МАТЕМАТИКА 1

Први писмени колоквијум, 30.11.2013

Група 6

Решења задатака и резултати

Проф Драган Ђорић

Задаци и решења

1. Нека је $\mathcal{A} = \{(a,b) \,:\, a,b \in \mathbb{Q},\ a \neq 0\}$ и нека је операција $*$ дефинисана са

$$(a,b) * (x,y) = (-ax, x - bx + y)$$

за све $(a,b),(x,y) \in \mathcal{A}$. Испитати да ли је $(\mathcal{A},*)$ група. Да ли је дата операција комутативна?

Решење:

1. *Операција $*$ је затворена у скупу $\mathcal{A}$* јер из $a,b,x,y \in \mathbb{Q}$ следи $-ax, x - bx + y \in \mathbb{Q}$, а из $a \neq 0$ и $x \neq 0$ следи да је $-ax \neq 0$.
2. *Операција $*$ је асоцијативна* јер је
$$((a,b)*(x,y))*(u,v) = (-ax, x-bx+y)*(u,v) = (axu, u - xu + bxu - yu + v)$$
и
$$(a,b)*((x,y)*(u,v)) = (a,b)*(-xu, u - yu + v) = (axu, -xu + bxu + u - yu + v).$$
3. Из једнакости $(a,b)*(e_1,e_2) = (a,b)$, односно $(-ae_1, e_1 - be_1 + e_2) = (a,b)$, добијамо да је $e_1 = -1$ и $e_2 = 1$. Како је $(-1,1)*(a,b) = (a, a - a + b) = (a,b)$ и $(-1,1) \in \mathcal{A}$, то је $(-1,1)$ *неутрални елемент у односу на операцију $*$*.
4. Обзиром да је $a \neq 0$ за свако $(a,b) \in \mathcal{A}$, из једнакости $(a,b)*(u,v) = (-1,1)$, односно $(-au, u - bu + v) = (-1,1)$ имамо да је $u = \dfrac{1}{a}$ и $v = 1 - \dfrac{1}{a} + \dfrac{b}{a}$ и $(u,v) \in \mathcal{A}$. Како је још и
$$\left(\frac{1}{a}, 1 - \frac{1}{a} + \frac{b}{a}\right) * (a,b) = (-1,1),$$
сваки елемент (a,b) скупа $\mathcal{A}$ има свој инверзни елемент.

На основу (1)-(4) следи да је структура $(\mathcal{A},*)$ група. Међутим, из једнакости

$$(1,0)*(1,1) = (-1,2), \quad (1,1)*(1,0) = (-1,-1)$$

следи да $*$ није комутативна операција, па структура $(\mathcal{A},*)$ није Абелова група.

2. Одредити сопствене вредности и њима одговарајуће сопствене векторе матрице

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Решење: Како је

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 15\lambda + 8 = -(\lambda - 8)(\lambda + 1)^2,$$

сопствене вредности матрице A су $\lambda_1 = 8$ и $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$.

За $\lambda = \lambda_1$ из једначине $Av = 8v$, где је $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, добијамо систем који је еквивалентан систему

$$-5x + 2y + 4z = 0, \quad x - 4y + z = 0.$$

Овај систем има једнопараметарски скуп решења, а одговарајући сопствени вектори су облика

$$v(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} t, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

За $\lambda = -1$ из једначине $Av = -v$ добијамо систем који је еквивалентан једначини

$$2x + y + 2z = 0.$$

Скуп решења ове једначине је двопараметарски, а одговарајући сопствени вектори су облика

$$v(x,z) = \begin{pmatrix} x \\ -2x-2z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} z, \quad (x,z) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

3. У зависности од вредности реалног параметра m дискутовати и решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 7y & - & mz & = & -1 \\ -2x & - & my & + & z & = & m \\ 2x & + & 25y & + & (1-4m)z & = & -1. \end{array}$$

Решење: Нека је D детерминанта матрице датог система. Како је $D = (2m-1)(m-3)$, постоје три случаја.

(1) За $m \notin \{1/2, 3\}$ систем има јединствено решење

$$(x,y,z) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}, \frac{D_z}{D} \right),$$

где је

$$D_x = \begin{vmatrix} -1 & 7 & -m \\ m & -m & 1 \\ -1 & 25 & 1-4m \end{vmatrix} = -6(m-3), \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -m \\ -2 & m & 1 \\ 2 & -1 & 1-4m \end{vmatrix} = -(2m-1)(m-3),$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -1 \\ -2 & -m & m \\ 2 & 25 & -1 \end{vmatrix} = -12(m-3).$$

Дакле, у овом случају је $(x,y,z) = \left(\dfrac{6}{1-2m}, -1, \dfrac{12}{1-2m} \right)$.

(2) За $a = 1/2$ дати систем нема решења јер је $D = 0$ и $D_x = 15 \neq 0$.

(3) За $a = 3$ дати систем еквивалентан је систему

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 7y & - & 3z & = & -1 \\ & & 11y & - & 5z & = & 1 \end{array}$$

који има једнопараметарски скуп решења. Ако је z слободна променљива, тада је $x = -(2z + 18/11$ и $y = (5z+1)/11$. Дакле, у овом случају,

$$(x,y,z) \in \left\{ \left(-\frac{2}{11}\alpha - \frac{18}{11}, \frac{5}{11}\alpha + \frac{1}{11}, \alpha \right), \ \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. Дати су вектори

$$e_1 = (4, -1, -2, 10), \quad e_2 = (1, a-2, 0, 2), \quad e_3 = (-2, -2, -4, a-8), \quad e_4 = (1, 1, 2, 3)$$

у векторском простору $V = (\mathbb{R}^4, \mathbb{R}, +, \cdot)$, где је $a \in \mathbb{R}$.

а) Одредити вредности параметра a за које су дати вектори линеарно независни.

б) За $a = -1$ испитати да ли дати вектори чине базу векторског простора V. Уколико чине базу, одредити координате вектора $v = (1, 0, -1, 0)$ у тој бази, а у супротном изразити вектор e_1 као линеарну комбинацију вектора e_2, e_3 и e_4.

Решење: **а)** Дати вектори су линеарно независни ако из једнакости

$$\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 + \delta e_4 = 0$$

следи да је $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$. Из наведене једнакости добијамо хомоген систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 4\alpha & + & \beta & - & 2\gamma & + & \delta & = & 0 \\ -\alpha & + & (a-2)\beta & - & 2\gamma & + & \delta & = & 0 \\ -2\alpha & & & - & 4\gamma & + & 2\delta & = & 0 \\ 10\alpha & + & 2\beta & + & (a-8)\gamma & + & 3\delta & = & 0 \end{array}$$

који има тривијално решење ако и само ако је детерминанта D овог система различита од нуле. Како је

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & a-2 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -4 & 2 \\ 10 & 2 & a-8 & 3 \end{vmatrix} = -10a^2 + 40a - 40 = -10(a-2)^2,$$

дати вектори су линеарно независни за $a \neq 2$.

б) За $a = -1$ из **а)** следи да су дати вектори линеарно независни. Како је $dim(V) = 4$, дати вектори чине базу простора V.

Из једнакости

$$(1, 0, -1, 0) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4$$

имамо систем $AX = V$, где је A матрица хомогеног система из **а)**, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ и $V = v^T$.

Решавањем овог система (на пример, Крамеровим правилом) добијамо $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = -\frac{1}{6}$, $x_3 = \frac{5}{6}$ и $x_3 = \frac{3}{2}$. Према томе,

$$v = \frac{1}{3}e_1 - \frac{1}{6}e_2 + \frac{5}{6}e_3 + \frac{3}{2}e_4.$$