A I колоквијум из Математике 1 A

15. новембар 2008.

презиме и име студента	**број индекса**	**група за вежбе**

1. Дата је структура $(A, \cdot)$, при чему је

$$A = \left\{ a - b\sqrt{5} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \right\}.$$

Испитати које од следећих особина има структура $(A, \cdot)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(A, \cdot)$ група? Да ли је структура $(A, \cdot)$ Абелова група?

2. Дате су матрице

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Проверити да ли је матрица $A + B$ регуларна, па ако јесте решити матричну једначину

$$XA - C = -XB.$$

3. У зависности од реалног параметра α решити систем $\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 2 \\ -x & & & + & z & = & -3 \\ 3x & + & 2y & + & \alpha \cdot z & = & 7 \end{array}$.

4. Дати су вектори

$$\vec{a} = \lambda\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}, \qquad \vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j}, \qquad \vec{c} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 4\lambda\vec{k} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

а) Одредити вредности λ_1 и λ_2 параметра λ за које су вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарни.

б) За $\lambda = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$ изразити вектор $\vec{a}$ помоћу вектора $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

5. Одредити раван α која садржи праву p и тачку A, где је

$$p\colon \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+1}{-2}, \qquad A(3, 2, 0).$$

Б # I колоквијум из Математике 1 Б

15. новембар 2008.

___________________________________ ______________ ________

презиме и име студента **број индекса** **група за вежбе**

1. Дата је структура $(A, \cdot)$, при чему је

$$A = \left\{ a\sqrt{3} - b \;\mid\; a, b \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Испитати које од следећих особина има структура $(A, \cdot)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(A, \cdot)$ група? Да ли је структура $(A, \cdot)$ Абелова група?

2. Израчунати детерминанту $D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & b \end{vmatrix}$. За које вредности параметра b је $D = 0$?

3. У зависности од реалног параметра β решити систем $\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & w & = & 2 \\ -x & & & + & z & + & w & = & -3 \\ 3x & + & 2y & + & z & + & \beta \cdot w & = & 7 \end{array}$.

4. Дате су тачке

$$A(1,1,1), \qquad B(2,0,2), \qquad C(2,2,2), \qquad D(3,4,-3).$$

а) Израчунати запремину тетраедра $ABCD$.

б) Израчунати дужину висине тетраедра из темена D.

5. Одредити раван α која садржи праву p и тачку A, где је

$$p\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1}, \qquad A(2,-1,1).$$

I колоквијум из Математике 1

B

15. новембар 2008.

презиме и име студента **број индекса** **група за вежбе**

1. Дата је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$, при чему је

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ -a & 0 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{Q}, a \neq 0 \right\}$$

и $\cdot$ означава операцију множења матрица.
Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{M}, \cdot)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ Абелова група?

2. Израчунати детерминанту $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 4 \\ -4 & 1 & 4 & w \end{vmatrix}$. За које вредности параметра w је $D = 0$?

3. У зависности од реалног параметра ν решити систем $\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 2 \\ 3x & + & 2y & + & z & = & 7 \\ -x & & & + & z & = & \nu \end{array}$.

4. Дати су вектори

$$e_1 = (3, -2, 1), \qquad e_2 = (2, 1, 2), \qquad e_3 = (3, -1, -2).$$

а) Доказати да вектори e_1, e_2 и e_3 образују базу простора $\mathbb{R}^3$.

б) Одредити координате вектора $x = (4, -4, -3)$ у бази $\{e_1, e_2, e_3\}$.

5. Одредити угао φ између правих p и q, где је

$$p\colon \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-5}{2}, \qquad q\colon \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & 2y & - & z & + & 3 & = & 0 \\ x & + & y & & & - & 1 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Г I колоквијум из Математике 1 Г

15. новембар 2008.

презиме и име студента	**број индекса**	**група за вежбе**

1. Дата је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$, при чему је

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -x \\ 0 & x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

и $\cdot$ означава операцију множења матрица.
Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{M}, \cdot)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ Абелова група?

2. Дате су матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Проверити да ли је матрица $2A + B$ регуларна, па ако јесте решити матричну једначину

$$2XA = C - XB.$$

3. У зависности од реалног параметра Γ решити систем $\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & 2w & = & 0 \\ -x & + & y & & & + & 2w & = & -5 \\ 3x & + & y & + & 2z & + & \Gamma \cdot w & = & 5 \end{array}$.

4. Вектори e_1, e_2 и e_3 образују базу неког векторског простора. Ако је

$$\begin{array}{rcrcrcrl} a & = & 3e_1 & + & me_2 & + & 3e_3, & \\ b & = & me_1 & + & 5e_2 & + & 4e_3, & \\ c & = & e_1 & + & 3e_2 & + & 2e_3, & \qquad (m \in \mathbb{R}) \end{array}$$

испитати линеарну зависност вектора a, b и c у зависности од параметра m.

5. Одредити угао φ између правих p и q, где је

$$p \colon \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & - & 2z & + & 5 & = & 0 \\ -x & + & y & + & z & - & 2 & = & 0 \end{array} \right., \qquad q \colon \frac{x+2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-3}{1}.$$

Д I колоквијум из Математике 1 Д

15. новембар 2008.

презиме и име студента	број индекса	група за вежбе

1. Дата је структура $(A,*)$, при чему је

$$A = (3, +\infty)$$

и нека је операција $*$ задата на следећи начин:

$$x * y = 3xy - 9x - 9y + 30.$$

Испитати које од следећих особина има структура $(A,*)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(A,*)$ група? Да ли је структура $(A,*)$ Абелова група?

2. Решити матричну једначину

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot X + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

3. У зависности од реалног параметра δ решити систем
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & + & w & = & 2 \\ 3x & + & y & + & 2z & + & w & = & 7 \\ -x & + & y & & & + & w & = & \delta \end{array}.$$

4. Дати су вектори

$$\vec{a} = (m-3, 3, -1), \qquad \vec{b} = (1, -1, 3), \qquad \vec{c} = (1, m+4, -11) \qquad (m \in \mathbb{R}).$$

а) Одредити вредности параметра m тако да вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ буду линеарно зависни.

б) За вредност m из дела под а), која је цео број, изразити вектор $\vec{c}$ помоћу вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

5. Одредити раван α која садржи праву p и паралелна је правој q, где је

$$p\colon \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}, \qquad q\colon \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{3}.$$

E # I колоквијум из Математике 1 **E**

15. новембар 2008.

презиме и име студента	**број индекса**	**група за вежбе**

1. Дата је структура $(A, *)$, при чему је

$$A = (-3, +\infty)$$

и нека је операција $*$ задата на следећи начин:

$$x * y = 2xy + 6x + 6y + 15.$$

Испитати које од следећих особина има структура $(A, *)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(A, *)$ група? Да ли је структура $(A, *)$ Абелова група?

2. Испитати ранг матрице

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

у зависности од реалног параметра λ.

3. У зависности од реалног параметра ε решити систем $\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 3y & - & z & = & 1 \\ 3x & - & 10y & - & 6z & = & 2 \\ -2x & + & 3y & - & 7z & = & \varepsilon \\ x & - & 2y & + & 2z & = & 2 \end{array}$.

4. Дате су тачке

$$A(2, -3, 5), \qquad B(0, 2, 1), \qquad C(-2, -2, 3), \qquad D(3, 2, 4).$$

а) Израчунати запремину тетраедра $ABCD$.

б) Израчунати дужину висине тетраедра из темена A.

5. Одредити раван α која садржи праву p и паралелна је правој q, где је

$$p\colon \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z+1}{1}, \qquad q\colon \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-3}.$$

I колоквијум из Математике 1

Л

15. новембар 2008.

презиме и име студента **број индекса** **група за вежбе**

1. Дата је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$, при чему је

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & -\beta & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & \beta \end{bmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha^2 + \beta^2 \neq 0 \right\}$$

и $\cdot$ означава операцију множења матрица.

Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{M}, \cdot)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ Абелова група?

2. Испитати ранг матрице

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

у зависности од реалног параметра λ.

3. У зависности од реалног параметра λ решити систем
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & & & = & 2 \\ 2x & - & 3y & + & (2\lambda+4)z & = & 7 \\ -x & + & 2y & - & (\lambda+2)z & = & -4 \end{array}.$$

4. Дати су вектори

$$e_1 = (2, -3, 1), \qquad e_2 = (3, -1, 5), \qquad e_3 = (1, -4, 3).$$

а) Доказати да вектори e_1, e_2 и e_3 образују базу простора $\mathbb{R}^3$.

б) Одредити координате вектора $x = (2, -2, 7)$ у бази $\{e_1, e_2, e_3\}$.

5. Раван α је одређена тачкама A, B и C. Одредити растојање тачке D од равни α, ако је

$$A(1, 1, 0), \qquad B(1, 0, -1), \qquad C(3, 1, 1), \qquad D(2, 0, 1).$$

M **I колоквијум из Математике 1** **M**

15. новембар 2008.

______________________ ______________ ______________

презиме и име студента **број индекса** **група за вежбе**

1. Дата је структура $(\mathcal{M},\cdot)$, при чему је

$$M=\left\{\begin{bmatrix} u & 0 & v\\ v & 0 & -u\\ u & 0 & v\end{bmatrix} : u,v\in\mathbb{R}, u^2+v^2\neq 0\right\}$$

и $\cdot$ означава операцију множења матрица.
Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{M},\cdot)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{M},\cdot)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{M},\cdot)$ Абелова група?

2. Решити матричну једначину

$$X\cdot\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1\\ 3 & -4\\ -2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 3 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

3. У зависности од реалног параметра μ решити систем $\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 0\\ -x & & & + & 2z & = & -5\\ 3x & + & 2y & + & \mu\cdot z & = & 5\end{array}$.

4. Вектори e_1, e_2 и e_3 образују базу неког векторског простора. Ако је

$$\begin{array}{rcrcrcrl} a & = & 3e_1 & + & (m+2)e_2 & + & 5e_3, & \\ b & = & 2e_1 & + & 3e_2 & + & e_3, & \\ c & = & (m+1)e_1 & + & 9e_2 & + & 3e_3, & \qquad (m\in\mathbb{R})\end{array}$$

испитати линеарну зависност вектора a, b и c у зависности од параметра m.

5. Раван α је одређена тачкама A, B и C. Одредити растојање тачке D од равни α, ако је

$$A(0,2,-1),\qquad B(4,1,2),\qquad C(-4,0,-4),\qquad D(1,-3,1).$$

Б Решења I колоквијума из Математике 1 Б

1. Затвореност важи:

$$(a\sqrt{3}+b)\cdot(c\sqrt{3}+d)=(-ad-bc)\sqrt{3}-(-3ac-bd)$$

(овде смо користили особине асоцијативности, комутативности и дистрибутивности операција $+$ и $\cdot$ у $\mathbb{R}$). Треба још да покажемо да је $(-ad-bc)\sqrt{3}-(-3ac-bd)\in A$, а то се своди на то да је $-ad-bc\in\mathbb{Q}$ и $-3ac-bd\in\mathbb{Q}$ (оба следе из $a,b,c,d\in\mathbb{Q}$).

Асоцијативност се преноси (како је множење реалних бројева асоцијативна операција у скупу $\mathbb{R}$ то је множење асоцијативно и у скупу $A\subset\mathbb{R}$).

Неутрални елемент за операцију је број $e=1=0\cdot\sqrt{3}-(-1)\in A$.

Инверзни елемент броја $x\sqrt{3}-y$ је број

$$\frac{1}{x\sqrt{3}-y}=\frac{1}{x\sqrt{3}-y}\cdot\frac{x\sqrt{3}+y}{x\sqrt{3}+y}=\frac{x\sqrt{3}+y}{3x^2-y^2}=\frac{x}{3x^2-y^2}\sqrt{3}+\frac{y}{3x^2-y^2}\in A.$$

Али за $x=y=0$ имамо да инверзни елемент не постоји!

Комутативност се преноси (како је множење реалних бројева комутативна операција у скупу $\mathbb{R}$ то је множење комутативно и у скупу $A\subset\mathbb{R}$).

На основу свега изложеног добијамо да је структура $(A,\cdot)$ комутативан моноид, тј. она није група (јер не постоји инверзан елемент за сваки $a\in A$), а самим тим ни Абелова група.

Напомена. Карактеристична места где се губе поени у овом задатку:

- Није лепо сређен израз за затвореност – у мноштву радова је стављено $(a\sqrt{3}+b)\cdot(c\sqrt{3}+d)=(3ac+bd)-(ad+bc)\sqrt{3}$ или, још горе (јер је нетачно) $(a\sqrt{3}+b)\cdot(c\sqrt{3}+d)=(ad+bc)\sqrt{3}-(3ac+bd)$.
- За особине асоцијативности и комутативности је неопходно рећи из ког скупа се преносе (за операцију множења). Напомене попут „то је рађено на вежбама“ или „Важи у општем случају“ (без да се каже у ком општем случају и како се преноси на овај) нису одговарајуће.
- Неутрални елемент није довољно одредити, већ треба и показати да он припада датој структури!
- Потребно је одговорити на оба питања: да ли је структура група и да ли је Абелова група (може се рећи како није група, онда није ни Абелова група).

2. Најлакше је дату детерминанту развити по II колони јер она има највише елемената 0.

$$\begin{aligned}D &= \begin{vmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & -3 & 4\\ 2 & 0 & 4 & b\end{vmatrix}=-(-2)\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & -3 & 4\\ 2 & 4 & b\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}1 & 3 & -4\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & -3 & 4\end{vmatrix}\\ &= 2\cdot(-3b+8-4+6-16+b)-(b+6-16+8-4-3b)=2\cdot(-2b-6)-(-2b-6)=-2b-6.\end{aligned}$$

За $b=-3$ је $D=0$.

Напомена. Дату детерминанту смо могли израчунати и свођењем на детерминанту троугаоне матрице.

3. Систем не можемо решавати преко детерминанти (јер је систем од 3 једначине са 4 непознате), па ћемо га решавати Гаусовим системом елиминације.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} x & + & y & + & z & + & w & = & 2 & \\ -x & & & + & z & + & w & = & -3 & \mathrm{II}+\mathrm{I}\\ 3x & + & 2y & + & z & + & \beta w & = & 7 & \mathrm{III}-3\cdot\mathrm{I}\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} x & + & y & + & z & + & w & = & 2 & \\ & & y & + & 2z & + & 2w & = & -1 & \\ & - & y & - & 2z & + & (\beta-3)w & = & 1 & \mathrm{III}+\mathrm{II}\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & w & = & 2 \\ & & y & + & 2z & + & 2w & = & -1 \\ & & & & & & (\beta-1)w & = & 0 \end{array}$$

За $\beta \neq 1$ имамо 3 везане променљиве x, y, w и 1 слободну променљиву z и њој ћемо доделити вредност параметра: $z = t$, $t \in \mathbb{R}$. Из последње једначине добијамо $w = 0$. Даље, када $w = 0$ и $z = t$ уврстимо у 2. једначину у степенастом облику добијамо $y = -1 - 2t$. Када y, z, w уврстимо у 1. једначину добијамо $x = 3 + t$.

За $\beta = 1$ последња једначина је једнака $0 = 0$ и њу можемо обрисати, тј. систем се своди на систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & w & = & 2 \\ & & y & + & 2z & + & 2w & = & -1 \end{array}$$

Везане променљиве су x и y, а слободне променљиве су z и w и њима ћемо доделити вредности параметара: $z = t$ и $w = p$ $t, p \in \mathbb{R}$. Када то уврстимо у 2. једначину добијамо $y = -1 - 2t - 2p$. Када y, z, w уврстимо у 1. једначину добијамо $x = 3 + t + p$.

Коначан закључак је:

- За $\beta \neq 1$ систем има вишеструко решење са 1 параметром $(x, y, z, w) = (3 + t, -1 - 2t, t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$.
- За $\beta = 1$ има вишеструко решење са 2 параметра $(x, y, z, w) = (3 + t + p, -1 - 2t - 2p, t, p)$, $t, p \in \mathbb{R}$.

4. На основу $\overrightarrow{AB} = (1, -1, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (1, 1, 1)$ и $\overrightarrow{AD} = (2, 3, -4)$ добијамо да је

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}|-12| = 2.$$

Површину основе $\triangle ABC$ тетраедра $ABCD$ добијамо из

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 0\vec{j} + \vec{k} = (-2, 0, 2),$$

тј. $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{2}$.

Даље, како је $V = \frac{1}{3}P \cdot H$, добијамо да је тражена висина једнака $H_D = \dfrac{3V}{P_{\triangle ABC}} = 3\sqrt{2}$.

5. Из p: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z+2}{1}$ добијамо да је вектор правца праве p једнак $\vec{v}_p = (2, -2, 1)$, као и тачку $P(1, -1, -2)$. Вектор нормале на раван α, $\vec{n}_\alpha$ је нормалан на све векторе у равни α, па и на вектор правца $\vec{v}_p$, као и на вектор $\overrightarrow{PA} = (1, 0, 3)$. Стога узимамо

$$\vec{n}_\alpha = \vec{v}_p \times \overrightarrow{PA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-6, -5, 2).$$

Једначину равни која има вектор нормале $\vec{n}_\alpha$ и садржи тачку $A(2, -1, 1)$ добијамо као

$$\alpha\colon\ -6(x-2) - 5(y+1) + 2(z-1) = 0,$$

тј. $\alpha\colon\ -6x - 5y + 2z + 5 = 0$.

Решења система по групама

група А

3. $\Delta = \alpha - 1$, $\Delta_x = 3(\alpha - 1)$, $\Delta_y = 1 - \alpha$, $\Delta_z = 0$.
За $\alpha \neq 1$ систем има јединствено решење $(x, y, z) = (3, -1, 0)$.
За $\alpha = 1$ има вишеструко решење $(x, y, z) = (3 + t, -1 - 2t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

група Б

3. За $\beta = 1$ има вишеструко решење са 2 параметра $(x, y, z, w) = (3 + t + p, -1 - 2t - 2p, t, p)$, $t, p \in \mathbb{R}$.
За $\beta \neq 1$ систем има вишеструко решење са 1 параметром $(x, y, z, w) = (3 + t, -1 - 2t, t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$.

група В

3. $\Delta = 0$, $\Delta_x = -3 - \nu$, $\Delta_y = 6 + 2\nu$, $\Delta_z = -3 - \nu$.
За $\nu \neq -3$ систем нема решења.
За $\nu = -3$ има вишеструко решење $(x, y, z) = (3 + t, -1 - 2t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

група Г

3. За $\Gamma = 2$ има вишеструко решење са 2 параметра $(x, y, z, w) = (\frac{5}{2} - \frac{1}{2}t, -\frac{5}{2} - \frac{1}{2}t - 2p, t, p)$, $t, p \in \mathbb{R}$.
За $\Gamma \neq 2$ систем има вишеструко решење са 1 параметра $(x, y, z, w) = (\frac{5}{2} - \frac{1}{2}t, -\frac{5}{2} - \frac{1}{2}t, t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$.

група Д

3. За $\delta = -3$ систем нема решења.
За $\delta \neq -3$ систем има вишеструко решење са 2 параметра $(x, y, z, w) = (\frac{5}{2} - \frac{1}{2}t, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t - p, t, p)$, $t, p \in \mathbb{R}$.

група Е

3. За $\varepsilon \neq -5$ систем нема решења.
За $\varepsilon = -5$ има вишеструко решење $(x, y, z) = (4 - 8t, 1 - 3t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

група Л

3. За $\lambda = -2$ систем нема решења.
За $\lambda \neq -2$ има јединствено решење $(x, y, z) = (0, -1, \frac{2}{\lambda+2})$.

група М

3. $\Delta = \mu - 2$, $\Delta_x = 5(\mu - 2)$, $\Delta_y = -5(\mu - 2)$, $\Delta_z = 0$.
За $\mu \neq 2$ систем има јединствено решење $(x, y, z) = (5, -5, 0)$.
За $\mu = 2$ има вишеструко решење $(x, y, z) = (5 + 2t, -5 - 4t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.