

VII двочас вежби  
мр Владимир Балтић

## 4. Аналитичка геометрија у простору

1.

Одредити праву  $r$  која садржи тачку

$$A(3, 2, -5)$$

и вектор правца јој је нормалан на праве

$$p: \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-1}{1}$$

$$q: \frac{x+2}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z+1}{-3}.$$

*Решение.*  $p: \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow \vec{v}_p = (3, -2, 1)$

$q: \frac{x+2}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z+1}{-3} \Rightarrow \vec{v}_q = (2, 3, -3)$

*Решение.*  $p: \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow \vec{v}_p = (3, -2, 1)$

$$q: \frac{x+2}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z+1}{-3} \Rightarrow \vec{v}_q = (2, 3, -3)$$

$$\vec{v}_r \perp \vec{v}_p, \vec{v}_r \perp \vec{v}_q \Rightarrow \vec{v}_r = \vec{v}_p \times \vec{v}_q = (3, 11, 13).$$

*Решение.*  $p: \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow \vec{v}_p = (3, -2, 1)$

$$q: \frac{x+2}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z+1}{-3} \Rightarrow \vec{v}_q = (2, 3, -3)$$

$$\vec{v}_r \perp \vec{v}_p, \vec{v}_r \perp \vec{v}_q \Rightarrow \vec{v}_r = \vec{v}_p \times \vec{v}_q = (3, 11, 13).$$

$$A(3, 2, -5) \Rightarrow r: \frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{11} = \frac{z+5}{13}.$$



**2.**    сличан са 4.9.    Дате су праве

$$p: \frac{x+2}{1} = \frac{y-5}{-4} = \frac{z+4}{1}$$

$$q: \frac{x-2}{2} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z+3}{\lambda}.$$

**а)** Одредити  $\lambda$  тако да се  $p$  и  $q$  секу.

**б)** За  $\lambda$  из а) одредити меру оштрог угла  $\varphi$  који граде праве  $p$  и  $q$ , као и једначину равни  $\pi$  коју одређују ове праве.

*Решение 1.*     **a)**      $p: \frac{x+2}{1} = \frac{y-5}{-4} = \frac{z+4}{1} \quad \text{и}$

$$q: \frac{x-2}{2} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z+3}{\lambda}.$$

*Решение 1.*     **a)**      $p: \frac{x+2}{1} = \frac{y-5}{-4} = \frac{z+4}{1}$      и

$$q: \frac{x-2}{2} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z+3}{\lambda}.$$

$$\vec{v}_p = (1, -4, 1), \quad P(-2, 5, -4),$$

$$\vec{v}_q = (2, -2, \lambda), \quad Q(2, -5, -3).$$



*Решение 1.*     **а)**      $p: \frac{x+2}{1} = \frac{y-5}{-4} = \frac{z+4}{1}$      и

$$q: \frac{x-2}{2} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z+3}{\lambda}.$$

$$\vec{v}_p = (1, -4, 1), \quad P(-2, 5, -4),$$

$$\vec{v}_q = (2, -2, \lambda), \quad Q(2, -5, -3).$$

$$\frac{1}{2} \neq \frac{-4}{-2} \Rightarrow p \text{ и } q \text{ нису паралелне.}$$

*Решење 1.*     **а)**      $p: \frac{x+2}{1} = \frac{y-5}{-4} = \frac{z+4}{1}$      и

$$q: \frac{x-2}{2} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z+3}{\lambda}.$$

$$\vec{v}_p = (1, -4, 1), \quad P(-2, 5, -4),$$

$$\vec{v}_q = (2, -2, \lambda), \quad Q(2, -5, -3).$$

$$\frac{1}{2} \neq \frac{-4}{-2} \Rightarrow p \text{ и } q \text{ нису паралелне.}$$

Непаралелне праве  $p$  и  $q$  се секу акко

$$\begin{vmatrix} (-2) - 2 & 5 - (-5) & (-4) - (-3) \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = 6\lambda + 6 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -1.$$

$$\text{6)} \quad p: \frac{x+2}{1} = \frac{y-5}{-4} = \frac{z+4}{1}, \quad q: \frac{x-2}{2} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z+3}{-1}.$$
$$\Rightarrow \vec{v}_p = (1, -4, 1), \quad \vec{v}_q = (2, -2, -1)$$

$$\textcolor{teal}{6}) \quad p: \frac{x+2}{1} = \frac{y-5}{-4} = \frac{z+4}{1}, \quad q: \frac{x-2}{2} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z+3}{-1}.$$

$$\Rightarrow \vec{v}_p = (1, -4, 1), \quad \vec{v}_q = (2, -2, -1)$$

$$\vec{v}_p \cdot \vec{v}_q = (1, -4, 1) \cdot (2, -2, -1) = 2 + 8 - 1 = 9,$$

$$|\vec{v}_p| = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 1^2} = 3\sqrt{2}, \quad |\vec{v}_q| = 3,$$

$$\text{6)} \quad p: \frac{x+2}{1} = \frac{y-5}{-4} = \frac{z+4}{1}, \quad q: \frac{x-2}{2} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z+3}{-1}.$$

$$\Rightarrow \vec{v}_p = (1, -4, 1), \quad \vec{v}_q = (2, -2, -1)$$

$$\vec{v}_p \cdot \vec{v}_q = (1, -4, 1) \cdot (2, -2, -1) = 2 + 8 - 1 = 9,$$

$$|\vec{v}_p| = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 1^2} = 3\sqrt{2}, \quad |\vec{v}_q| = 3,$$

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{v}_p \cdot \vec{v}_q|}{|\vec{v}_p| \cdot |\vec{v}_q|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\vec{v}_p \cdot \vec{v}_q = 9, \quad |\vec{v}_p| = 3\sqrt{2}, \quad |\vec{v}_q| = 3,$$

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{v}_p \cdot \vec{v}_q|}{|\vec{v}_p| \cdot |\vec{v}_q|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Раван  $\pi$  садржи  $p$  и  $q$ .

$$\vec{n}_\pi \perp \vec{v}_p \text{ и } \vec{n}_\pi \perp \vec{v}_q \Rightarrow \vec{n}_\pi = \frac{1}{3} \vec{v}_p \times \vec{v}_q$$

Раван  $\pi$  садржи  $p$  и  $q$ .

$$\vec{n}_\pi \perp \vec{v}_p \text{ и } \vec{n}_\pi \perp \vec{v}_q \Rightarrow \vec{n}_\pi = \frac{1}{3} \vec{v}_p \times \vec{v}_q$$

$$\vec{n}_\pi = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} (6\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}) = (2, 1, 2).$$

Раван  $\pi$  садржи  $p$  и  $q$ .

$$\vec{n}_\pi \perp \vec{v}_p \text{ и } \vec{n}_\pi \perp \vec{v}_q \Rightarrow \vec{n}_\pi = \frac{1}{3} \vec{v}_p \times \vec{v}_q$$

$$\vec{n}_\pi = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} (6\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}) = (2, 1, 2).$$

Раван  $\pi$  садржи тачку  $P(-2, 5, -4)$  са праве  $p$

$$\alpha: 2 \cdot (x - (-2)) + 1 \cdot (y - 5) + 2 \cdot (z - (-4)) = 0,$$

$$\text{тј. } 2x + y + 2z + 7 = 0.$$





*Решење 2.*     **а)** Нађимо  $p \cap q = T$ .

*Решење 2.*     **а)** Нађимо  $p \cap q = T$ .

$$p: \frac{x+2}{1} = \frac{y-5}{-4} = \frac{z+4}{1} = t \Rightarrow$$

$$x = -2 + t, \quad y = 5 - 4t, \quad z = -4 + t,$$

*Решење 2.*     **а)** Нађимо  $p \cap q = T$ .

$$p: \frac{x+2}{1} = \frac{y-5}{-4} = \frac{z+4}{1} = t \Rightarrow$$

$$x = -2 + t, \quad y = 5 - 4t, \quad z = -4 + t,$$

$$q: \frac{x-2}{2} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z+3}{\lambda} = s \Rightarrow$$

$$x = 2 + 2s, \quad y = -5 - 2s, \quad z = -3 + \lambda s.$$

*Решење 2.*     **а)** Нађимо  $p \cap q = T$ .

$$p: \frac{x+2}{1} = \frac{y-5}{-4} = \frac{z+4}{1} = t \Rightarrow$$

$$x = -2 + t, \quad y = 5 - 4t, \quad z = -4 + t,$$

$$q: \frac{x-2}{2} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z+3}{\lambda} = s \Rightarrow$$

$$x = 2 + 2s, \quad y = -5 - 2s, \quad z = -3 + \lambda s.$$

$T$  припада и  $p$  и  $q$ :

$$x = -2 + t = 2 + 2s$$

$$y = 5 - 4t = -5 - 2s$$

$$z = -4 + t = -3 + \lambda s$$

$$x = -2 + t = 2 + 2s$$

$$y = 5 - 4t = -5 - 2s$$

$$z = -4 + t = -3 + \lambda s$$

Из I и II  $\Rightarrow t = 2$  и  $s = -1$ , што у III даје  $-4 + 2 = -3 + \lambda \cdot (-1)$ , тј.  $\lambda = -1$ .

$$x = -2 + t = 2 + 2s$$

$$y = 5 - 4t = -5 - 2s$$

$$z = -4 + t = -3 + \lambda s$$

Из I и II  $\Rightarrow t = 2$  и  $s = -1$ , што у III даје  $-4 + 2 = -3 + \lambda \cdot (-1)$ , тј.  $\lambda = -1$ .

б)  $-||-$



**Напомена.** Овако смо добили и пресечну тачку  $T(0, -3, -2)$ , док смо првим начином само утврдили да се  $p$  и  $q$  секу.

**3.** сличан са 4.30.

између правих

Израчунати растојање

$$p: \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{2} \text{ и } q: \begin{cases} 2x + y - 2z - 1 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases}.$$

*Решение 1.* Из  $p: \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{2} \Rightarrow$   
 $\vec{v}_p = (1, 2, 2)$  и  $P(3, -1, 2)$ .



*Решење 1.* Из  $p: \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{2} \Rightarrow$

$\vec{v}_p = (1, 2, 2)$  и  $P(3, -1, 2)$ .

Кад решимо  $q: \begin{cases} 2x + y - 2z - 1 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases}$  добијамо

$$q: x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t, \quad y = t, \quad z = t \quad (t \in \mathbb{R})$$

па је  $\vec{v}_q = (\frac{1}{2}, 1, 1)$  и  $Q(\frac{1}{2}, 0, 0)$ .

*Решење 1.* Из  $p: \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{2} \Rightarrow$

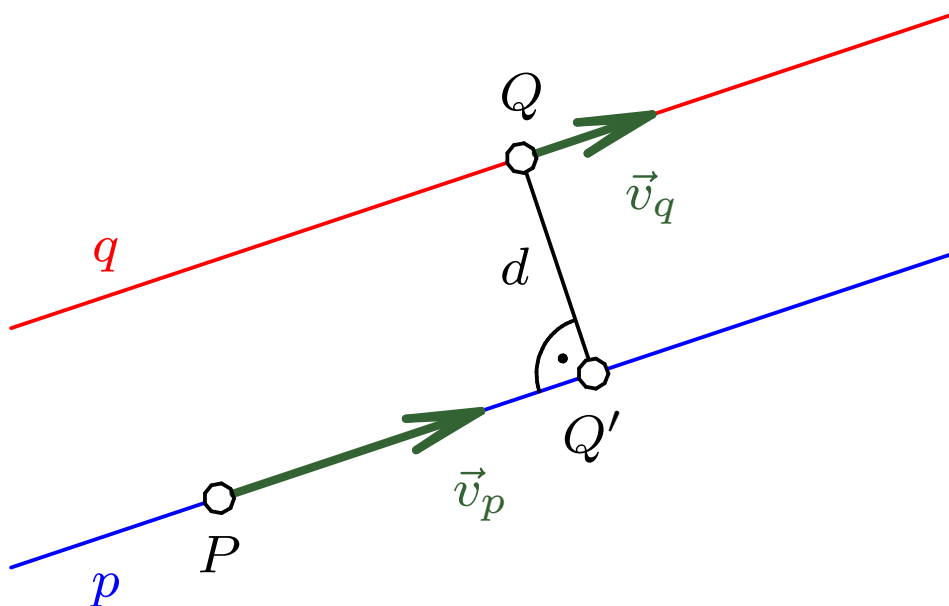
$\vec{v}_p = (1, 2, 2)$  и  $P(3, -1, 2)$ .

Кад решимо  $q: \begin{cases} 2x + y - 2z - 1 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases}$  добијамо

$$q: x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t, \quad y = t, \quad z = t \quad (t \in \mathbb{R})$$

па је  $\vec{v}_q = (\frac{1}{2}, 1, 1)$  и  $Q(\frac{1}{2}, 0, 0)$ .

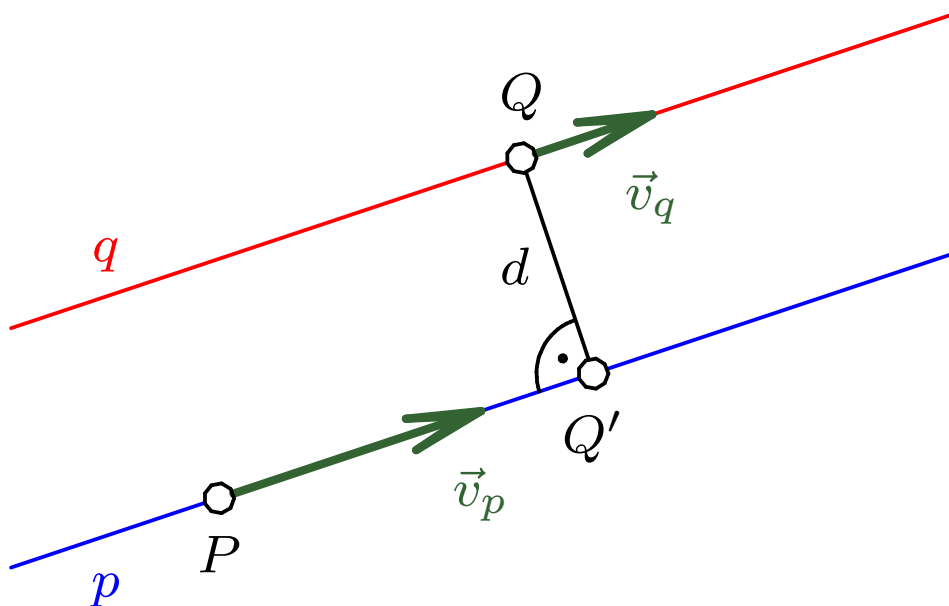
$\vec{v}_q = \frac{1}{2}\vec{v}_p \Rightarrow p$  и  $q$  паралелне.



$$\vec{v}_p = (1, 2, 2), P(3, -1, 2)$$

$$\vec{v}_q = (\frac{1}{2}, 1, 1), Q(\frac{1}{2}, 0, 0)$$

$$\overrightarrow{PQ} = (-\frac{5}{2}, 1, -2)$$



$$\vec{v}_p = (1, 2, 2), P(3, -1, 2) \quad \vec{v}_q = (\tfrac{1}{2}, 1, 1), Q(\tfrac{1}{2}, 0, 0)$$

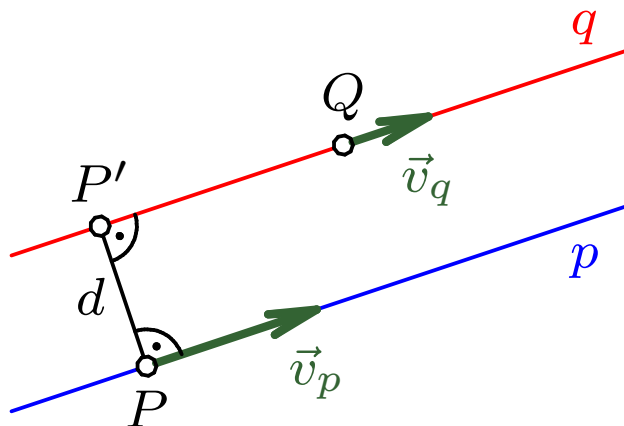
$$\overrightarrow{PQ} = (-\tfrac{5}{2}, 1, -2)$$

$$\vec{v}_p \times \overrightarrow{PQ} = (-6, -3, 6) \Rightarrow |\vec{v}_p \times \overrightarrow{PQ}| = 9. \quad |\vec{v}_p| = 3.$$

$$d(q, p) = d(Q, p) = \frac{|\vec{v}_p \times \overrightarrow{PQ}|}{|\vec{v}_p|} = \frac{9}{3} = 3. \quad \blacksquare$$

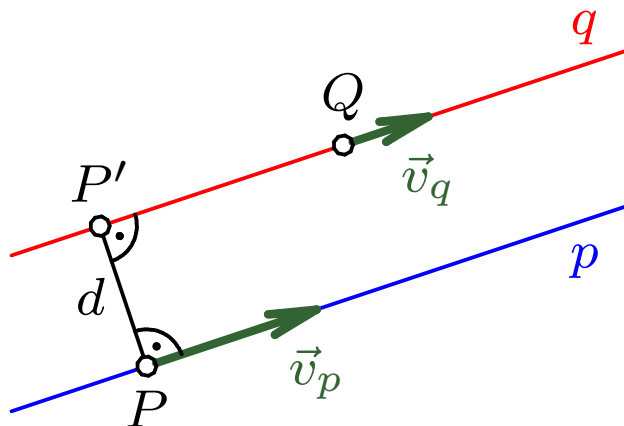
*Решение 2.* Исто:  $\vec{v}_p = (1, 2, 2)$  и  $P(3, -1, 2)$ .

$$q: x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t, \quad y = t, \quad z = t \quad (t \in \mathbb{R})$$



*Решение 2.* Исто:  $\vec{v}_p = (1, 2, 2)$  и  $P(3, -1, 2)$ .

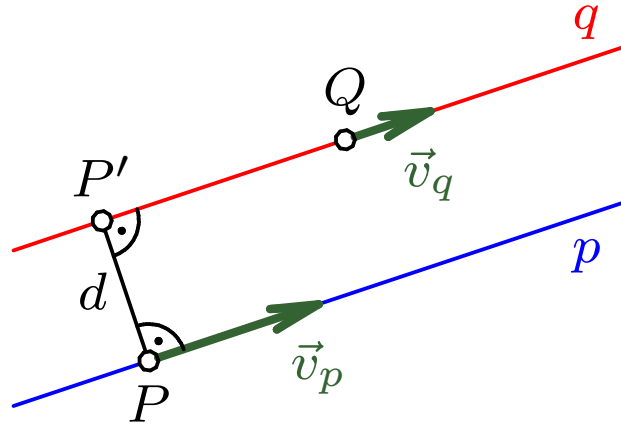
$$q: x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t, \quad y = t, \quad z = t \quad (t \in \mathbb{R})$$



$$P'(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t, t, t) \Rightarrow \overrightarrow{PP'} = (\frac{1}{2}t - \frac{5}{2}, t + 1, t - 2)$$

*Решение 2.* Исто:  $\vec{v}_p = (1, 2, 2)$  и  $P(3, -1, 2)$ .

$$q: x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t, \quad y = t, \quad z = t \quad (t \in \mathbb{R})$$



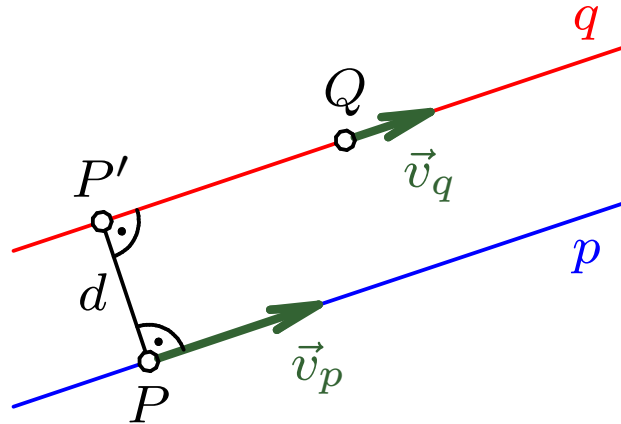
$$P'(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t, t, t) \Rightarrow \overrightarrow{PP'} = (\frac{1}{2}t - \frac{5}{2}, t + 1, t - 2)$$

$$\overrightarrow{PP'} \perp \vec{v}_p \Rightarrow \overrightarrow{PP'} \cdot \vec{v}_p = \frac{1}{2}t - \frac{5}{2} + 2t + 2 + 2t - 4 = 0$$

$$t = 1 \Rightarrow P'(1, 1, 1)$$

*Решение 2.* Исто:  $\vec{v}_p = (1, 2, 2)$  и  $P(3, -1, 2)$ .

$$q: x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t, \quad y = t, \quad z = t \quad (t \in \mathbb{R})$$



$$P'(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t, t, t) \Rightarrow \overrightarrow{PP'} = (\frac{1}{2}t - \frac{5}{2}, t + 1, t - 2)$$

$$\overrightarrow{PP'} \perp \vec{v}_p \Rightarrow \overrightarrow{PP'} \cdot \vec{v}_p = \frac{1}{2}t - \frac{5}{2} + 2t + 2 + 2t - 4 = 0$$

$$t = 1 \Rightarrow P'(1, 1, 1)$$

$$d(p, q) = |\overrightarrow{PP'}| = |(-2, 2, -1)| = \sqrt{9} = 3.$$





4. сличан са 4.47.

Израчунати растојање између правих

$$p: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2} \quad \text{и} \quad q: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}.$$

*Решење 1.*  $p: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}, q: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}$

$$\vec{v}_p = (1, 1, 2), \vec{v}_q = (1, 3, 4) \Rightarrow \vec{v}_p \neq \lambda \cdot \vec{v}_q \Rightarrow$$

$p$  и  $q$  нису паралелне.

*Решење 1.*  $p: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}, q: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}$

$$\vec{v}_p = (1, 1, 2), \vec{v}_q = (1, 3, 4) \Rightarrow \vec{v}_p \neq \lambda \cdot \vec{v}_q \Rightarrow$$

$p$  и  $q$  нису паралелне.

$$P(-1, 0, 1), Q(0, -1, 2) \Rightarrow \overrightarrow{QP} = (-1, 1, -1)$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

$\Rightarrow p$  и  $q$  се не секу

$\Rightarrow p$  и  $q$  су мимоилазне.

$$\vec{v}_p = (1, 1, 2), \quad \vec{v}_q = (1, 3, 4), \quad \overrightarrow{QP} = (-1, 1, -1).$$

$$\vec{v}_p \times \vec{v}_q = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-2, -2, 2)$$

$$(\vec{v}_p \times \vec{v}_q) \cdot \overrightarrow{PQ} = (-2, -2, 2) \cdot (1, -1, 1) = 2$$

$$|\vec{v}_p \times \vec{v}_q| = 2\sqrt{3} \Rightarrow d(p, q) = \frac{|(\vec{v}_p \times \vec{v}_q) \cdot \overrightarrow{PQ}|}{|\vec{v}_p \times \vec{v}_q|} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad \blacksquare$$

*Решење 2.*  $p: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}, q: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}$

Произвољна тачка  $T$  са  $p$  је дата са

$$x = t - 1, \quad y = t, \quad z = 2t + 1 \quad (t \in \mathbb{R}),$$

тј.  $T(t - 1, t, 2t + 1)$

*Решење 2.*  $p: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}, q: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}$

Произвољна тачка  $T$  са  $p$  је дата са

$$x = t - 1, \quad y = t, \quad z = 2t + 1 \quad (t \in \mathbb{R}),$$

тј.  $T(t - 1, t, 2t + 1)$  и слично  $S$  са праве  $q$

$$S(s, 3s - 1, 4s + 2).$$

$$\overrightarrow{TS} = (s - t + 1, 3s - t - 1, 4s - 2t + 1).$$

*Решење 2.*  $p: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}, q: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}$

Произвољна тачка  $T$  са  $p$  је дата са

$$x = t - 1, y = t, z = 2t + 1 \quad (t \in \mathbb{R}),$$

тј.  $T(t - 1, t, 2t + 1)$  и слично  $S$  са праве  $q$

$$S(s, 3s - 1, 4s + 2).$$

$$\overrightarrow{TS} = (s - t + 1, 3s - t - 1, 4s - 2t + 1).$$

$$\begin{aligned} d(p, q) &= \min d(T, S) = \min |\overrightarrow{TS}| \\ &= \min \sqrt{(s - t + 1)^2 + (3s - t - 1)^2 + (4s - 2t + 1)^2} \\ &= \min \sqrt{26s^2 - 24st + 4s + 6t^2 - 4t + 3} \\ &= \sqrt{\min(26s^2 - 24st + 4s + 6t^2 - 4t + 3)}. \end{aligned}$$

$26s^2 + (4 - 24t)s + (6t^2 - 4t + 3)$  има коефицијенте

$$a = 26 > 0 \quad (b = 4 - 24t, \quad c = 6t^2 - 4t + 3)$$



$26s^2 + (4 - 24t)s + (6t^2 - 4t + 3)$  има коефицијенте

$$a = 26 > 0 \quad (b = 4 - 24t, \quad c = 6t^2 - 4t + 3)$$

$$\Rightarrow \text{минимум за } s = -\frac{b}{2a} = -\frac{4 - 24t}{52} = \frac{6t - 1}{13}:$$

$$26\left(\frac{6t-1}{13}\right)^2 + (4-24t) \cdot \frac{6t-1}{13} + (6t^2 - 4t + 3) = \frac{6}{13}t^2 - \frac{28}{13}t + \frac{37}{13}$$

$26s^2 + (4 - 24t)s + (6t^2 - 4t + 3)$  има коефицијенте

$$a = 26 > 0 \quad (b = 4 - 24t, \quad c = 6t^2 - 4t + 3)$$

$$\Rightarrow \text{минимум за } s = -\frac{b}{2a} = -\frac{4 - 24t}{52} = \frac{6t - 1}{13}:$$

$$26\left(\frac{6t-1}{13}\right)^2 + (4-24t) \cdot \frac{6t-1}{13} + (6t^2 - 4t + 3) = \frac{6}{13}t^2 - \frac{28}{13}t + \frac{37}{13}$$

Минимум израза  $\frac{6}{13}t^2 - \frac{28}{13}t + \frac{37}{13}$  се достиже за

$$t = -\frac{b}{2a} = -\frac{-\frac{28}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{7}{3} \text{ и он је}$$

$$\frac{6}{13} \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^2 - \frac{28}{13} \cdot \frac{7}{3} + \frac{37}{13} = \frac{1}{3}.$$

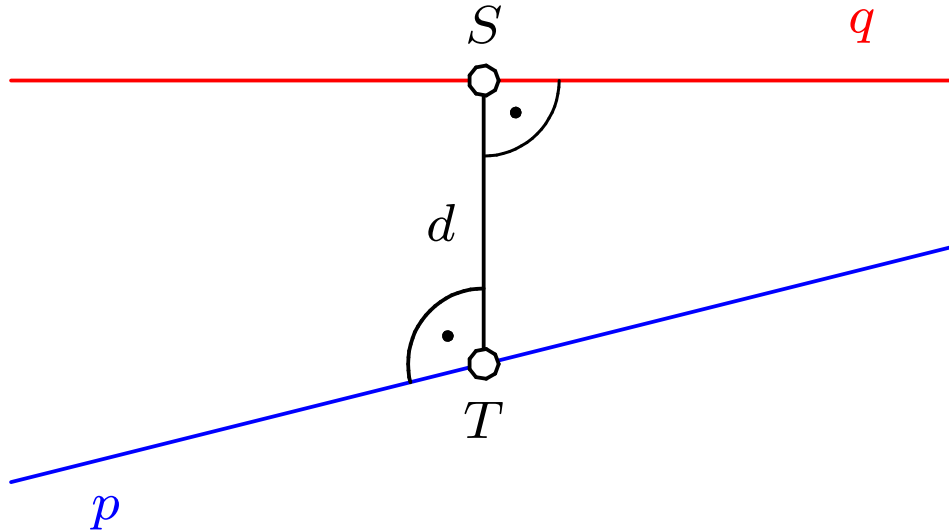
$$\text{Коначно је } d(p, q) = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$



**Напомена 1.** Одредили смо и тачке  $T$  са  $p$  и  $S$  са  $q$  које су на минималном одстојању:

$$t = \frac{7}{3} \Rightarrow T\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{17}{3}\right)$$

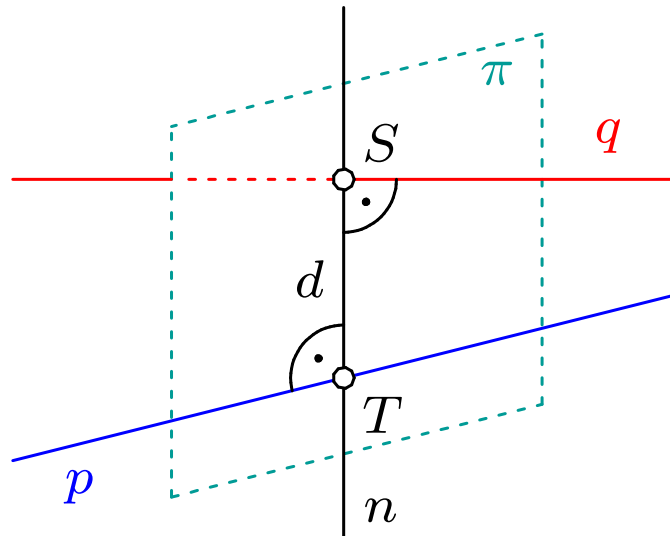
$$s = \frac{6t-1}{13} = \frac{6 \cdot \frac{7}{3} - 1}{13} = 1 \Rightarrow S(1, 2, 6).$$



*Решение 3.*  $n \perp p, n \perp q \Rightarrow \vec{v}_n \perp \vec{v}_p, \vec{v}_n \perp \vec{v}_q.$

$$\vec{v}_p \times \vec{v}_q = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-2, -2, 2)$$

$$\vec{v}_n = -\frac{1}{2}\vec{v}_p \times \vec{v}_q = -\frac{1}{2}(-2, -2, 2) = (1, 1, -1).$$

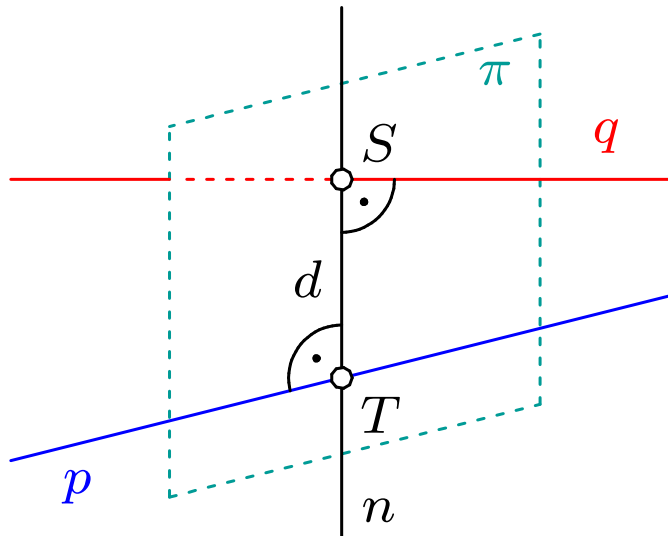


Раван  $\pi$  одређена правама  $p$  и  $n$ :

$$\vec{n}_\pi \perp \vec{v}_p, \vec{n}_\pi \perp \vec{v}_n$$

$$\vec{v}_p \times \vec{v}_n = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-3, 3, 0)$$

$$\vec{n}_\pi = -\frac{1}{3}\vec{v}_p \times \vec{v}_n = (1, -1, 0).$$

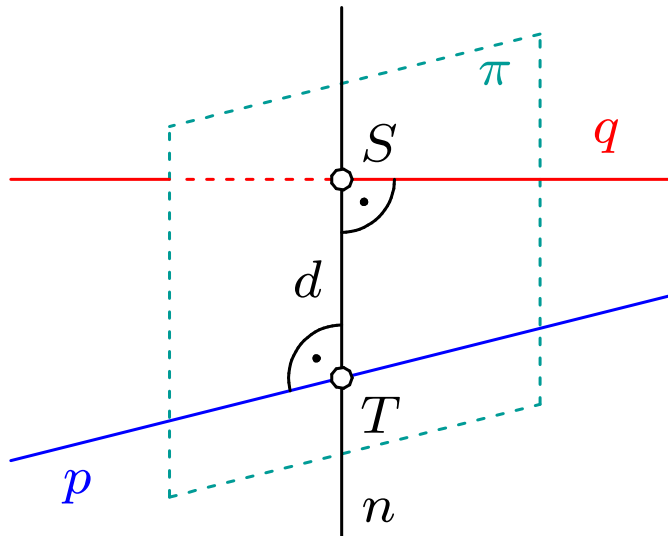


$$\vec{n}_{\pi} = -\frac{1}{3}\vec{v}_p \times \vec{v}_n = (1, -1, 0).$$

$$p \in \pi \Rightarrow P(-1, 0, 1) \in \pi:$$

$$\pi: 1 \cdot (x - (-1)) - 1 \cdot (y - 0) + 0 \cdot (z - 1) = 0, \quad \text{тj.}$$

$$\pi: x - y + 1 = 0.$$



$$\vec{n}_{\pi} = -\frac{1}{3}\vec{v}_p \times \vec{v}_n = (1, -1, 0).$$

$$p \in \pi \Rightarrow P(-1, 0, 1) \in \pi:$$

$$\pi: 1 \cdot (x - (-1)) - 1 \cdot (y - 0) + 0 \cdot (z - 1) = 0, \quad \text{Tj.}$$

$$\pi: x - y + 1 = 0.$$

$$\pi \cap q = S$$

$$\vec{n}_{\pi} = -\frac{1}{3}\vec{v}_p \times \vec{v}_n = (1, -1, 0).$$

$$p \in \pi \Rightarrow P(-1,0,1) \in \pi:$$

$$\pi: 1 \cdot (x - (-1)) - 1 \cdot (y - 0) + 0 \cdot (z - 1) = 0, \text{ Tj.}$$

$$\pi: x - y + 1 = 0.$$

$$\pi \cap q = S:$$

$$\pi: x - y + 1 = 0$$

$$q: x = s, \ y = 3s - 1, \ z = 4s + 2 \quad (s \in \mathbb{R})$$



$$\vec{n}_\pi = -\frac{1}{3}\vec{v}_p \times \vec{v}_n = (1, -1, 0).$$

$$p \in \pi \Rightarrow P(-1, 0, 1) \in \pi:$$

$$\pi: 1 \cdot (x - (-1)) - 1 \cdot (y - 0) + 0 \cdot (z - 1) = 0, \text{ Tj.}$$

$$\pi: x - y + 1 = 0.$$

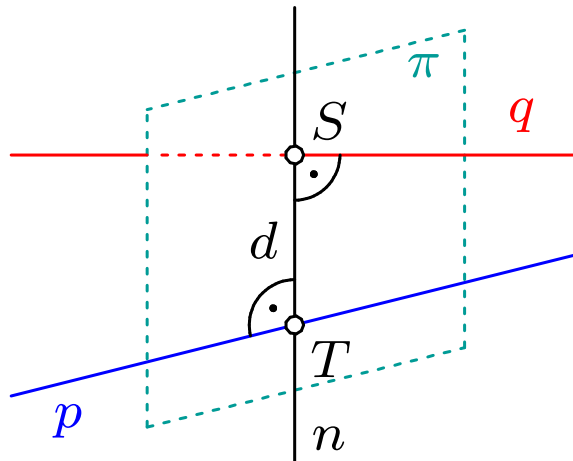
$$\pi \cap q = S:$$

$$\pi: x - y + 1 = 0$$

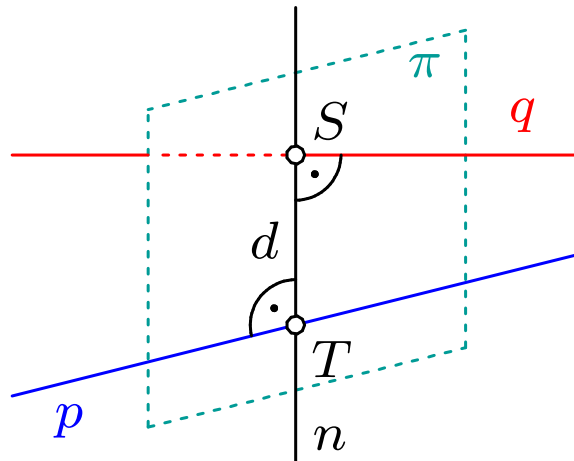
$$q: x = s, \ y = 3s - 1, \ z = 4s + 2 \quad (s \in \mathbb{R})$$

$$x - y + 1 = s - (3s - 1) + 1 = -2s + 2 = 0$$

$$\Rightarrow s = 1 \Rightarrow S(1, 2, 6).$$



$$\vec{v}_p = (1, 1, 2), \quad P(-1, 0, 1), \quad S(1, 2, 6).$$

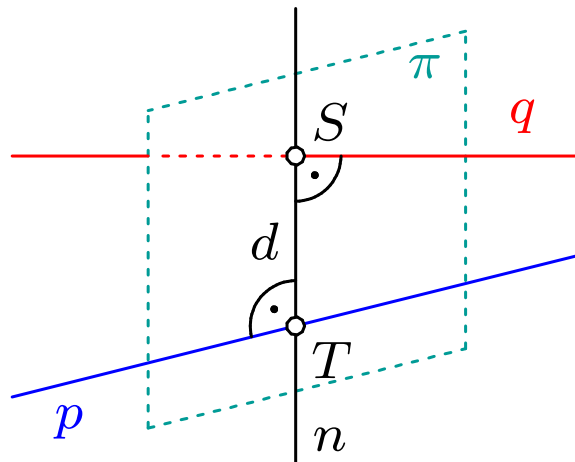


$$\vec{v}_p = (1, 1, 2), \quad P(-1, 0, 1), \quad S(1, 2, 6).$$

$$\overrightarrow{SP} = (-2, -2, -5), \quad \vec{v}_p \times \overrightarrow{SP} = (-1, 1, 0)$$

$$d(p, q) = d(S, p) = \frac{|\vec{v}_p \times \overrightarrow{SP}|}{|\vec{v}_p|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$





**Напомена 2.** Након  $S(1, 2, 6)$  и  $\vec{v}_n = (1, 1, -1)$ ,  
могли смо да одредимо једначину заједничке  
нормале  $n$  на праве  $p$  и  $q$

$$n: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-6}{-1}.$$

Даље  $p \cap q = T(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{17}{3}) \Rightarrow \overrightarrow{ST} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$

$$d(p, q) = |\overrightarrow{ST}| = \sqrt{(\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2 + (-\frac{1}{3})^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

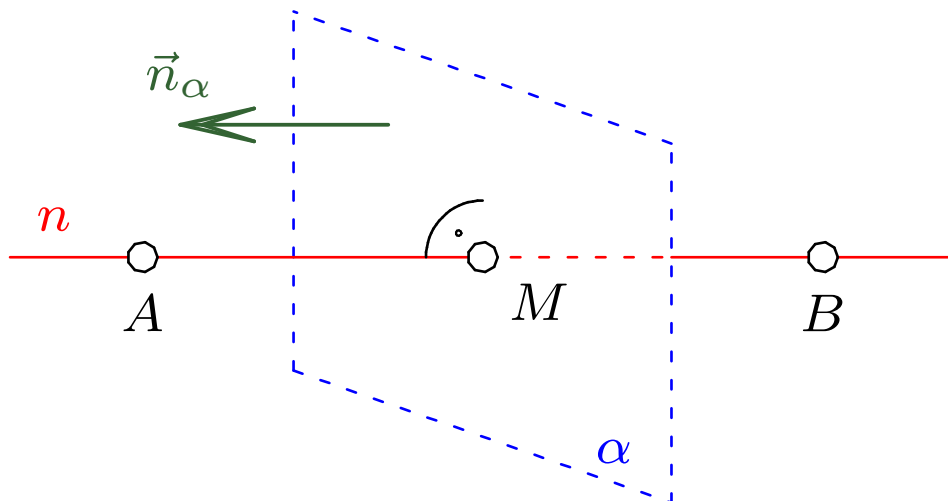
5. сличан са 4.31.

Одредити тачку  $B$  симетричну тачки

$$A(-1, 0, -1)$$

у односу на раван

$$\alpha: 2x + y - z + 7 = 0.$$



*Решење.* Одредимо пројекцију  $M$  тачке  $A$  на раван  $\alpha$ .

$$\vec{v}_n = \vec{n}_\alpha = (2, 1, -1),$$

*Решење.* Одредимо пројекцију  $M$  тачке  $A$  на раван  $\alpha$ .

$$\vec{v}_n = \vec{n}_\alpha = (2, 1, -1), \quad A(-1, 0, -1) \Rightarrow$$

$$n: x = 2t - 1, \quad y = t, \quad z = -t - 1.$$

$$n \text{ у } \alpha \Rightarrow 2(2t-1) + t - (-t-1) + 7 = 0, \text{ тј. } 6t+6 = 0, \\ t = -1 \Rightarrow M(-3, -1, 0).$$

*Решење.* Одредимо пројекцију  $M$  тачке  $A$  на раван  $\alpha$ .

$$\vec{v}_n = \vec{n}_\alpha = (2, 1, -1), \quad A(-1, 0, -1) \Rightarrow$$

$$n: x = 2t - 1, \quad y = t, \quad z = -t - 1.$$

$$n \text{ у } \alpha \Rightarrow 2(2t-1) + t - (-t-1) + 7 = 0, \text{ тј. } 6t + 6 = 0, \\ t = -1 \Rightarrow M(-3, -1, 0).$$

$M$  средиште дужи  $AB$ :

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}, \quad z_M = \frac{z_A + z_B}{2},$$

$$\Rightarrow x_B = 2x_M - x_A = -5, \quad y_B = 2y_M - y_A = -2, \\ z_B = 2z_M - z_A = 1, \text{ тј. } B(-5, -2, 1). \quad \blacksquare$$



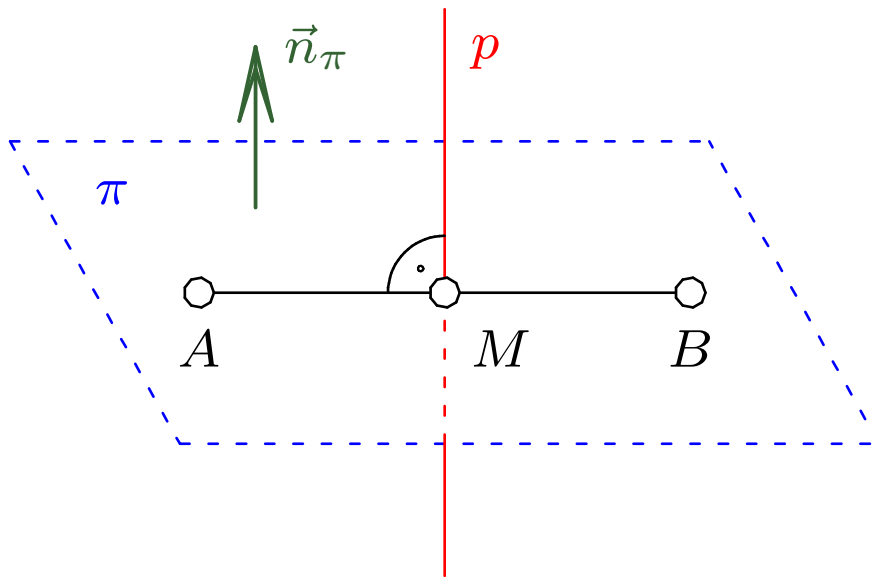
6. сличан са 4.32.

Одредити тачку  $B$  симетричну тачки

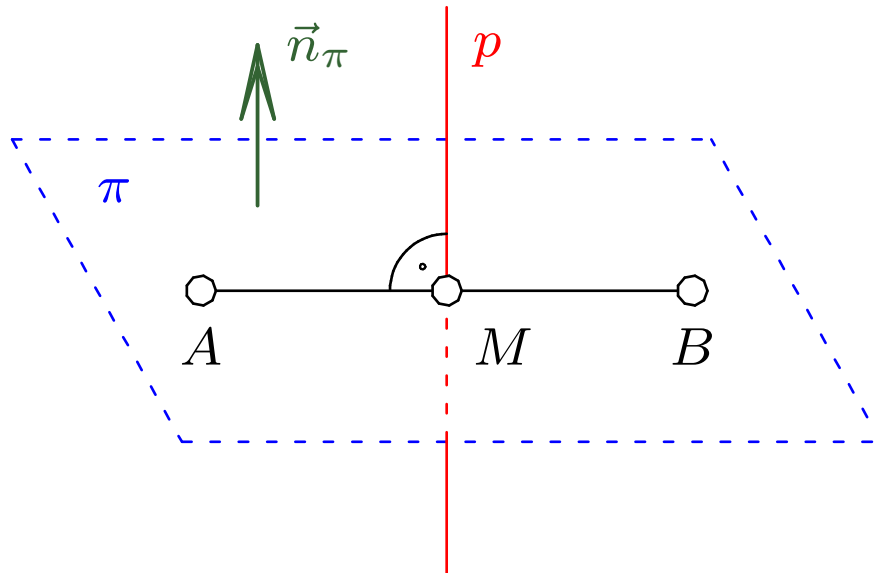
$$A(-1, 0, -1)$$

у односу на праву

$$p: \frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-4}{2}.$$



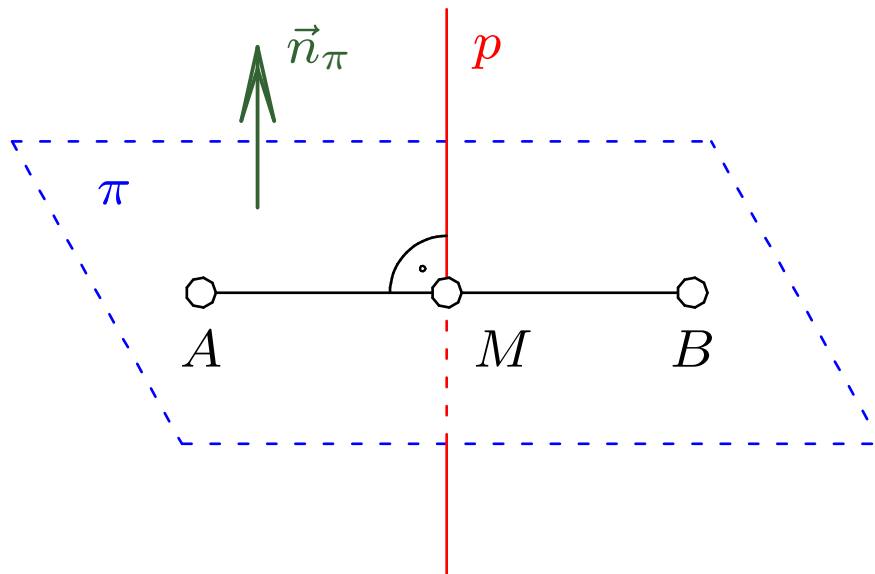
*Решение.*



Раван  $\pi$  садржи  $A$  и  $\pi \perp p$ .

$$\vec{n}_\pi = \vec{v}_p = (1, 0, 2),$$

Решение.

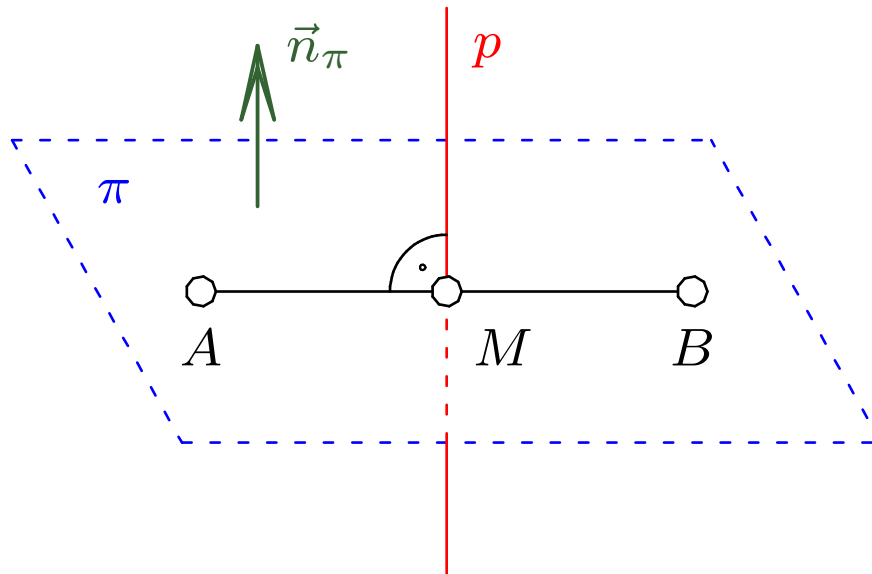


Раван  $\pi$  садржи  $A$  и  $\pi \perp p$ .

$$\vec{n}_\pi = \vec{v}_p = (1, 0, 2), \quad A(-1, 0, -1) \Rightarrow$$

$$\pi: x + 2z + 3 = 0.$$

Решење.



Раван  $\pi$  садржи  $A$  и  $\pi \perp p$ .

$$\vec{n}_\pi = \vec{v}_p = (1, 0, 2), A(-1, 0, -1) \Rightarrow$$

$$\pi: x + 2z + 3 = 0.$$

$$p \cap \pi = M \Rightarrow M(-3, 1, 0).$$

$$A, M \Rightarrow B(-5, 2, 1).$$



## 7. 2. испит октобар 2007.

Дате су тачке

$A(0, 2, -5)$ ,  $B(5, 1, -4)$ ,  $C(1, 3, -3)$  и  $M(3, -7, 9)$ .

Одредити једначину равни којој припадају тачке  $A$ ,  $B$  и  $C$  и одредити пројекцију  $P$  тачке  $M$  на ту раван.

*Решење.*  $A(0, 2, -5), B(5, 1, -4), C(1, 3, -3):$

$$\pi : \begin{vmatrix} x - 0 & y - 2 & z + 5 \\ 5 - 0 & 1 - 2 & -4 + 5 \\ 1 - 0 & 3 - 2 & -3 + 5 \end{vmatrix} = -3x - 9y + 6z + 48 = 0,$$

тј.  $\pi : x + 3y - 2z - 16 = 0.$

*Решење.*  $A(0, 2, -5), B(5, 1, -4), C(1, 3, -3):$

$$\pi : \begin{vmatrix} x - 0 & y - 2 & z + 5 \\ 5 - 0 & 1 - 2 & -4 + 5 \\ 1 - 0 & 3 - 2 & -3 + 5 \end{vmatrix} = -3x - 9y + 6z + 48 = 0,$$

$$\text{тј. } \pi : x + 3y - 2z - 16 = 0.$$

Нормала на раван  $\pi$  из тачке  $M$  је права  $n$ .  
 $M(3, -7, 9), \vec{v}_n = \vec{n}_\pi = (1, 3, -2) \Rightarrow$

$$n : \frac{x - 3}{1} = \frac{y + 7}{3} = \frac{z - 9}{-2}$$

*Решење.*  $A(0, 2, -5), B(5, 1, -4), C(1, 3, -3)$ :

$$\pi : \begin{vmatrix} x - 0 & y - 2 & z + 5 \\ 5 - 0 & 1 - 2 & -4 + 5 \\ 1 - 0 & 3 - 2 & -3 + 5 \end{vmatrix} = -3x - 9y + 6z + 48 = 0,$$

тј.  $\pi : x + 3y - 2z - 16 = 0$ .

Нормала на раван  $\pi$  из тачке  $M$  је права  $n$ .  
 $M(3, -7, 9), \vec{v}_n = \vec{n}_\pi = (1, 3, -2) \Rightarrow$

$$n : \frac{x - 3}{1} = \frac{y + 7}{3} = \frac{z - 9}{-2} \quad (= t)$$

тј.  $x = t + 3, y = 3t - 7, z = -2t + 9,$



*Решење.*  $A(0, 2, -5), B(5, 1, -4), C(1, 3, -3)$ :

$$\pi : \begin{vmatrix} x - 0 & y - 2 & z + 5 \\ 5 - 0 & 1 - 2 & -4 + 5 \\ 1 - 0 & 3 - 2 & -3 + 5 \end{vmatrix} = -3x - 9y + 6z + 48 = 0,$$

$$\text{тј. } \pi : x + 3y - 2z - 16 = 0.$$

Нормала на раван  $\pi$  из тачке  $M$  је права  $n$ .  
 $M(3, -7, 9), \vec{v}_n = \vec{n}_\pi = (1, 3, -2) \Rightarrow$

$$n : \frac{x - 3}{1} = \frac{y + 7}{3} = \frac{z - 9}{-2} \quad (= t)$$

тј.  $x = t + 3, y = 3t - 7, z = -2t + 9$ , што у  $\pi$  даје:

$$\pi : (t + 3) + 3(3t - 7) - 2(-2t + 9) = 16$$

$$\Rightarrow t = \frac{26}{7}, \text{ тј. } P\left(\frac{47}{7}, \frac{29}{7}, \frac{11}{7}\right).$$



8. сличан са 4.36.

Одредити једначину равни  $\alpha$  која садржи тачку

$$A(2, -3, 1)$$

и паралелна је правама

$$p: \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-1}{2} \quad \text{и} \quad q: \frac{x-7}{2} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2} .$$

*Решение.*  $\alpha \parallel p, \alpha \parallel q \Rightarrow \vec{n}_\alpha \perp \vec{v}_p, \vec{n}_\alpha \perp \vec{v}_q.$

$$\vec{n}_\alpha = -\frac{1}{2}\vec{v}_p \times \vec{v}_q = (1, 1, 0),$$

*Решение.*  $\alpha \parallel p, \alpha \parallel q \Rightarrow \vec{n}_\alpha \perp \vec{v}_p, \vec{n}_\alpha \perp \vec{v}_q.$

$$\vec{n}_\alpha = -\frac{1}{2}\vec{v}_p \times \vec{v}_q = (1, 1, 0), A(2, -3, 1) \Rightarrow$$

$$\alpha: 1 \cdot (x - 2) + 1 \cdot (y - (-3)) + 0 \cdot (z - 1) = 0,$$

$$\text{т.е. } \alpha: x + y + 1 = 0.$$



9. сличан са 4.47.

Одредити једначину праве која садржи

$$A(2, -3, 1)$$

и сече праве

$$p: \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-1}{2} \quad \text{и} \quad q: \frac{x-7}{2} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}.$$

*Решење 1.* Права  $a$  кроз  $A(2, -3, 1)$  је

$$a: \frac{x - 2}{u} = \frac{y + 3}{v} = \frac{z - 1}{w}$$

*Решење 1.* Права  $a$  кроз  $A(2, -3, 1)$  је

$$a: \frac{x - 2}{u} = \frac{y + 3}{v} = \frac{z - 1}{w}$$

$p$  и  $a$  се секу

$$\begin{vmatrix} (-1) - 2 & (-2) - (-3) & 1 - 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ u & v & w \end{vmatrix} = 2u + 6v + 6w = 0.$$

*Решење 1.* Права  $a$  кроз  $A(2, -3, 1)$  је

$$a: \frac{x-2}{u} = \frac{y+3}{v} = \frac{z-1}{w}$$

$p$  и  $a$  се секу

$$\begin{vmatrix} (-1) - 2 & (-2) - (-3) & 1 - 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ u & v & w \end{vmatrix} = 2u + 6v + 6w = 0.$$


$q$  и  $a$  се секу

$$\begin{vmatrix} 7 - 2 & (-4) - (-3) & 1 - 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ u & v & w \end{vmatrix} = -2u - 10v - 8w = 0.$$



Добили смо хомогени систем

$$\begin{array}{rrcr} 2u & + & 6v & + & 6w & = & 0 \\ -2u & - & 10v & - & 8w & = & 0 \end{array}$$

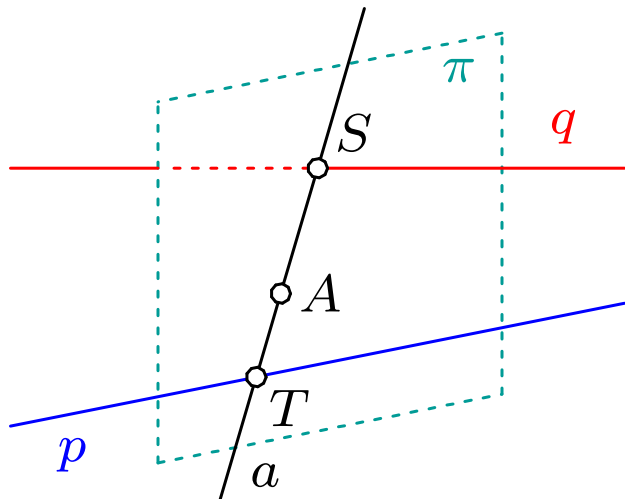
Једно решење  $w = -2$ ,  $v = 1$ ,  $u = 3$ , тј. тражена  
права је  $a: \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{-2}$ . 

*Решење 2.*  $p \nparallel q$  јер је  $\vec{v}_q \neq \lambda \cdot \vec{v}_p$ .

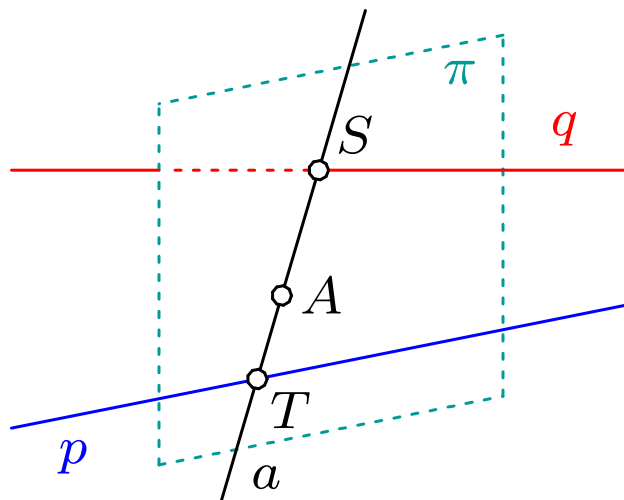
*Решење 2.*  $p \nparallel q$  јер је  $\vec{v}_q \neq \lambda \cdot \vec{v}_p$ .

$p$  и  $q$  се не секу:

$$\begin{vmatrix} (-1) - 7 & (-2) - (-4) & 1 - 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$$



Раван  $\pi$  садржи праве  $p$  и  $a$ , тј.  $p$  и  $A(2, 3, 1)$ .



Раван  $\pi$  садржи праве  $p$  и  $a$ , тј.  $p$  и  $A(2, 3, 1)$ .  
 $P(-1, -2, 1)$  из канонског облика праве  $p$ :

$$\vec{n}_\pi = \vec{v}_p \times \overrightarrow{PA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (2, 6, 6).$$

$$\pi: 2 \cdot (x - 2) + 6 \cdot (y - (-3)) + 6 \cdot (z - 1) = 0,$$

$$\vec{n}_{\pi} = \vec{v}_p \times \overrightarrow{PA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (2, 6, 6).$$

$$\pi: 2 \cdot (x - 2) + 6 \cdot (y - (-3)) + 6 \cdot (z - 1) = 0,$$

$$\text{тj. } \pi: 2x + 6y + 6z + 8 = 0.$$

$$\pi: 2 \cdot (x - 2) + 6 \cdot (y - (-3)) + 6 \cdot (z - 1) = 0,$$

$$\text{Tj. } \pi: 2x + 6y + 6z + 8 = 0.$$

$$q: \frac{x-7}{2} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2} ,$$

$$q: x = 2s + 7, \ y = -2s - 4, \ 2s + 1.$$

$$\pi : 2 \cdot (x - 2) + 6 \cdot (y - (-3)) + 6 \cdot (z - 1) = 0,$$

$$\text{Tj. } \pi : 2x + 6y + 6z + 8 = 0.$$

$$q : \frac{x-7}{2} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2} ,$$

$$q : x = 2s + 7, \ y = -2s - 4, \ 2s + 1.$$

$$\pi \cap q = S:$$

$$2 \cdot (2s + 7) + 6(-2s - 4) + 6(2s + 1) + 8 = 0$$

$$\Rightarrow 4s + 4 = 0 \Rightarrow s = -1 \Rightarrow S(5, -2, -1).$$



$$\pi: 2 \cdot (x - 2) + 6 \cdot (y - (-3)) + 6 \cdot (z - 1) = 0,$$

$$\text{тj. } \pi: 2x + 6y + 6z + 8 = 0.$$

$$q: \frac{x-7}{2} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2},$$

$$q: x = 2s + 7, y = -2s - 4, z = 2s + 1.$$

$$\pi \cap q = S:$$

$$2 \cdot (2s + 7) + 6(-2s - 4) + 6(2s + 1) + 8 = 0$$

$$\Rightarrow 4s + 4 = 0 \Rightarrow s = -1 \Rightarrow S(5, -2, -1).$$

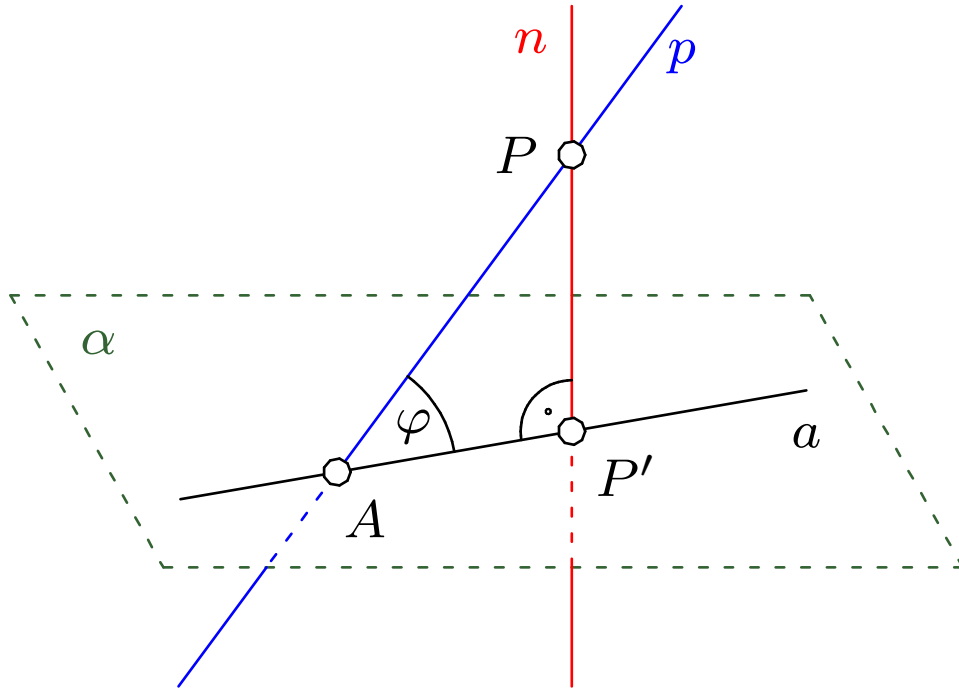
$$\text{Правая } a \text{ кроз } A \text{ и } S \Rightarrow \vec{v}_a = \frac{1}{3} \overrightarrow{AS} = (3, 1, -2)$$

$$A(2, 3, 1) \Rightarrow a: \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{-2}.$$



**10.** Дата је раван  $\alpha: x + y - z + 1 = 0$  и права  $p: \frac{x-1}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$ . Одредити

- а)** пресечну тачку праве  $p$  и равни  $\alpha$ ;
- б)** меру угла између праве  $p$  и равни  $\alpha$ .



*Решение 1.*     **a)**  $p: \frac{x-1}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1} \Rightarrow$

$$p: x = 1, y = 2t, z = t - 1$$

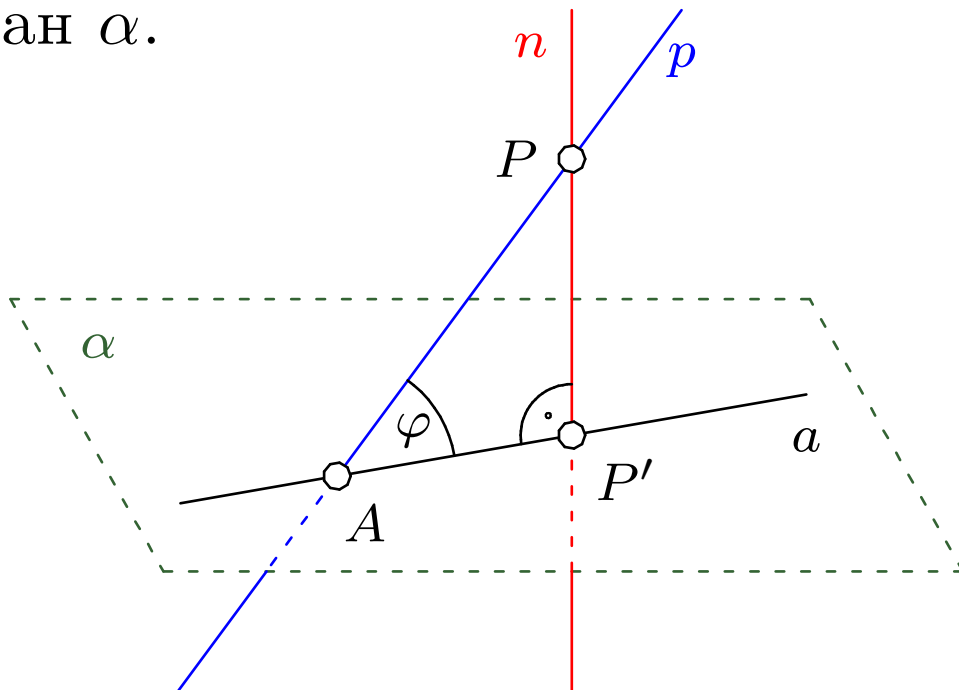
*Решение 1.*     **a)**  $p: \frac{x-1}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1} \Rightarrow$

$$p: x = 1, y = 2t, z = t - 1 \text{ y } \alpha: x + y - z + 1 = 0$$

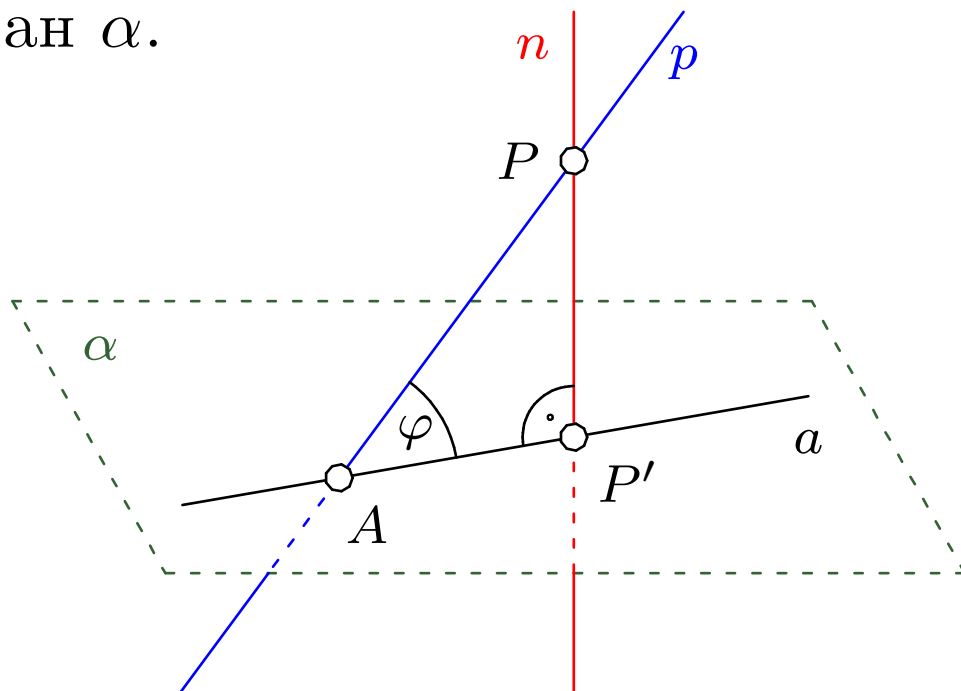
$$1 + 2t - (t - 1) + 1 = 0,$$

$$\text{т.е. } t = -3 \Rightarrow A(1, -6, -4).$$

б) Одредимо пројекцију  $P'$  тачке  $P$  ( $P \neq A$ ) са  $p$  на раван  $\alpha$ .



6) Одредимо пројекцију  $P'$  тачке  $P$  ( $P \neq A$ ) са  $p$  на раван  $\alpha$ .



$$P(1, 0, -1)$$

$$n \perp \alpha \Rightarrow \vec{v}_n = \vec{n}_\alpha = (1, 1, -1) \Rightarrow$$

$$n: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1},$$

6) Одредимо пројекцију  $P'$  тачке  $P$  ( $P \neq A$ ) са  $p$  на раван  $\alpha$ .

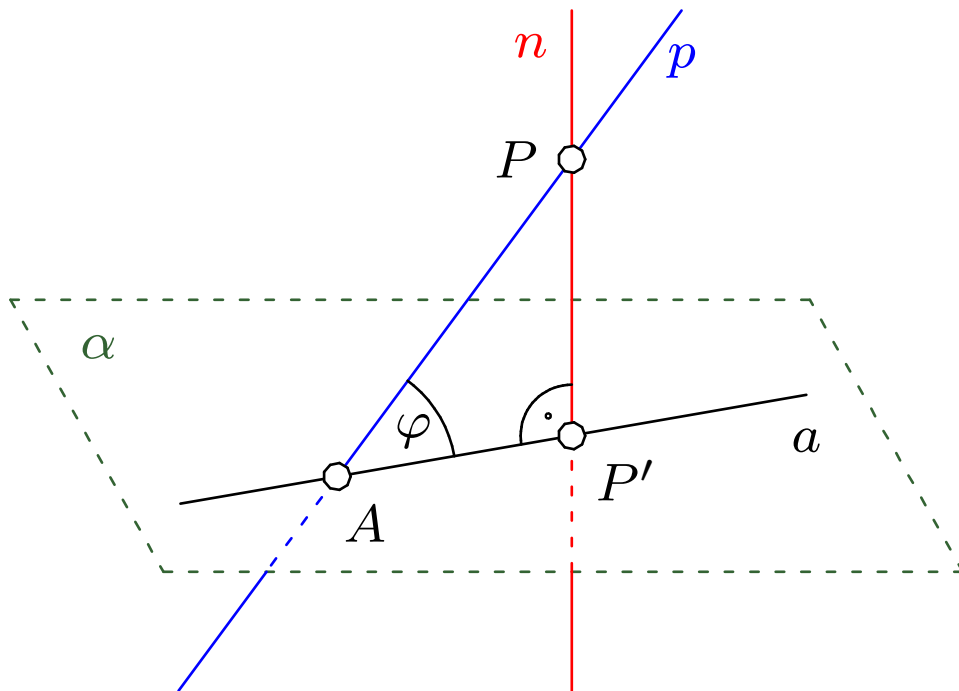
$$P(1, 0, -1)$$

$$n \perp \alpha \Rightarrow \vec{v}_n = \vec{n}_\alpha = (1, 1, -1) \Rightarrow$$

$$n: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1},$$

$$\text{тј. } n: x = s + 1, y = s, z = -s - 1.$$

$$\alpha: (s + 1) + s - (-s - 1) + 1 = 0 \Rightarrow s = -1, \text{ тј. } P'(0, -1, 0).$$



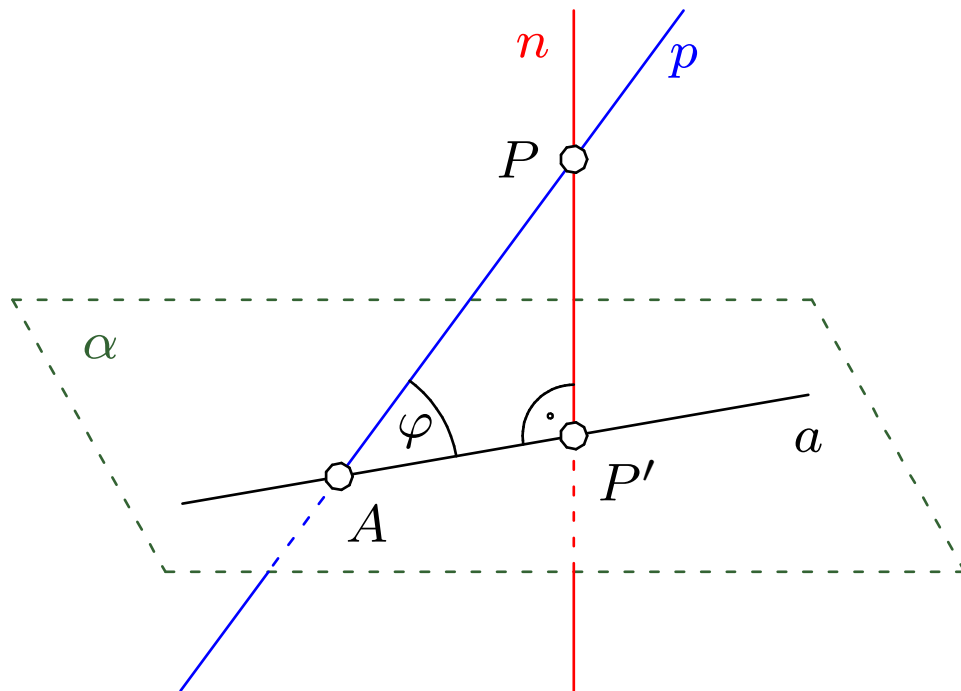
$A(1, -6, -4), P(1, 0, -1), P'(0, -1, 0)$ .  $\mathbb{U}_3 \triangle AP'P$ :

$$\cos \varphi = \frac{|\overrightarrow{P'A}|}{|\overrightarrow{PA}|} = \frac{|(-1, 5, 4)|}{|(0, 6, 3)|} = \frac{\sqrt{42}}{\sqrt{45}} = \sqrt{\frac{14}{15}},$$

$$\varphi = \arccos \sqrt{\frac{14}{15}}.$$







**Напомена.** Да се тражила пројекција  $a$  праве  $p$  на раван  $\alpha$ , одредили би је као праву кроз тачке  $A$  и  $P'$ .

*Решење 2.*     а) —||—

б) Угао  $\varphi$  између праве  $p$  и равни  $\alpha$ :

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{v}_p \cdot \vec{n}_\alpha|}{|\vec{v}_p| \cdot |\vec{n}_\alpha|}.$$

Решење 2. а) —||—

б) Угао  $\varphi$  између праве  $p$  и равни  $\alpha$ :

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{v}_p \cdot \vec{n}_\alpha|}{|\vec{v}_p| \cdot |\vec{n}_\alpha|}.$$

$$\vec{v}_p = (0, 2, 1), \vec{n}_\alpha = (1, 1, -1) \Rightarrow$$

$$\sin \varphi = \frac{|1|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{15}},$$

$$\text{тј. } \varphi = \arcsin \frac{1}{\sqrt{15}}.$$



**КРАЈ ЧАСА**