М1, први колоквијум, А

① $A=\{a-b\sqrt{5} \mid a,b\in \mathbb{Q}\}$

1° затвореност:

$$\left.\begin{array}{l} x=a-b\sqrt{5}\in A \\ y=c-d\sqrt{5}\in A \end{array}\right\} \Rightarrow x\cdot y = ac+5bd-(ad+bc)\sqrt{5}\in A$$ јер $ac+5bd\in \mathbb{Q}$ и $ad+bc\in\mathbb{Q}$ 4

2° $(x\cdot y)\cdot z = x\cdot (y\cdot z)$

важи за све реалне бројеве 2

3° неутрални елемент:

$e=1=1-0\cdot\sqrt{5}\in A$ и при томе је 4

$x\cdot 1 = 1\cdot x = x, \quad (\forall x\in A)$

4° а) $x=0-0\cdot\sqrt{5}=0$ нема инверзни елемент 3

б) $x\neq 0 \Rightarrow x=a-b\sqrt{5}, \ a^2+b^2\neq 0$

Тада је $a^2-5b^2\neq 0$ (иначе би $\sqrt{5}\in\mathbb{Q}$) и $x\cdot x^{-1}=x^{-1}\cdot x = 1$,

где је $x^{-1}=\dfrac{1}{a-b\sqrt{5}}=\dfrac{a}{a^2-5b^2}+\dfrac{b}{a^2-5b^2}\sqrt{5}\in A$ 3

5° $x\cdot y = y\cdot x$ у општем случају 1

Структура није група (самим тим ни Абелова). 3

② $A+B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ 2 ; $\det(A+B)=1+3=4\neq 0$; 2

Матрица $A+B$ је регуларна 2

$(A+B)^{-1}=\dfrac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -3 & 1\end{bmatrix}$ 5

$XA-C=-XB$

$XA+XB=C$

$X(A+B)=C \Rightarrow X = C\cdot (A+B)^{-1}=$ 3

$=\dfrac{1}{4}\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\\ -2 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 1\\ -3 & 1\end{bmatrix}=\dfrac{1}{4}\begin{bmatrix}-14 & 2\\ 7 & -1\\ -14 & 2\end{bmatrix}$ 6

(3)

$$A|B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & \alpha & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & \alpha-3 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 \end{array}\right] \end{array} \quad (4)$$

$1°$ $\alpha \neq 1 \Rightarrow r(A) = r(A^*) = 3$ (3) :

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 & &\Rightarrow x = 3 \\ y + 2z &= -1 & &\Rightarrow y = -1 \\ (\alpha-1)z &= 0 & &\Rightarrow z = 0 \end{aligned}$$

$(x, y, z) = (3, -1, 0)$ јединствено решење (5)

$2°$ $\alpha = 1 \Rightarrow r(A) = r(A^*) = 2$ (3) :

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ y + 2z &= -1 \end{aligned}$$

$z = \alpha \Rightarrow y = -1 - 2\alpha$

$x = 3 + \alpha$

$(x, y, z) = (3+\alpha, -1-2\alpha, \alpha)$; $\alpha \in R$. (5)

(4) а) $\vec{a} = \lambda\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{c} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 4\lambda\vec{k}$.

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4\lambda \end{vmatrix} = -4(2\lambda^2 + \lambda - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -\frac{3}{2} \end{array} \quad (8)$$

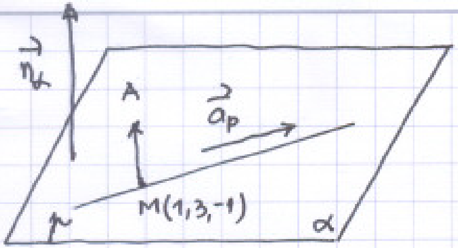
б) $\lambda = \max\{1, -\frac{3}{2}\} = 1$

$$(1, 1, 4) = \alpha(1, -2, 0) + \beta(3, -3, 4)$$

$$\begin{aligned} \alpha + 3\beta &= 1 & &\Rightarrow \alpha = -2 \\ -2\alpha - 3\beta &= 1 \\ 4\beta &= 4 & &\Rightarrow \beta = 1 \end{aligned}$$

Рез. $\vec{a} = -2\vec{b} + \vec{c}$ (12)

5



$\vec{n}_\alpha = \vec{a}_p \times \vec{MA}$

$M(1,3,-1)$

$\vec{MA} = (2,-1,1)$

$$\vec{n}_\alpha = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - 5\vec{j} - 7\vec{k}$$ 8

$$\alpha: \ 1\cdot(x-1) - 5(y-3) - 7(z+1) = 0$$

$$x - 5y - 7z + 7 = 0$$ 12