 2y + z = -1$$

$$- 5y + z = 4$$

~~$$0 = 0$$~~

~~$$0 = 0$$~~

$$x + 2y + z = -1$$

$$- 5y + z = 4$$

Систем у степенастом облику

x и y везане

z слободна:

$$z = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{array}{rccccccccc} x & + & 2y & + & z & = & -1 \\ & - & 5y & + & z & = & 4 \end{array}$$

$$z = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Враћањем уназад добијамо:

$$y = -\frac{4}{5} + \frac{1}{5}t$$

$$\begin{array}{rccccccccc} x & + & 2y & + & z & = & -1 \\ & - & 5y & + & z & = & 4 \end{array}$$

$$z = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Враћањем уназад добијамо:

$$y = -\frac{4}{5} + \frac{1}{5} t$$

$$x = \frac{3}{5} - \frac{7}{5} t.$$

ЗАКЉУЧАК:

1° За $a \neq 5$ систем нема решења.

ЗАКЉУЧАК:

1° За $a \neq 5$ систем нема решења.

2° За $a = 5$ и $b \neq 2$, систем има јединствено решење $(x, y, z) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 0\right)$.

ЗАКЉУЧАК:

1° За $a \neq 5$ систем нема решења.

2° За $a = 5$ и $b \neq 2$, систем има јединствено решење $(x, y, z) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 0\right)$.

3° За $a = 5$ и $b = 2$ систем има вишеструко решење које зависи од једног параметра $(x, y, z) = \left(\frac{3}{5} - \frac{7}{5}t, -\frac{4}{5} + \frac{1}{5}t, t\right), t \in \mathbb{R}$. ■

6. У зависимости од $a \in \mathbb{R}$ решить систем

$$\begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= a \\ x + y + az &= a^2. \end{aligned}$$

Решење. Ово је систем 3×3 па решавамо преко детерминанти

$$\begin{array}{ccccccc} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & a \\ x & + & y & + & az & = & a^2 \end{array}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2$$

Решење. Ово је систем 3×3 па решавамо преко детерминанти

$$\begin{array}{ccccccc} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & a \\ x & + & y & + & az & = & a^2 \end{array}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2$$

Али би ово требало факторисати!

Δ рачунамо преко особина дет.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{II}-\text{I} \\ \text{III}-\text{I} \end{matrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1-a & a-1 & 0 \\ 1-a & 0 & a-1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{II}-\text{I} \\ \text{III}-\text{I} \end{matrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1-a & a-1 & 0 \\ 1-a & 0 & a-1 \end{vmatrix}$$

$$= (a-1) \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1-a & 0 & a-1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{II}-\text{I} \\ \text{III}-\text{I} \end{matrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1-a & a-1 & 0 \\ 1-a & 0 & a-1 \end{vmatrix}$$

$$= (a-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{II}-\text{I} \\ \text{III}-\text{I} \end{matrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1-a & a-1 & 0 \\ 1-a & 0 & a-1 \end{vmatrix}$$

$$= (a-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \text{I}+\text{II}+\text{III} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{II}-\text{I} \\ \text{III}-\text{I} \end{matrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1-a & a-1 & 0 \\ 1-a & 0 & a-1 \end{vmatrix} \\
 &= (a-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \text{I}+\text{II}+\text{III} \end{matrix} = (a-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{II}-\text{I} \\ \text{III}-\text{I} \end{array} = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1-a & a-1 & 0 \\ 1-a & 0 & a-1 \end{vmatrix} \\
 &= (a-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \text{I}+\text{II}+\text{III} \end{array} = (a-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= (a-1)^2 \cdot (a+2) \cdot 1 \cdot 1 = (a-1)^2(a+2).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta &= \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{II}-\text{I} \\ \text{III}-\text{I} \end{matrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1-a & a-1 & 0 \\ 1-a & 0 & a-1 \end{vmatrix} \\
&= (a-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \text{I}+\text{II}+\text{III} \end{matrix} = (a-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (a-1)^2 \cdot (a+2) \cdot 1 \cdot 1 = (a-1)^2(a+2).
\end{aligned}$$

Имамо 3 случаја:

$$\mathbf{1^\circ} \quad a \neq 1, -2 \qquad \mathbf{2^\circ} \quad a = -2 \qquad \mathbf{3^\circ} \quad a = 1.$$

За 1° $a \neq 1, -2$ је $\Delta \neq 0 \Rightarrow$ сис. има јед. реш.

За **1°** $a \neq 1, -2$ је $\Delta \neq 0 \Rightarrow$ сис. има јед. реш.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & 1 \\ a^2 & 1 & a \end{vmatrix} = -(a-1)^2(a+1),$$

За **1°** $a \neq 1, -2$ је $\Delta \neq 0 \Rightarrow$ сис. има јед. реш.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & 1 \\ a^2 & 1 & a \end{vmatrix} = -(a-1)^2(a+1),$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & a^2 & a \end{vmatrix} = (a-1)^2,$$

За **1°** $a \neq 1, -2$ је $\Delta \neq 0 \Rightarrow$ сис. има јед. реш.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & 1 \\ a^2 & 1 & a \end{vmatrix} = -(a-1)^2(a+1),$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & a^2 & a \end{vmatrix} = (a-1)^2,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a^2 \end{vmatrix} = (a-1)^2(a+1)^2.$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & 1 \\ a^2 & 1 & a \end{vmatrix} = -(a-1)^2(a+1),$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-(a-1)^2(a+1)}{(a-1)^2(a+2)} = -\frac{a+1}{a+2}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & a^2 & a \end{vmatrix} = (a-1)^2,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a^2 \end{vmatrix} = (a-1)^2(a+1)^2.$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & 1 \\ a^2 & 1 & a \end{vmatrix} = -(a-1)^2(a+1),$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-(a-1)^2(a+1)}{(a-1)^2(a+2)} = -\frac{a+1}{a+2}.$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & a^2 & a \end{vmatrix} = (a-1)^2,$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{(a-1)^2}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{1}{a+2}.$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a^2 \end{vmatrix} = (a-1)^2(a+1)^2.$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & 1 \\ a^2 & 1 & a \end{vmatrix} = -(a-1)^2(a+1),$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & a^2 & a \end{vmatrix} = (a-1)^2,$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{(a-1)^2}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{1}{a+2}.$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a^2 \end{vmatrix} = (a-1)^2(a+1)^2,$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{(a-1)^2(a+1)^2}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{(a+1)^2}{a+2}.$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & 1 \\ a^2 & 1 & a \end{vmatrix} = -(a-1)^2(a+1),$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & a^2 & a \end{vmatrix} = (a-1)^2,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a^2 \end{vmatrix} = (a-1)^2(a+1)^2.$$

Систем има **јединствено решење**:

$$(x, y, z) = \left(-\frac{a+1}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{(a+1)^2}{a+2} \right).$$

За **2°** $a = -2$ је

$\Delta = 0$ и $\Delta_x = 9 \neq 0 \Rightarrow$ систем нема решења.

3a **3°** *a* = 1 je

$$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$$

???

3a **3°** $a = 1$ je

$$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0 \quad ???$$

$$x + y + z = 1$$

$$x + y + z = 1 \quad \text{II} - \text{I}$$

$$x + y + z = 1 \quad \text{III} - \text{I}$$

3a **3°** $a = 1$ je

$$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0 \quad ???$$

$$x + y + z = 1$$

$$x + y + z = 1 \quad \text{II} - \text{I}$$

$$x + y + z = 1 \quad \text{III} - \text{I}$$

$$x + y + z = 1$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

3a **3°** $a = 1$ je

$$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0 \quad ???$$

$$x + y + z = 1$$

$$x + y + z = 1 \quad \text{II} - \text{I}$$

$$x + y + z = 1 \quad \text{III} - \text{I}$$

$$x + y + z = 1$$

$$~~0 = 0~~$$

$$~~0 = 0~~$$

$$x + y + z = 1$$

$$x + y + z = 1$$

Систем у степенастом облику

x везана

y и z слободна:

$$y = \alpha, \quad z = \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

$$x + y + z = 1$$

Систем у степенастом облику

x везана

y и z слободна:

$$y = \alpha, \quad z = \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Из I:

$$x = 1 - \alpha - \beta$$

$$x + y + z = 1$$

Систем у степенастом облику

x везана

y и z слободна:

$$y = \alpha, \quad z = \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Из I:

$$x = 1 - \alpha - \beta$$

$$(x, y, z) = (1 - \alpha - \beta, \alpha, \beta), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

ЗАКЉУЧАК:

1° За $a \neq 1, -2$ систем има јединствено
решење $(x, y, z) = \left(-\frac{a+1}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{(a+1)^2}{a+2} \right)$.

ЗАКЉУЧАК:

- 1°** За $a \neq 1, -2$ систем има јединствено решење $(x, y, z) = \left(-\frac{a+1}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{(a+1)^2}{a+2}\right)$.
- 2°** За $a = -2$, систем нема решења.

ЗАКЉУЧАК:

1° За $a \neq 1, -2$ систем има јединствено решење $(x, y, z) = \left(-\frac{a+1}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{(a+1)^2}{a+2}\right)$.

2° За $a = -2$, систем нема решења.

3° За $a = 1$ систем има вишеструко решење које зависи од два параметра

$$(x, y, z) = (1 - \alpha - \beta, \alpha, \beta), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

КРАЈ ЧАСА