

VI двочас вежби  
мр Владимир Балтић

## 4. Аналитичка геометрија у простору

# Теоријски увод

Једначина равни  $\pi$  која пролази кроз тачку  $M(x_M, y_M, z_M)$  и нормална је на вектор  $\vec{n} = (a, b, c)$  гласи:

$$a(x - x_M) + b(y - y_M) + c(z - z_M) = 0$$

# Теоријски увод

Једначина равни  $\pi$  која пролази кроз тачку  $M(x_M, y_M, z_M)$  и нормална је на вектор  $\vec{n} = (a, b, c)$  гласи:

$$a(x - x_M) + b(y - y_M) + c(z - z_M) = 0$$

или

$$ax + by + cz + d = 0.$$

# Теоријски увод

Једначина равни  $\pi$  која пролази кроз тачку  $M(x_M, y_M, z_M)$  и нормална је на вектор  $\vec{n} = (a, b, c)$  гласи:

$$a(x - x_M) + b(y - y_M) + c(z - z_M) = 0$$

или

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Вектор  $\vec{n}_\pi = (a, b, c)$  је *вектор нормале* на раван  $\pi$ .

*Канонски облик* једначине равни је

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

где су  $a$ ,  $b$  и  $c$  одсечци које раван одсеца на координатним осама.

*Канонски облик* једначине равни је

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

где су  $a$ ,  $b$  и  $c$  одсечци које раван одсеца на координатним осама.

Једначина равни кроз три тачке  $A$ ,  $B$  и  $C$  је

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0.$$

Једначина равни кроз три тачке  $A$ ,  $B$  и  $C$  је

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0.$$

Једначине *снопа* равни које пролазе кроз праву у пресеку равни  $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$  и  $\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$  је

$$\mu(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \lambda(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0.$$

Једначине *снопа* равни које пролазе кроз праву у пресеку равни  $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$  и  $\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$  је

$$\mu(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \lambda(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0.$$

Користи се и

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 + \lambda(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0.$$



Једначине *снопа* равни које пролазе кроз праву у пресеку равни  $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$  и  $\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$  је

$$\mu(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \lambda(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0.$$

*Угао*  $\varphi$  између 2 равни са векторима нормала  $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$  и  $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$  је

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

Угао  $\varphi$  између 2 равни са векторима нормала  $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$  и  $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$  је

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

Услов паралелности 2 равни:  $\vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2$

$$a_1 = \lambda \cdot a_2, \quad b_1 = \lambda \cdot b_2, \quad c_1 = \lambda \cdot c_2 \quad (\lambda \neq 0)$$

Угао  $\varphi$  између 2 равни са векторима нормала  $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$  и  $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$  је

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

Услов паралелности 2 равни:  $\vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2$

$$a_1 = \lambda \cdot a_2, \quad b_1 = \lambda \cdot b_2, \quad c_1 = \lambda \cdot c_2 \quad (\lambda \neq 0)$$

и нормалности  $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$

$$a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2 = 0.$$

Услов паралелности 2 равни:  $\vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2$

$$a_1 = \lambda \cdot a_2, \quad b_1 = \lambda \cdot b_2, \quad c_1 = \lambda \cdot c_2 \quad (\lambda \neq 0)$$

и нормалности  $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$

$$a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2 = 0.$$

Растојање тачке  $T(x_T, y_T, z_T)$  од равни  $\pi : ax + by + cz + d = 0$  је

$$d(T, \pi) = \frac{|a \cdot x_T + b \cdot y_T + c \cdot z_T + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

*Канонски облик* једначине праве  $p$  је

$$\frac{x - x_P}{\ell} = \frac{y - y_P}{m} = \frac{z - z_P}{n}$$

*Канонски облик* једначине праве  $p$  је

$$\frac{x - x_P}{\ell} = \frac{y - y_P}{m} = \frac{z - z_P}{n} \quad (= t)$$

*Канонски облик* једначине праве  $p$  је

$$\frac{x - x_P}{\ell} = \frac{y - y_P}{m} = \frac{z - z_P}{n} \quad (= t)$$

Добијамо *параметарски облик*:

$$x = x_P + \ell t, \quad y = y_P + mt, \quad z = z_P + nt.$$

*Канонски облик* једначине праве  $p$  је

$$\frac{x - x_P}{\ell} = \frac{y - y_P}{m} = \frac{z - z_P}{n} \quad (= t)$$

Добијамо *параметарски облик*:

$$x = x_P + \ell t, \quad y = y_P + mt, \quad z = z_P + nt.$$

Права је одређена тачком  $P(x_P, y_P, z_P)$  и *вектором правца*  $\vec{v}_p = (\ell, m, n)$ .



Једначина праве која је дата пресеком две равни је:

$$p: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \end{cases}$$

Претходне облике (и из њих  $P$  и  $\vec{v}_p$ ) добијамо решавањем овог система.

Једначина праве која је дата пресеком две равни је:

$$p: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \end{cases}$$

Претходне облике (и из њих  $P$  и  $\vec{v}_p$ ) добијамо решавањем овог система.

Једначина праве кроз тачке  $A$  и  $B$  је

$$\frac{x - x_B}{x_A - x_B} = \frac{y - y_B}{y_A - y_B} = \frac{z - z_B}{z_A - z_B}.$$

Једначина праве кроз тачке  $A$  и  $B$  је

$$\frac{x - x_B}{x_A - x_B} = \frac{y - y_B}{y_A - y_B} = \frac{z - z_B}{z_A - z_B}.$$

Растојање тачке  $T$  од праве  $p$  је

$$d(T, p) = \frac{|\vec{v}_p \times \overrightarrow{TP}|}{|\vec{v}_p|}.$$

Праве

$$p_1 : \frac{x - x_1}{\ell_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$$

$$p_2 : \frac{x - x_2}{\ell_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$$

$p_1$  и  $p_2$  су паралелне ако је  $\vec{v}_{p_1} = \lambda \cdot \vec{v}_{p_2}$ .

Непаралелне праве  $p_1$  и  $p_2$  се секу ако

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (*)$$

Непаралелне праве  $p_1$  и  $p_2$  се секу акко

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (*)$$

Растојање између непаралелних права  $p_1$  и  $p_2$  је

$$d(p_1, p_2) = \frac{|\overrightarrow{P_2 P_1} \cdot (\vec{v}_{p_1} \times \vec{v}_{p_2})|}{|\vec{v}_{p_1} \times \vec{v}_{p_2}|}.$$

Растојање између непаралелних права  $p_1$  и  $p_2$  је

$$d(p_1, p_2) = \frac{|(\vec{v}_{p_1} \times \vec{v}_{p_2}) \cdot \overrightarrow{P_1 P_2}|}{|\vec{v}_{p_1} \times \vec{v}_{p_2}|}.$$

Угао  $\varphi$  између праве  $p$  и равни  $\pi$  (које се секу):

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{v}_p \cdot \vec{n}_\pi|}{|\vec{v}_p| \cdot |\vec{n}_\pi|}.$$

## ПОЛОЖАЈ 2 РАВНИ У ПРОСТОРУ

1°  $\pi_1$  и  $\pi_2$  паралелне

$$\vec{n}_{\pi_1} = \lambda \vec{n}_{\pi_2} \quad \text{и} \quad M_1 \notin \pi_2 \quad (\text{или} \quad M_2 \notin \pi_1),$$

2°  $\pi_1$  и  $\pi_2$  се поклапају

$$\vec{n}_{\pi_1} = \lambda \vec{n}_{\pi_2} \quad \text{и} \quad M_1 \in \pi_2 \quad (\text{или} \quad M_2 \in \pi_1),$$

3°  $\pi_1$  и  $\pi_2$  се секу (по правој)

$$\vec{n}_{\pi_1} \neq \lambda \vec{n}_{\pi_2}.$$

Кад се секу под правим углом

$$\vec{n}_{\pi_1} \perp \vec{n}_{\pi_2}, \quad \text{тј.} \quad \vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2} = 0.$$



# ПОЛОЖАЈ ПРАВЕ И РАВНИ

1°  $p$  и  $\pi$  паралелне

$$\vec{v}_p \perp \vec{n}_\pi, \text{ тј. } \vec{v}_p \cdot \vec{n}_\pi = 0 \quad \text{и} \quad P \notin \pi,$$

2° права  $p$  је у равни  $\pi$

$$\vec{v}_p \perp \vec{n}_\pi, \text{ тј. } \vec{v}_p \cdot \vec{n}_\pi = 0 \quad \text{и} \quad P \in \pi,$$

3°  $p$  и  $\pi$  се секу (у тачки)

$$\vec{v}_p \not\perp \vec{n}_\pi, \text{ тј. } \vec{v}_p \cdot \vec{n}_\pi \neq 0.$$

Кад се секу под правим углом

$$\vec{v}_p = \lambda \vec{n}_\pi, \text{ тј. } \vec{v}_p \times \vec{n}_\pi = \vec{0}.$$

## ПОЛОЖАЈ 2 ПРАВЕ У ПРОСТОРУ

1°  $p_1$  и  $p_2$  паралелне

$$\vec{v}_{p_1} = \lambda \vec{v}_{p_2} \quad \text{и} \quad P_1 \notin p_2 \quad (\text{или} \quad P_2 \notin p_1),$$

2°  $p_1$  и  $p_2$  се поклапају

$$\vec{v}_{p_1} = \lambda \vec{v}_{p_2} \quad \text{и} \quad P_1 \in p_2 \quad (\text{или} \quad P_2 \in p_1),$$

3°  $p_1$  и  $p_2$  се секу (у тачки)

$$\vec{v}_{p_1} \neq \lambda \vec{v}_{p_2} \quad \text{и} \quad \left| \begin{array}{c} \vec{v}_{p_1} \\ \vec{v}_{p_2} \end{array} \right| = 0 \quad (*)$$

3°  $p_1$  и  $p_2$  се секу (у тачки)

$$\vec{v}_{p_1} \neq \lambda \vec{v}_{p_2} \quad \text{и} \quad \left| \begin{vmatrix} \vec{v}_{p_1} & \vec{v}_{p_2} \end{vmatrix} \right| = 0 \quad (*)$$

Кад се секу под правим углом

$$\vec{v}_{p_1} \perp \vec{v}_{p_2}, \quad \text{тј.} \quad \vec{v}_{p_1} \cdot \vec{v}_{p_2} = 0,$$

4°  $p_1$  и  $p_2$  су мимоилазне

$$\vec{v}_{p_1} \neq \lambda \vec{v}_{p_2} \quad \text{и} \quad \left| \begin{vmatrix} \vec{v}_{p_1} & \vec{v}_{p_2} \end{vmatrix} \right| \neq 0.$$

*Средиште дужи* са крајевима  $A$  и  $B$  је  $S$ :

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_S = \frac{y_A + y_B}{2}, \quad z_S = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

# Задаци

1. сличан са 4.3.

Написати једначину равни која садржи тачке

$$A(1, 1, 1), \quad B(0, -1, 2) \quad \text{и} \quad C(2, 3, -1).$$

*Решение 1.*  $A(1, 1, 1)$ ,  $B(0, -1, 2)$  и  $C(2, 3, -1)$ .

$$\pi: ax + by + cz + d = 0.$$

*Решение 1.*  $A(1, 1, 1)$ ,  $B(0, -1, 2)$  и  $C(2, 3, -1)$ .

$$\pi: ax + by + cz + d = 0.$$

$$A \in \pi \Rightarrow a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1 + d = 0$$

*Решение 1.*  $A(1, 1, 1)$ ,  $B(0, -1, 2)$  и  $C(2, 3, -1)$ .

$$\pi: ax + by + cz + d = 0.$$

$$A \in \pi \Rightarrow a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1 + d = 0$$

$$B \in \pi \Rightarrow a \cdot 0 + b \cdot (-1) + c \cdot 2 + d = 0$$



*Решение 1.*  $A(1, 1, 1)$ ,  $B(0, -1, 2)$  и  $C(2, 3, -1)$ .

$$\pi: ax + by + cz + d = 0.$$

$$A \in \pi \Rightarrow a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1 + d = 0$$

$$B \in \pi \Rightarrow a \cdot 0 + b \cdot (-1) + c \cdot 2 + d = 0$$

$$C \in \pi \Rightarrow a \cdot 2 + b \cdot 3 + c \cdot (-1) + d = 0$$

*Решение 1.*  $A(1, 1, 1)$ ,  $B(0, -1, 2)$  и  $C(2, 3, -1)$ .

$$\pi: ax + by + cz + d = 0.$$

$$A \in \pi \Rightarrow a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1 + d = 0$$

$$B \in \pi \Rightarrow a \cdot 0 + b \cdot (-1) + c \cdot 2 + d = 0$$

$$C \in \pi \Rightarrow a \cdot 2 + b \cdot 3 + c \cdot (-1) + d = 0$$

Хомоген систем:

$$\begin{array}{ccccccccc} a & + & b & + & c & + & d & = & 0 \\ & & - & b & + & 2c & + & d & = & 0 \\ 2a & + & 3b & - & c & + & d & = & 0 \end{array}$$

$$a + b + c + d = 0$$

$$-b + 2c + d = 0$$

$$2a + 3b - c + d = 0 \quad \text{III} - 2 \cdot \text{I}$$

$$\begin{array}{rclclclcl}
 a & + & b & + & c & + & d & = & 0 \\
 & - & b & + & 2c & + & d & = & 0 \\
 2a & + & 3b & - & c & + & d & = & 0
 \end{array}
 \quad \text{III} - 2 \cdot \text{I}$$

---


$$\begin{array}{rclclclcl}
 a & + & b & + & c & + & d & = & 0 \\
 & - & b & + & 2c & + & d & = & 0 \\
 & & b & - & 3c & - & d & = & 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccl}
 a & + & b & + & c & + & d & = & 0 \\
 & - & b & + & 2c & + & d & = & 0 \\
 2a & + & 3b & - & c & + & d & = & 0 & \text{III} - 2 \cdot \text{I}
 \end{array}$$


---

$$\begin{array}{cccccccl}
 a & + & b & + & c & + & d & = & 0 \\
 & - & b & + & 2c & + & d & = & 0 \\
 & & b & - & 3c & - & d & = & 0 & \text{III} + \text{II}
 \end{array}$$


---

$$\begin{array}{cccccccl}
 a & + & b & + & c & + & d & = & 0 \\
 & - & b & + & 2c & + & d & = & 0 \\
 & & & - & c & & & = & 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccl}
 a & + & b & + & c & + & d & = & 0 \\
 & & - & b & + & 2c & + & d & = & 0 \\
 2a & + & 3b & - & c & + & d & = & 0 & \text{III} - 2 \cdot \text{I}
 \end{array}$$


---

$$\begin{array}{cccccccl}
 a & + & b & + & c & + & d & = & 0 \\
 & & - & b & + & 2c & + & d & = & 0 \\
 & & & b & - & 3c & - & d & = & 0 & \text{III} + \text{II}
 \end{array}$$


---

$$\begin{array}{cccccccl}
 a & + & b & + & c & + & d & = & 0 \\
 & & - & b & + & 2c & + & d & = & 0 \\
 & & & & - & c & & & = & 0
 \end{array}$$

$a$ ,  $b$ ,  $c$  везане променљиве,  $d$  слободна.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 a & + & b & + & c & + & d & = & 0 \\
 & - & b & + & 2c & + & d & = & 0 \\
 & & & - & c & & & = & 0
 \end{array}$$

$a$ ,  $b$ ,  $c$  везане променљиве,  $d$  слободна.

$$d = t, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 a & + & b & + & c & + & d & = & 0 \\
 & - & b & + & 2c & + & d & = & 0 \\
 & & & - & c & & & = & 0
 \end{array}$$

$a$ ,  $b$ ,  $c$  везане променљиве,  $d$  слободна.

$$d = t, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$c = 0$$



$$\begin{array}{ccccccccc}
 a & + & b & + & c & + & d & = & 0 \\
 & - & b & + & 2c & + & d & = & 0 \\
 & & & - & c & & & = & 0
 \end{array}$$

$a$ ,  $b$ ,  $c$  везане променљиве,  $d$  слободна.

$$d = t, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$c = 0$$

$$b = t$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 a & + & b & + & c & + & d & = & 0 \\
 & - & b & + & 2c & + & d & = & 0 \\
 & & & - & c & & & = & 0
 \end{array}$$

$a$ ,  $b$ ,  $c$  везане променљиве,  $d$  слободна.

$$d = t, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$c = 0$$

$$b = t$$

$$a = -2t$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 a & + & b & + & c & + & d & = & 0 \\
 & - & b & + & 2c & + & d & = & 0 \\
 & & & - & c & & & = & 0
 \end{array}$$

$a$ ,  $b$ ,  $c$  везане променљиве,  $d$  слободна.

$$d = t, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$c = 0$$

$$b = t$$

$$a = -2t$$

тј.  $(a, b, c, d) = (-2t, t, 0, t), \quad t \in \mathbb{R}.$

$$d = t, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$c = 0$$

$$b = t$$

$$a = -2t$$

тј.  $(a, b, c, d) = (-2t, t, 0, t), \quad t \in \mathbb{R}.$

Нпр.  $t = -1 \Rightarrow (a, b, c, d) = (2, -1, 0, -1),$   
одакле је

$$\pi : 2x - y - 1 = 0.$$



*Решење 2.*      Једначина равни кроз 3 тачке:

$$\pi: \begin{vmatrix} x - 1 & y - 1 & z - 1 \\ 0 - 1 & -1 - 1 & 2 - 1 \\ 2 - 1 & 3 - 1 & -1 - 1 \end{vmatrix} = 0$$

*Решење 2.*      Једначина равни кроз 3 тачке:

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0-1 & -1-1 & 2-1 \\ 2-1 & 3-1 & -1-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

*Решење 2.*      Једначина равни кроз 3 тачке:

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0-1 & -1-1 & 2-1 \\ 2-1 & 3-1 & -1-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\pi: +(x-1) \cdot (4-2) - (y-1) \cdot (2-1) + (z-1) \cdot (-2 - (-2)) = 0.$$

$$\pi: 2x - y - 1 = 0.$$



*Решење 3.* У равни  $\pi$  су вектори

$$\vec{a} = \overrightarrow{AC} = (1, 2, -2) \quad \text{и} \quad \vec{b} = \overrightarrow{BC} = (2, 4, -3).$$



*Решење 3.* У равни  $\pi$  су вектори

$$\vec{a} = \overrightarrow{AC} = (1, 2, -2) \quad \text{и} \quad \vec{b} = \overrightarrow{BC} = (2, 4, -3).$$

$\vec{n} \perp \vec{a}$  и  $\vec{n} \perp \vec{b}$ , па узимамо

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$$

*Решење 3.* У равни  $\pi$  су вектори

$$\vec{a} = \overrightarrow{AC} = (1, 2, -2) \quad \text{и} \quad \vec{b} = \overrightarrow{BC} = (2, 4, -3).$$

$\vec{n} \perp \vec{a}$  и  $\vec{n} \perp \vec{b}$ , па узимамо

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot \vec{i} - 1 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k} = (2, -1, 0). \end{aligned}$$


$$\begin{aligned}
 \vec{n} &= \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix} \\
 &= 2 \cdot \vec{i} - 1 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k} = (2, -1, 0).
 \end{aligned}$$

Једначина равни која има вектор нормале  $\vec{n} = (2, -1, 0)$  и пролази кроз тачку  $A(1, 1, 1)$  је

$$2 \cdot (x - 1) - 1 \cdot (y - 1) + 0 \cdot (z - 1) = 0.$$

Једначина равни која има вектор нормале  $\vec{n} = (2, -1, 0)$  и пролази кроз тачку  $A(1, 1, 1)$  је

$$2 \cdot (x - 1) - 1 \cdot (y - 1) + 0 \cdot (z - 1) = 0.$$

Тражена раван је  $\pi : 2x - y - 1 = 0$ . 

## 2. 4.5.

Написати једначину равни која садржи тачку

$$A(2, -1, 1)$$

и нормална је на равни

$$\alpha: 3x + 2y - z + 4 = 0 \quad \text{и} \quad \beta: x + y + z - 3 = 0.$$

*Решење 1.*

Раван  $\alpha$ :  $3x + 2y - z + 4 = 0$  има  $\vec{n}_\alpha = (3, 2, -1)$ .

*Решение 1.*

Раван  $\alpha: 3x + 2y - z + 4 = 0$  има  $\vec{n}_\alpha = (3, 2, -1)$ .

Раван  $\beta: x + y + z - 3 = 0$  има  $\vec{n}_\beta = (1, 1, 1)$ .

*Решение 1.*

Раван  $\alpha: 3x + 2y - z + 4 = 0$  има  $\vec{n}_\alpha = (3, 2, -1)$ .

Раван  $\beta: x + y + z - 3 = 0$  има  $\vec{n}_\beta = (1, 1, 1)$ .

$$\begin{aligned}\pi \perp \alpha, \pi \perp \beta &\Rightarrow \vec{n}_\pi \perp \vec{n}_\alpha, \vec{n}_\pi \perp \vec{n}_\beta \\ &\Rightarrow \vec{n}_\pi = \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta\end{aligned}$$



*Решение 1.*

Раван  $\alpha: 3x + 2y - z + 4 = 0$  има  $\vec{n}_\alpha = (3, 2, -1)$ .

Раван  $\beta: x + y + z - 3 = 0$  има  $\vec{n}_\beta = (1, 1, 1)$ .

$$\begin{aligned}\pi \perp \alpha, \pi \perp \beta &\Rightarrow \vec{n}_\pi \perp \vec{n}_\alpha, \vec{n}_\pi \perp \vec{n}_\beta \\ &\Rightarrow \vec{n}_\pi = \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta\end{aligned}$$

$$\vec{n}_\pi = (3, 2, -1) \times (1, 1, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3, -4, 1).$$

### *Решение 1.*

Раван  $\alpha: 3x + 2y - z + 4 = 0$  има  $\vec{n}_\alpha = (3, 2, -1)$ .

Раван  $\beta: x + y + z - 3 = 0$  има  $\vec{n}_\beta = (1, 1, 1)$ .

$$\begin{aligned}\pi \perp \alpha, \pi \perp \beta &\Rightarrow \vec{n}_\pi \perp \vec{n}_\alpha, \vec{n}_\pi \perp \vec{n}_\beta \\ &\Rightarrow \vec{n}_\pi = \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta\end{aligned}$$

$$\vec{n}_\pi = (3, 2, -1) \times (1, 1, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3, -4, 1).$$

$A(2, -1, 1)$ :

$$3 \cdot (x - 2) - 4 \cdot (y - (-1)) + 1 \cdot (z - 1) = 0.$$

### Решење 1.

Раван  $\alpha: 3x + 2y - z + 4 = 0$  има  $\vec{n}_\alpha = (3, 2, -1)$ .

Раван  $\beta: x + y + z - 3 = 0$  има  $\vec{n}_\beta = (1, 1, 1)$ .

$$\begin{aligned}\pi \perp \alpha, \pi \perp \beta &\Rightarrow \vec{n}_\pi \perp \vec{n}_\alpha, \vec{n}_\pi \perp \vec{n}_\beta \\ &\Rightarrow \vec{n}_\pi = \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta\end{aligned}$$

$$\vec{n}_\pi = (3, 2, -1) \times (1, 1, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3, -4, 1).$$

$A(2, -1, 1)$ :

$$3 \cdot (x - 2) - 4 \cdot (y - (-1)) + 1 \cdot (z - 1) = 0.$$

Тражена раван је  $\pi: 3x - 4y + z - 11 = 0$ . ■

*Решение 2.*  $\alpha \cap \beta = p.$

$$\pi \perp \alpha, \pi \perp \beta \Rightarrow \pi \perp p.$$

*Решење 2.*  $\alpha \cap \beta = p.$

$$\pi \perp \alpha, \pi \perp \beta \Rightarrow \pi \perp p.$$

Права  $p$  припада и равни  $\alpha$  и  $\beta$ , па је она решење система

$$\beta: \quad x \quad + \quad y \quad + \quad z \quad = \quad 3$$

$$\alpha: \quad 3x \quad + \quad 2y \quad - \quad z \quad = \quad -4$$

*Решење 2.*  $\alpha \cap \beta = p.$

$$\pi \perp \alpha, \pi \perp \beta \Rightarrow \pi \perp p.$$

Правa  $p$  припада и равни  $\alpha$  и  $\beta$ , па је она решење система

$$\beta: \quad x \quad + \quad y \quad + \quad z \quad = \quad 3$$

$$\alpha: \quad 3x \quad + \quad 2y \quad - \quad z \quad = \quad -4 \quad \text{II} - 3 \cdot \text{I}$$

*Решење 2.*  $\alpha \cap \beta = p.$

$$\pi \perp \alpha, \pi \perp \beta \Rightarrow \pi \perp p.$$

Права  $p$  припада и равни  $\alpha$  и  $\beta$ , па је она решење система

$$\beta: \quad x \quad + \quad y \quad + \quad z \quad = \quad 3$$

$$\alpha: \quad 3x \quad + \quad 2y \quad - \quad z \quad = \quad -4 \quad \text{II} - 3 \cdot \text{I}$$

---

$$x \quad + \quad y \quad + \quad z \quad = \quad 3$$

$$- \quad y \quad - \quad 4z \quad = \quad -13$$

*Решење 2.*  $\alpha \cap \beta = p.$

$$\pi \perp \alpha, \pi \perp \beta \Rightarrow \pi \perp p.$$

Права  $p$  припада и равни  $\alpha$  и  $\beta$ , па је она решење система

$$\beta: \quad x \quad + \quad y \quad + \quad z \quad = \quad 3$$

$$\alpha: \quad 3x \quad + \quad 2y \quad - \quad z \quad = \quad -4 \quad \text{II} - 3 \cdot \text{I}$$

---

$$\textcolor{red}{x} \quad + \quad y \quad + \quad \textcolor{teal}{z} \quad = \quad 3$$

$$\quad - \quad \textcolor{red}{y} \quad - \quad 4\textcolor{teal}{z} \quad = \quad -13$$



*Решење 2.*  $\alpha \cap \beta = p$ .

$$\pi \perp \alpha, \pi \perp \beta \Rightarrow \pi \perp p.$$

Права  $p$  припада и равни  $\alpha$  и  $\beta$ , па је она решење система

$$\beta: \quad x \quad + \quad y \quad + \quad z \quad = \quad 3$$

$$\alpha: \quad 3x \quad + \quad 2y \quad - \quad z \quad = \quad -4 \quad \text{II} - 3 \cdot \text{I}$$

---

$$\textcolor{red}{x} \quad + \quad y \quad + \quad \textcolor{teal}{z} \quad = \quad 3$$

$$\quad - \quad \textcolor{red}{y} \quad - \quad 4\textcolor{teal}{z} \quad = \quad -13$$

$$x = 3t - 10, \quad y = 13 - 4t, \quad z = t, \quad t \in \mathbb{R},$$

што је  $p$  у параметарском облику.

*Решење 2.*  $\alpha \cap \beta = p.$

$$\pi \perp \alpha, \pi \perp \beta \Rightarrow \pi \perp p.$$

$$\beta: \quad x \quad + \quad y \quad + \quad z \quad = \quad 3$$

$$\alpha: \quad 3x \quad + \quad 2y \quad - \quad z \quad = \quad -4 \quad \text{II} - 3 \cdot \text{I}$$

---

$$\textcolor{red}{x} \quad + \quad y \quad + \quad \textcolor{teal}{z} \quad = \quad 3$$

$$\quad - \quad \textcolor{red}{y} \quad - \quad 4\textcolor{teal}{z} \quad = \quad -13$$

$x = 3t - 10, y = 13 - 4t, z = t, t \in \mathbb{R}$ , што је  $p$  у параметарском облику. Канонски облик:

$$p: \frac{x + 10}{3} = \frac{y - 13}{-4} = \frac{z}{1} = t,$$

$$\vec{v}_p = (3, -4, 1).$$

*Решение 2.*  $\alpha \cap \beta = p.$

$$\pi \perp \alpha, \pi \perp \beta \Rightarrow \pi \perp p.$$

$$\begin{array}{rccccccccc} \beta: & x & + & y & + & z & = & 3 \\ \alpha: & 3x & + & 2y & - & z & = & -4 \end{array}$$

$$x = 3t - 10, y = 13 - 4t, z = t, t \in \mathbb{R}$$

$$p: \frac{x + 10}{3} = \frac{y - 13}{-4} = \frac{z}{1} = t,$$

$\vec{v}_p = (3, -4, 1).$  Због  $\pi \perp p$  узимамо

$$\vec{n}_\pi = \vec{v}_p = (3, -4, 1).$$

$$(x, y, z) = (3t - 10, 13 - 4t, t), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$p: \frac{x + 10}{3} = \frac{y - 13}{-4} = \frac{z}{1} = t,$$

$\vec{v}_p = (3, -4, 1)$ . Због  $\pi \perp p$  узимамо

$$\vec{n}_\pi = \vec{v}_p = (3, -4, 1).$$

$A(2, -1, 1)$ :

$$3 \cdot (x - 2) - 4 \cdot (y - (-1)) + 1 \cdot (z - 1) = 0.$$

Тражена равна је  $\pi : 3x - 4y + z - 11 = 0$ . ■

### 3. сличан са 4.9.

Испитати узајамни положај равни  $\alpha$  и  $\beta$   
(ако су  $\alpha$  и  $\beta$  паралелне израчунати растојање између њих,  $d(\alpha, \beta)$ , а ако се секу израчунати угао који заклапају,  $\sphericalangle(\alpha, \beta)$ )

ако је:

а)  $\alpha: x - y + 1 = 0$  и  $\beta: y - z + 1 = 0$ ;

б)  $\alpha: x - 2y + z - 1 = 0$  и  $\beta: 2x - 4y + 2z - 1 = 0$ .

*Решење.*     **а)**  $\alpha: x - y + 1 = 0$ ,  $\beta: y - z + 1 = 0$ .

$\vec{n}_\alpha = (1, -1, 0)$  и  $\vec{n}_\beta = (0, 1, -1)$  су линеарно независни ( $\vec{n}_\alpha \neq \lambda \cdot \vec{n}_\beta$ )

*Решење.*     **а)**  $\alpha: x - y + 1 = 0$ ,  $\beta: y - z + 1 = 0$ .

$\vec{n}_\alpha = (1, -1, 0)$  и  $\vec{n}_\beta = (0, 1, -1)$  су линеарно независни ( $\vec{n}_\alpha \neq \lambda \cdot \vec{n}_\beta$ )  $\Rightarrow$

равни  $\alpha$  и  $\beta$  нису паралелне (секу се).

*Решење.*     **a)**  $\alpha: x - y + 1 = 0$ ,  $\beta: y - z + 1 = 0$ .

$\vec{n}_\alpha = (1, -1, 0)$  и  $\vec{n}_\beta = (0, 1, -1)$  су линеарно независни ( $\vec{n}_\alpha \neq \lambda \cdot \vec{n}_\beta$ )  $\Rightarrow$

равни  $\alpha$  и  $\beta$  нису паралелне (секу се).

Угао  $\varphi$  који образују дат је са

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|} = \frac{|-1|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}.$$



6)  $\alpha: x - 2y + z - 1 = 0$  и  $\beta: 2x - 4y + 2z - 1 = 0$ .

б)  $\alpha: x - 2y + z - 1 = 0$  и  $\beta: 2x - 4y + 2z - 1 = 0$ .

$$(1, -2, 1) = \frac{1}{2}(2, -4, 2) \Rightarrow \vec{n}_\alpha = \frac{1}{2}\vec{n}_\beta \Rightarrow$$

равни  $\alpha$  и  $\beta$  су паралелне или се поклапају.

б)  $\alpha: x - 2y + z - 1 = 0$  и  $\beta: 2x - 4y + 2z - 1 = 0$ .

$$(1, -2, 1) = \frac{1}{2}(2, -4, 2) \Rightarrow \vec{n}_\alpha = \frac{1}{2}\vec{n}_\beta \Rightarrow$$

равни  $\alpha$  и  $\beta$  су паралелне или се поклапају.

А произвољна тачка из  $\alpha: x - 2y + z - 1 = 0$ ?

б)  $\alpha: x - 2y + z - 1 = 0$  и  $\beta: 2x - 4y + 2z - 1 = 0$ .

$$(1, -2, 1) = \frac{1}{2}(2, -4, 2) \Rightarrow \vec{n}_\alpha = \frac{1}{2}\vec{n}_\beta \Rightarrow$$

равни  $\alpha$  и  $\beta$  су паралелне или се поклапају.

А произвољна тачка из  $\alpha: x - 2y + z - 1 = 0$ ?

Добијамо је кад фиксирамо 2 координате, нпр.  
 $y = z = 0 \Rightarrow x = 1$ , тј.  $A(1, 0, 0)$ .

б)  $\alpha: x - 2y + z - 1 = 0$  и  $\beta: 2x - 4y + 2z - 1 = 0$ .

$$(1, -2, 1) = \frac{1}{2}(2, -4, 2) \Rightarrow \vec{n}_\alpha = \frac{1}{2}\vec{n}_\beta \Rightarrow$$

равни  $\alpha$  и  $\beta$  су паралелне или се поклапају.

А произвољна тачка из  $\alpha: x - 2y + z - 1 = 0$ ?

Добијамо је кад фиксирамо 2 координате, нпр.  
 $y = z = 0 \Rightarrow x = 1$ , тј.  $A(1, 0, 0)$ .

$$A \rightsquigarrow \beta: 2 \cdot 1 - 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 1 = 0, \text{ тј. } 1 = 0$$

б)  $\alpha: x - 2y + z - 1 = 0$  и  $\beta: 2x - 4y + 2z - 1 = 0$ .

$$(1, -2, 1) = \frac{1}{2}(2, -4, 2) \Rightarrow \vec{n}_\alpha = \frac{1}{2}\vec{n}_\beta \Rightarrow$$

равни  $\alpha$  и  $\beta$  су паралелне или се поклапају.

А произвољна тачка из  $\alpha: x - 2y + z - 1 = 0$ ?

Добијамо је кад фиксирамо 2 координате, нпр.

$$y = z = 0 \Rightarrow x = 1, \text{ тј. } A(1, 0, 0).$$

$$A \rightsquigarrow \beta: 2 \cdot 1 - 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 1 = 0, \text{ тј. } 1 = 0 \quad \text{↓}$$

$$\Rightarrow A \notin \beta \Rightarrow \alpha \parallel \beta.$$

б)  $\alpha: x - 2y + z - 1 = 0$  и  $\beta: 2x - 4y + 2z - 1 = 0$ .

$$(1, -2, 1) = \frac{1}{2}(2, -4, 2) \Rightarrow \vec{n}_\alpha = \frac{1}{2}\vec{n}_\beta \Rightarrow$$

равни  $\alpha$  и  $\beta$  су паралелне или се поклапају.

А произвољна тачка из  $\alpha: x - 2y + z - 1 = 0$ ?

Добијамо је кад фиксирамо 2 координате, нпр.

$$y = z = 0 \Rightarrow x = 1, \text{ тј. } A(1, 0, 0).$$

$$A \rightsquigarrow \beta: 2 \cdot 1 - 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 1 = 0, \text{ тј. } 1 = 0 \quad \text{↓}$$

$$\Rightarrow A \notin \beta \Rightarrow \alpha \parallel \beta.$$

$$d(\alpha, \beta) = d(A, \beta)$$

б)  $\alpha: x - 2y + z - 1 = 0$  и  $\beta: 2x - 4y + 2z - 1 = 0$ .

$$(1, -2, 1) = \frac{1}{2}(2, -4, 2) \Rightarrow \vec{n}_\alpha = \frac{1}{2}\vec{n}_\beta \Rightarrow$$

равни  $\alpha$  и  $\beta$  су паралелне или се поклапају.

А произвољна тачка из  $\alpha: x - 2y + z - 1 = 0$ ?

Добијамо је кад фиксирамо 2 координате, нпр.  
 $y = z = 0 \Rightarrow x = 1$ , тј.  $A(1, 0, 0)$ .

$$A \rightsquigarrow \beta: 2 \cdot 1 - 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 1 = 0, \text{ тј. } 1 = 0 \quad \text{↓}$$

$$\Rightarrow A \notin \beta \Rightarrow \alpha \parallel \beta.$$

$$d(\alpha, \beta) = d(A, \beta)$$

Растојање  $A(1, 0, 0)$  до  $\beta: 2x - 4y + 2z - 1 = 0$  је



б)  $(1, -2, 1) = \frac{1}{2}(2, -4, 2) \Rightarrow \vec{n}_\alpha = \frac{1}{2}\vec{n}_\beta \Rightarrow$   
равни  $\alpha$  и  $\beta$  су паралелне или се поклапају.

$$d(\alpha, \beta) = d(A, \beta)$$

Растојање  $A(1, 0, 0)$  до  $\beta: 2x - 4y + 2z - 1 = 0$  је

$$d(A, \beta) = \frac{|2 \cdot 1 - 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{24}} = \frac{\sqrt{6}}{12}$$

па је и  $d(\alpha, \beta) = \frac{\sqrt{6}}{12}$ .

б)  $(1, -2, 1) = \frac{1}{2}(2, -4, 2) \Rightarrow \vec{n}_\alpha = \frac{1}{2}\vec{n}_\beta \Rightarrow$   
равни  $\alpha$  и  $\beta$  су паралелне или се поклапају.

$$d(\alpha, \beta) = d(A, \beta)$$

Растојање  $A(1, 0, 0)$  до  $\beta: 2x - 4y + 2z - 1 = 0$  је

$$d(A, \beta) = \frac{|2 \cdot 1 - 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{24}} = \frac{\sqrt{6}}{12}$$

па је и  $d(\alpha, \beta) = \frac{\sqrt{6}}{12}$ .

$d(\alpha, \beta) = \frac{\sqrt{6}}{12} \neq 0 \Rightarrow$  равни  $\alpha$  и  $\beta$  су паралелне.



#### 4. 4.11.

Одредити једначину равни  $\pi$  која садржи пресек равни

$$\alpha: x + 2y + 3z - 4 = 0 \quad \text{и} \quad \beta: 3x + z - 5 = 0$$

и која на координатним осама  $Oy$  и  $Oz$  одсеца подударне одсечке.

*Решење.* Сноп равни је

$$x + 2y + 3z - 4 + \lambda(3x + z - 5) = 0,$$

$$\pi: (1 + 3\lambda)x + 2y + (3 + \lambda)z + (-4 - 5\lambda) = 0.$$

*Решење.* Сноп равни је

$$x + 2y + 3z - 4 + \lambda(3x + z - 5) = 0,$$

$$\pi: (1 + 3\lambda)x + 2y + (3 + \lambda)z + (-4 - 5\lambda) = 0.$$

Одсечак на оси  $Oy$  добијамо кад заменимо  
 $x = z = 0 \Rightarrow y = \frac{4 + 5\lambda}{2}.$

*Решење.* Сноп равни је

$$x + 2y + 3z - 4 + \lambda(3x + z - 5) = 0,$$

$$\pi: (1 + 3\lambda)x + 2y + (3 + \lambda)z + (-4 - 5\lambda) = 0.$$

Одсечак на оси  $Oy$  добијамо кад заменимо

$$x = z = 0 \Rightarrow y = \frac{4 + 5\lambda}{2}.$$

Одсечак на оси  $Oz$  добијамо кад заменимо

$$x = y = 0 \Rightarrow z = \frac{4 + 5\lambda}{3 + \lambda}.$$

Како су одсечци једнаке дужине имамо:

$$1^\circ \frac{4+5\lambda}{2} = \frac{4+5\lambda}{3+\lambda}, \text{ за } 4+5\lambda \neq 0 \text{ имамо}$$

$$2 = 3 + \lambda \Rightarrow \lambda = -1,$$

па је  $\pi_1: -2x + 2y + 2z + 1 = 0$ .

Како су одсечци једнаке дужине имамо:

$$1^\circ \frac{4+5\lambda}{2} = \frac{4+5\lambda}{3+\lambda}, \text{ за } 4+5\lambda \neq 0 \text{ имамо}$$

$$2 = 3 + \lambda \Rightarrow \lambda = -1,$$

па је  $\pi_1: -2x + 2y + 2z + 1 = 0$ .

$$2^\circ \frac{4+5\lambda}{2} = -\frac{4+5\lambda}{3+\lambda}, \text{ за } 4+5\lambda \neq 0 \text{ имамо}$$

$$2 = -3 - \lambda \Rightarrow \lambda = -5,$$

па је  $\pi_2: -14x + 2y - 2z + 21 = 0$ .



Како су одсечци једнаке дужине имамо:

$$1^\circ \frac{4+5\lambda}{2} = \frac{4+5\lambda}{3+\lambda}, \text{ за } 4+5\lambda \neq 0 \text{ имамо}$$

$$2 = 3 + \lambda \Rightarrow \lambda = -1,$$

па је  $\pi_1: -2x + 2y + 2z + 1 = 0$ .

$$2^\circ \frac{4+5\lambda}{2} = -\frac{4+5\lambda}{3+\lambda}, \text{ за } 4+5\lambda \neq 0 \text{ имамо}$$

$$2 = -3 - \lambda \Rightarrow \lambda = -5,$$

па је  $\pi_2: -14x + 2y - 2z + 21 = 0$ .

$$3^\circ 4 + 5\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{4}{5}, \text{ па је}$$

$$\pi_3: -\frac{7}{5}x + 2y + \frac{11}{5}z = 0,$$

$$\pi_3: -7x + 10y + 11z = 0.$$



## 5. 4.15.

Одредити праву  $q$  која садржи тачку

$$A(-1, 3, -2)$$

и паралелна је правој

$$p: \begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0 \\ x + 3y - 2z - 3 = 0 \end{cases} .$$

*Решење.* За паралелне праве важи  $\vec{v}_q = \lambda \cdot \vec{v}_p$ .

*Решење.* За паралелне праве важи  $\vec{v}_q = \lambda \cdot \vec{v}_p$ .

$$3x - y + 2z - 7 = 0$$

$$x + 3y - 2z - 3 = 0$$

$$p: x = -\frac{2}{5}t + \frac{18}{5}, y = \frac{4}{5}t - \frac{1}{5}, z = t, t \in \mathbb{R},$$

*Решење.* За паралелне праве важи  $\vec{v}_q = \lambda \cdot \vec{v}_p$ .

$$3x - y + 2z - 7 = 0$$

$$x + 3y - 2z - 3 = 0$$

$$p: x = -\frac{2}{5}t + \frac{18}{5}, y = \frac{4}{5}t - \frac{1}{5}, z = t, t \in \mathbb{R},$$

$$p: \frac{x - \frac{18}{5}}{-\frac{2}{5}} = \frac{y + \frac{1}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{z}{1},$$

$$\vec{v}_p = \left(-\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1\right)$$

*Решење.* За паралелне праве важи  $\vec{v}_q = \lambda \cdot \vec{v}_p$ .

$$3x - y + 2z - 7 = 0$$

$$x + 3y - 2z - 3 = 0$$

$$p: x = -\frac{2}{5}t + \frac{18}{5}, y = \frac{4}{5}t - \frac{1}{5}, z = t, t \in \mathbb{R},$$

$$p: \frac{x - \frac{18}{5}}{-\frac{2}{5}} = \frac{y + \frac{1}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{z}{1},$$

$$\vec{v}_p = \left(-\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1\right) \Rightarrow \vec{v}_q = 5\vec{v}_p = (-2, 4, 5).$$

*Решење.* За паралелне праве важи  $\vec{v}_q = \lambda \cdot \vec{v}_p$ .

$$3x - y + 2z - 7 = 0$$

$$x + 3y - 2z - 3 = 0$$

$$p: x = -\frac{2}{5}t + \frac{18}{5}, y = \frac{4}{5}t - \frac{1}{5}, z = t, t \in \mathbb{R},$$

$$p: \frac{x - \frac{18}{5}}{-\frac{2}{5}} = \frac{y + \frac{1}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{z}{1},$$

$$\vec{v}_p = \left(-\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1\right) \Rightarrow \vec{v}_q = 5\vec{v}_p = (-2, 4, 5).$$

$$A(-1, 3, -2) \Rightarrow q: \frac{x + 1}{-2} = \frac{y - 3}{4} = \frac{z + 2}{5}.$$



**КРАЈ ЧАСА**