

СТРУКТУРЕ И МАТРИЦЕ

- АЛГЕБАРСКЕ СТРУКТУРЕ
- МАТРИЦЕ - ПОЈАМ И ОСНОВНЕ ОПЕРАЦИЈЕ
- ИСПИТНА ПИТАЊА

АЛГЕБАРСКЕ СТРУКТУРЕ

- Декартов производ скупова
- Бинарна операција
- Алгебарске структуре са једном операцијом
- Алгебарске структуре са две операције

1 Декартов производ скупова

Дефиниција 1 Пар елемената a и b код којег се зна која је прва компонента (координата), а која друга, назива се **уређен пар** (двојка) и означава са (a, b) . Уређени парови (a, b) и (c, d) су једнаки ако и само ако је $a = c$ и $b = d$.

Слично се дефинише уређена тројка (a, b, c) неких елемената a , b и c , као и уређена n -торка (a_1, a_2, \dots, a_n) .

Ако су дати скупови A и B , можемо посматрати уређене парове (a, b) , где је $a \in A$ и $b \in B$.

Дефиниција 2 Скуп $A \times B$ дефинисан са

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

назива се **Декартов** или **Картезијев** или **директан** производ скупова A и B .

Слично се дефинише скуп $A \times B \times C$, као и $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$. Скуп $A \times A$ се означава и са A^2 , а скуп $\underbrace{A \times A \times \dots \times A}_n$ са A^n .

ПРИМЕРИ

1. Скуп $[a, b] \times [c, d]$ је правоугаоник у координатној равни.
2. Скуп R^2 је координатна раван.
3. Скуп R^3 је тродимензиони простор.

2 Бинарна операција

Скуп са једном или више операција чини алгебарску структуру.

Дефиниција 3 Пресликавање $*$: $S^2 \rightarrow S$, где је S непразан скуп је **бинарна операција** у скупу S . Уместо $*(a, b) = c$ за $a, b, c \in S$, пише се $a * b = c$.

На коначним скуповима операција може да се зада навођењем парова *оригинал - слика* или Кејлијевим таблицама.

Операције могу да имају разна својства.

Дефиниција 4 Операција $*$ у скупу S је:

1. **комутативна** ако за свако $a, b \in S$ важи

$$a * b = b * a,$$

2. **асоцијативна** ако за свако $a, b, c \in S$ важи

$$a * (b * c) = (a * b) * c.$$

За асоцијативну операцију се може писати и $a * b * c$.

3 Алгебарске структуре са једном операцијом

Дефиниција 5 Уређен пар $(S, *)$ је алгебарска структура *группоид*, а скуп S је његов *домен*. *Комутативан группоид* је онај группоид чија је операција комутативна.

ПРИМЕРИ

1. Са доменом N имамо группоиде $(N, +)$, (N, \cdot) , али и бесконачно много других, као што су: (N, nzd) , (N, nzs) , (N, \max) , (N, \min) , ...
2. $(\mathcal{P}(S), \cup)$, $(\mathcal{P}(S), \cap)$, $(\mathcal{P}(S), \setminus)$

Кардиналност группоида је кардиналност његовог домена. У том смислу постоје коначни и бесконачни группоиди.

Дефиниција 6 Группоид са асоцијативном операцијом је *асоцијативан группоид* или *полугрупа* или *семигрупа*.

На пример, $(N, +)$ и $(\mathcal{P}(A), \cup)$ су полугрупе.

У группоиду могу постојати и неки посебни елементи.

Дефиниција 7 Елемент e группоида $(S, *)$ је *неутрални елемент* или *јединични елемент* или *јединица* ако за свако $a \in S$ важи

$$a * e = e * a = a.$$

Дакле, јединични елемент је и комутативан са сваким елементом группоида.

Теорема 1 Ако у группоиду постоји јединични елемент, он је *јединствен*.

Доказ. Ако претпоставимо да постоје бар два јединична елемента, e_1 и e_2 , тада је $e_1 * e_2 = e_2$ и $e_2 * e_1 = e_1$. Како су јединични комутативни са сваким другим елементом, то је $e_1 = e_2$. ■

Дефиниција 8 Ако у групоиду $(S, *)$ постоји неутрални елемент e и ако за елемент $a \in S$ постоји елемент $a^{-1} \in S$, такав да је

$$a^{-1} * a = a * a^{-1} = e,$$

тада за a^{-1} кажемо да је **инверзни** или **симетрични** елемент за a .

Теорема 2 Ако у полугрупи $(S, *)$ за $a \in S$ постоји инверзни елемент, он је јединствен.

Доказ. Ако претпоставимо да за a постоје два инверзна елемента, a_1^{-1} и a_2^{-1} , тада је

$$a_1^{-1} = a_1^{-1} * e = a_1^{-1} * (a * a_2^{-1}) = (a_1^{-1} * a) * a_2^{-1} = e * a_2^{-1} = a_2^{-1}.$$

Дакле, a_1^{-1} и a_2^{-1} нису различити елементи. ■

Дефиниција 9 Полугрупа $(S, *)$ је **група** ако

1. постоји јединични елемент,
2. сваки елемент из S има инверзни елемент.

Ако S има n елемената, кажемо да је група реда n . Група је **комутативна** или **Абелова** ако је операција $*$ комутативна. Групе могу да имају сличну структуру.

Нека су $S_1 = (S_1, *_1)$ и $S_2 = (S_2, *_2)$ групе.

Дефиниција 10 Бијекција $f : S_1 \rightarrow S_2$ је **изоморфизам** групе S_1 на групу S_2 ако за свако $a, b \in S_1$ важи

$$f(a *_1 b) = f(a) *_2 f(b).$$

На пример, функција $f : x \mapsto \ln x$ је изоморфизам групе (R^+, \cdot) на групу $(R, +)$.

4 Алгебарске структуре са две операције

Нека је S скуп у којем су дефинисане две бинарне операције: $*$ и \circ .

Дефиниција 11 Бинарна операција $*$ је **дистрибутивна** у односу на бинарну операцију \circ ако је

$$a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * c),$$

$$(a \circ b) * c = (a * c) \circ (b * c)$$

за свако $a, b, c \in S$.

На пример, операција множења у R је дистрибутивна у односу на операцију сабирања. Да ли је сабирање дистрибутивно у односу на множење?

Дефиниција 12 Структура $(S, *, \circ)$ је **прстен** ако је:

1. $(S, *)$ Абелова група
2. (S, \circ) је полугрупа
3. Операција \circ је дистрибутивна у односу на операцију $*$.

На пример, $(Z, +, \cdot)$ је прстен.

Дефиниција 13 Нека је структура $(S, *, \circ)$ прстен и нека је e неутрални елемент за операцију $*$. Ова структура је:

1. **тело** ако је $(S \setminus \{e\}, \circ)$ група,
2. **поље** ако је $(S \setminus \{e\}, \circ)$ Абелова група

ПРИМЕРИ

1. $(Q, +, \cdot)$ је поље.
2. $(R, +, \cdot)$ је поље.
3. $(C, +, \cdot)$ је поље.

МАТРИЦЕ - ОСНОВНЕ ОПЕРАЦИЈЕ

- Појам и врсте матрица
- Сабирање матрица
- Множење матрице бројем
- Множење матрица
- Степен матрице
- Транспоновање матрице
- Неке врсте матрица

5 Појам матрице

5.1 Дефиниција матрице

Нека је K неко поље (на пример, R или C) и нека $a_{i,j} \in K$ за $i = 1, \dots, m$ и $j = 1, \dots, n$.

Дефиниција 14 Правоугаона шема (таблица) A од $m \cdot n$ елемената $a_{i,j}$ распоређених у облику

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}$$

је матрица типа $m \times n$ над пољем K .

Ако је $K = R$ матрица је реална, а ако је $K = C$, матрица је комплексна. За $a_{i,j}$ кажемо да су **елементи** матрице.

Матрице се означавају обичним или угластим заградама или вертикалним цртама.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

или

$$A = \left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right|$$

Краће ознаке су

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, \quad A = [a_{ij}]_{m \times n}, \quad A = \|a_{ij}\|_{m \times n}.$$

Елементи $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ чине ***i*-ту врсту** (ред), а елементи $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}$ чине ***j*-ту колону** (стубац) матрице A . Матрица типа $m \times n$ има m врста и n колона.

5.2 Специјалне матрице

Специјални случајеви матрица имају посебна имена.

1. **матрица врста** – матрица типа $1 \times n$,
2. **матрица колона** (вектор) – матрица типа $m \times 1$,
3. **квадратна матрица** – матрица типа $n \times n$ (означава се краће и са $(a_{ij})_n$ и каже да је **реда** n , а елементи $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ чине **дијагоналу** матрице A),
4. **нула матрица** – матрица чији су сви елементи једнаки нули у пољу K (означава се са $O_{m \times n}$ или само са O када је јасно ког је типа),
5. **дијагонална матрица** – квадратна матрица чији су сви елементи ван дијагонале једнаки нули, а бар један на дијагонали различит од нуле.
6. **јединична матрица** – квадратна матрица чији су сви елементи на дијагонали једнаки јединици у пољу K (означава се са I_n или E_n или само I , односно E ако је јасно ког је реда),
7. **горња троугаона** – матрица чији су сви елементи испод дијагонале једнаки нули,
8. **доња троугаона** – матрица чији су сви елементи изнад дијагонале једнаки нули

Збир свих елемената на главној дијагонали матрице A зове се **траг матрице** и означава са $tr A$. Дакле,

$$tr A = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Дијагоналну матрицу формирану од елемената дијагонале матрице A означавамо са $diag A$.

Ако је δ_{ij} Кронекеров симбол, дефинисан са

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

тада је $E_n = [\delta_{ij}]_n$.

5.3 Једнакост матрица

За елемент a_{ij} матрице A кажемо да је на месту (i, j) . За матрице истог типа елементи су одговарајући ако су на истом месту.

Дефиниција 15 *Две матрице су једнаке ако су истог типа и ако су им одговарајући елементи једнаки.*

Једнакост матрица је релација еквиваленције.

5.4 Подматрице дате матрице

Дефиниција 16 *Подматрица или субматрица матрице A је матрица која се добија изостављањем неких врста и/или неких колона матрице A .*

Матрица типа $m \times n$ има $\binom{m}{p} \cdot \binom{n}{q}$ подматрица типа $p \times q$ за $p \leq m$ и $q \leq n$.

6 Сабирање и одузимање матрица

Сабирање и одузимање матрица се дефинише за матрице истог типа.

Дефиниција 17 *Нека је $A = (a_{ij})_{m \times n}$ и $B = (b_{ij})_{m \times n}$.*

1. *Збир матрица A и B је матрица $C = (c_{ij})_{m \times n}$, где је*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

за $i = 1, \dots, m$ и $j = 1, \dots, n$.

2. *Разлика матрица A и B је матрица $D = (d_{ij})_{m \times n}$, где је*

$$d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

за $i = 1, \dots, m$ и $j = 1, \dots, n$.

Теорема 3 *Ако је S скуп свих матрица истог типа, тада је структура $(S, +)$ Абелова група.*

Доказ. Збир две матрице је матрица истог типа, сабирање је асоцијативно и комутативно, нула матрица је неутрални елемент, а за матрицу $A \in S$ инверзни елемент је **супротна матрица** $-A = (-a_{ij})_{m \times n}$. ■

Важи и $A - B = A + (-B)$.

7 Множење матрице скаларом

Елементи поља K су **скалари**.

Дефиниција 18 *Производ матрице $A = (a_{ij})_{m \times n}$ и скалара λ је матрица $C = (c_{ij})_{m \times n}$, где је*

$$c_{ij} = \lambda a_{ij}$$

за $i = 1, \dots, m$ и $j = 1, \dots, n$.

Ознака за производ скалара λ и матрице A је λA . Очигледно да је $1 \cdot A = A$, $0 \cdot A = O$ и $(-1) \cdot A = -A$.

Теорема 4 *Ако су A и B матрице истог типа, а α и β скалари, тада важи:*

- $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$,
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

Из претходне две теореме следи тврђење.

Теорема 5 *Скуп свих матрица истог типа са операцијом сабирања и операцијом множења матрице скаларом је векторски простор над пољем K .*

Димензија векторског простора матрица типа $m \times n$ је mn , а једну базу чине све матрице тог типа које на неком месту имају јединицу, а сви остали елементи су нуле.

8 Множење матрица

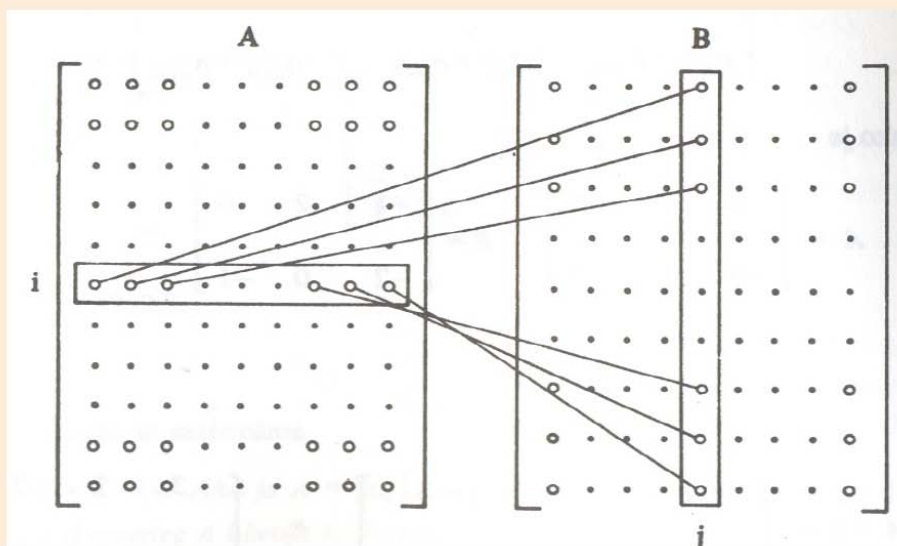
Производ матрица A и B дефинише се само ако су оне **сагласне**, односно ако је број колона матрице A једнак броју врста матрице B .

Дефиниција 19 За сагласне матрице $A = (a_{ij})_{l \times m}$ и $B = (b_{ij})_{m \times n}$ производ $A \cdot B$ је матрица $C = (c_{ij})_{l \times n}$, где је

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}$$

за $i = 1, \dots, l$ и $j = 1, \dots, n$.

На слици је приказано рачунање елемента c_{ij} .



Множење матрица има следећа својства.

Теорема 6 Уз претпоставку сагласности матрица важи:

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$,
2. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$,
3. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$,
4. $A \cdot E = E \cdot A = A$.

Из ове теореме и својстава сабирања матрица следи тврђење.

Теорема 7 Скуп свих квадратних матрица истог реда са операцијама сабирања и множења матрица је прстен са јединицом.

9 Степен матрице

За квадратне матрице се дефинише и степен.

Дефиниција 20 *Ако је A квадратна матрица, тада је*

$$A^0 = E, \quad A^1 = A, \quad A^n = A^{n-1} \cdot A$$

за $n = 2, 3, \dots$

Теорема 8 *Ако је A квадратна матрица, а m и n природни бројеви, тада је*

1. $A^m \cdot A^n = A^{m+n},$

2. $(A^m)^n = A^{mn}.$

Доказ. Доказ се изводи методом математичке индукције по, на пример, n . Из дефиниције степена следи да је

$$A^m \cdot A^1 = A^m \cdot A = A^{m+1},$$

па тврђење важи за $n = 1$.

Из претпоставке да тврђење важи за n , односно да је

$$A^m \cdot A^n = A^{m+n}$$

следи да је

$$\begin{aligned} A^m \cdot A^{n+1} &= A^m \cdot (A^n \cdot A) \\ &= (A^m \cdot A^n) \cdot A \\ &= A^{m+n} \cdot A \\ &= A^{m+n+1}, \end{aligned}$$

па тврђење 1. важи и за $n + 1$. Слично се доказује и 2. ■

10 Транспонованње матрице

Дефиниција 21 Ако у матрици A заменимо врсте колонама и обрнуто, добијамо **транспоновану** матрицу матрице A која се означава са A^T .

За $A = (a_{ij})_{m \times n}$ имамо да је $A^T = (a_{ji})_{n \times m}$.

Теорема 9 Операција транспонованја матрица има следећа својства:

1. $(A^T)^T = A$,
2. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$,
3. $(A + B)^T = A^T + B^T$,
4. $(AB)^T = B^T A^T$.

11 Неке врсте матрица

Издајају се неке важне класе матрица.

Дефиниција 22 Квадратна матрица A је:

1. **симетрична** ако је $A^T = A$,
2. **кососиметрична** ако је $A^T = -A$,
3. **ортогонална** ако је $A^T A = E$,
4. **нилпотентна** ако је $A^m = O$ за неко $m \in \mathbb{N}$,
5. **идемпотентна** ако је $A^2 = A$,
6. **инволутивна** ако је $A^2 = E$.

М1 – ДРУГО ПРЕДАВАЊЕ

Драган Ђорић, Раде Лазовић

6.10.2008.

ДЕТЕРМИНАНТЕ И МАТРИЦЕ

- ДЕТЕРМИНАНТЕ
- РАНГ МАТРИЦЕ
- ИНВЕРЗНА МАТРИЦА
- ИСПИТНА ПИТАЊА

ДЕТЕРМИНАНТЕ

- Пермутације скупа $\{1, 2, \dots, n\}$
- Појам детерминанте
- Основна својства
- Разлагање детерминанте

1 Пермутације скупа $\{1, 2, \dots, n\}$

Нека је P_n скуп свих пермутација скупа $\{1, 2, \dots, n\}$, при чему је пермутација $(1, 2, \dots, n)$ основна и нека је $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ нека друга пермутација тог скупа.

Дефиниција 1 Ако у пермутацији σ важи $\sigma_i > \sigma_j$ за $i < j$, онда елементи σ_i и σ_j образују једну *инверзију*.

На пример,

- у пермутацији $(2, 3, 1)$ скупа $\{1, 2, 3\}$ елементи 2 и 1, као и елементи 3 и 1 чине инверзије;
- у пермутацији $\{n, n-1, \dots, 1\}$ скупа $\{1, 2, \dots, n\}$ свака два елемента су у инверзији.

Дефиниција 2 Пермутација σ је **парна** ако је укупан број инверзија $Inv(\sigma)$ у њој паран, а **непарна** ако је $Inv(\sigma)$ непаран број.

На пример,

- број инверзија у пермутацији $(3, 4, 1, 2)$ скупа $\{1, 2, 3, 4\}$ је $2 + 2$, па је она парна;
- број инверзија у пермутацији $\{n, n-1, \dots, 1\}$ скупа $\{1, 2, \dots, n\}$ је $\binom{n}{2}$ или

$$n-1 + n-2 + \dots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Теорема 1 Ако у датој пермутацији два елемента замене места (изврше **транспозицију**), пермутација мења парност.

Доказ. Ако се замене два суседна елемента, број инверзија се мења за 1 (+1 ако нису били и -1 ако су били у инверзији), па се мења и парност.

Ако између елемената који мењају места има k других елемената, онда они могу да замене места са $2k+1$ транспозиција. ■

2 Појам детерминанте

Нека је M_n скуп свих квадратних матрица са елементима из C (може и општије из поља K).

Дефиниција 3 Пресликавање $\det : M_n \rightarrow C$ је **детерминанта** ако је дато са

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in P_n} (-1)^{Inv(\sigma)} a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \cdots a_{n\sigma_n}$$

за $A = (a_{ij}) \in M_n$. **Детерминанта матрице A** је број $\det(A)$ који се означава и са $|A|$.

Појмови *ред, врсте, колоне, дијагонала,...* матрице A остају исти за детерминанту матрице A .

Према дефиницији,

- $|A|$ за $A \in M_n$ је збир од $n!$ сабирака, при чему је сваки сабирак производ n елементата матрице A (из сваке врсте и сваке колоне тачно по један).
- Сабирци са парним пермутацијама су позитивни, а са непарним негативни.

У дефиницији детерминанте сабирке $a_{1\sigma_1}a_{2\sigma_2}\cdots a_{n\sigma_n}$ можемо преуредити (комутативност множења) у облик $a_{\tau_1 1}a_{\tau_2 2}\cdots a_{\tau_n n}$.

При томе, је пермутација τ инверзна пермутацији σ , па је $Inv(\tau) = Inv(\sigma)$. Према томе, важи

$$|A| = \sum_{\tau \in P_n} (-1)^{Inv(\tau)} a_{\tau_1 1} a_{\tau_2 2} \cdots a_{\tau_n n}.$$

ПРИМЕРИ

1. $|O_n| = 0,$

2. $|a_{11}| = a_{11},$

3.
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

4. За $A = (a_{ij})_3$ је

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Сарусово правило

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

3 Основна својства

Теорема 2 $|A^T| = |A|$.

Доказ. За $A = (a_{ij})$ и $A^T = (b_{ij})$ је $b_{ij} = a_{ji}$, па је

$$\begin{aligned}|A^T| &= \sum_{\tau \in P_n} (-1)^{Inv(\tau)} b_{\tau_1 1} b_{\tau_2 2} \cdots b_{\tau_n n} \\ &= \sum_{\tau \in P_n} (-1)^{Inv(\tau)} a_{1\tau_1} a_{2\tau_2} \cdots a_{n\tau_n} \\ &= |A|.\end{aligned}$$

Према томе, све што важи за врсте детерминанти, важи и за колоне, па се наредна својства изражавају само за врсте.

Теорема 3 *Ако се једна врста матрице A помножи бројем λ , добија се матрица B за коју је $|B| = \lambda|A|$.*

Доказ. Ако је i -та врста помножена са λ , тада је

$$\begin{aligned}|B| &= \sum_{\sigma \in P_n} (-1)^{Inv(\sigma)} a_{1\sigma_1} \cdots (\lambda a_{i\sigma_i}) \cdots a_{n\sigma_n} \\ &= \lambda |A|\end{aligned}$$

Из теореме следи да је $|A| = 0$ ако су сви елементи неке врсте или колоне матрице A једнаки нули.

Теорема 4 *Ако две врсте у матрици A замене места, добија се матрица B за коју је $|B| = -|A|$.*

Доказ. У сваком сабирку за $|B|$ елементи $a_{i\sigma_i}$ и $a_{j\sigma_j}$ су заменили места, што значи да број инверзија мења парност. Према томе, сви сабирци су променили знак, па је $|B| = -|A|$.

Теорема 5 *Ако су A и B квадратне матрице истог реда, тада је*

$$|A| \cdot |B| = |A \cdot B|.$$

Последице ових тврђења су и следећа својства:

1. Ако су две врсте у матрици A једнаке, тада је $|A| = 0$ (заменом истих врста имамо $|A| = -|A|$).
2. Ако су две врсте матрице A пропорционалне, тада је $|A| = 0$ (дељењем елемената једне врсте коефицијентом пропорционалности добијамо две исте врсте).
3. Ако је једна врста матрице A линеарна комбинација осталих, тада је $|A| = 0$.
4. Ако се једна врста дате матрице 'помножи' неким бројем и дода другој врсти, добија се нова матрица која има исту детерминанту као дата матрица.

4 Разлагање детерминанте

Нека је $A = (a_{ij}) \in M_n$.

Дефиниција 4 *Минор* M_{ij} елемента a_{ij} матрице A је детерминанта матрице која се добија изостављањем i -те врсте и j -те колоне матрице A . *Кофактор* A_{ij} елемента a_{ij} матрице A је број дат са

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Теорема 6 (Лапласове формуле) *За свако $i = 1, 2, \dots, n$ важи*

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}.$$

Ако се уместо кофактора A_{ik} узму кофактори који одговарају елементима неке друге врсте, збир на десној страни претходне једнакости је једнак нули. Оба случаја могу да се запишу са

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}A_{jk} = \delta_{ij}|A|$$

за $i, j = 1, 2, \dots, n$.

ПРИМЕРИ

$$1. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = \dots = 0$$

$$2. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 9 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = \dots = 10 + 10$$

3. детерминанта троугаоне и дијагоналне матрице једнака је производу елемената ма дијагонали.

РАНГ МАТРИЦЕ

- Појам ранга
- Елементарне трансформације матрица

5 Појам ранга

Нека је дата матрица $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

Дефиниција 5 Ред највеће регуларне подматрице матрице A је **ранг** матрице A и означава се са $\text{rang} A$. Ранг нула матрице је нула.

Дефиниција 6 **Минор реда r** матрице A је детерминанта неке њене квадратне подматрице реда r .

Дакле,

- ранг матрице је ред највећег њеног минора различитог од нуле,
- ако је $\text{rang} A = r$, тада је сваки минор реда r који је различит од нуле **базисни минор**, а врсте и колоне матрице A које он одређује су **базисне врсте** и **базисне колоне**,
- у матрици могу да постоје више базисних минора.

Из својстава детерминанти следи да је $\text{rang} A = \text{rang} A^T$.

6 Елементарне трансформације матрица

Дефиниција 7 *Елементарне трансформације матрице су:*

1. замена места две врсте (колоне),
2. множење једне врсте (колоне) бројем различитим од нуле,
3. Додавање неке врсте (колоне) другој врсти (колони).

Теорема 7 *Елементарне трансформације не мењају ранг матрице.*
Према томе,

- две матрице имају исти ранг ако и само ако се могу еквивалентним трансформацијама свести једна на другу;
- ако је ранг матрице једнак r , онда се она еквивалентним трансформацијама може свести на облик у којем је базни минор дијагонала, а сви остали елементи су нуле.

ИНВЕРЗНА МАТРИЦА

- Појам адјунговане матрице
- Појам инверзне матрице
- Својства инверзне матрице

7 Појам адјунговане матрице

Нека је A квадратна матрица и нека су A_{ij} њени кофактори.

Дефиниција 8 Матрица $\text{adj}A$ дефинисана са

$$\text{adj}A = (\text{cof}A)^T$$

назива се **адјунгована матрица** матрице A .

Према томе,

$$\text{adj}A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Теорема 8 Ако је A квадратна матрица реда n , тада је

1. $A \cdot (\text{adj}A) = (\text{adj}A) \cdot A = |A|E$,
2. $|\text{adj}A| = |A|^{n-1}$.

Доказ. 1. Ако је $C = A \cdot (\text{adj}A)$ и $C = (c_{ij})_n$, тада из

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}A_{jk} = |A|\delta_{ij}$$

слиеди да је $C = |A|E$. Слично је и за другу једнакост.

2. Следи из 1. јер је

$$|A| \cdot |\text{adj}A| = ||A|E| = |A|^n.$$

8 Појам инверзне матрице

За квадратне матрице се уводи појам инверзне матрице.

Дефиниција 9 *Ако за квадратну матрицу A постоји матрица X , таква да је*

$$AX = XA = E,$$

*за матрицу X кажемо да је **инверзна матрица** матрице A .
Уобичајена ознака за инверзну матрицу је A^{-1} .*

Из дефиниције следи да је $|A||A^{-1}| = 1$, што значи да матрица која има инверзну регуларна и да је $|A^{-1}| = 1/|A|$.

Дакле, регуларност матрице је потребан услов за постојање њене инверзне матрице.

Следеће тврђење показује да је то и довољан услов.

Теорема 9 *Регуларна матрица има јединствену инверзну матрицу, при чему је*

$$A^{-1} = \frac{\text{adj} A}{|A|}.$$

Доказ. Из једнакости

$$A \cdot (\text{adj} A) = (\text{adj} A) \cdot A = |A|E$$

следи

$$A \cdot \frac{\text{adj} A}{|A|} = \frac{\text{adj} A}{|A|} \cdot A = E,$$

што значи да је у дефиницији инверзне матрице

$$X = \frac{\text{adj} A}{|A|}.$$

Ако претпоставимо да постоје две инверзне матрице, X и Y , тада из једнакости $AX = E$ и $AY = E$ следи да је $YAX = Y$ и $YAX = X$, па је $X = Y$. ■

9 Својства инверзне матрице

Теорема 10 *Ако су A и B регуларне матрице, тада је:*

1. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$,
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,
3. $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ за $n \in \mathbb{N}$.

Доказ. 1. Следи из $(AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T$ и $AA^{-1} = E$.

2. $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$. Слично је и $(B^{-1}A^{-1})(AB) = E$.

3. Следи из 2. ■

За регуларну матрицу A може да се дефинише и степен A^{-n} за природан n на следећи начин:

$$A^{-n} = (A^{-1})^n.$$

ВЕКТОРСКИ ПРОСТОРИ И СИСТЕМИ

- ВЕКТОРСКИ ПРОСТОРИ
- СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА
- ИСПИТНА ПИТАЊА

ВЕКТОРСКИ ПРОСТОРИ

- Дефиниција векторског простора
- Линеарна зависност и независност вектора
- База и димензија векторског простора

1 Дефиниција векторског простора

Нека је V непразан скуп, нека је K поље и нека су $+: V^2 \rightarrow V$ и $\cdot: K \times V \rightarrow V$ бинарне операције.

Дефиниција 1 Алгебарска структура $(V, K, +, \cdot)$ је **векторски** или **линеарни простор** ако је:

1. $(V, +)$ Абелова група,
2. $\alpha \cdot (x + y) = \alpha x + \alpha y$,
3. $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$,
4. $(\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$,
5. $1 \cdot x = x$,

за све $x, y \in V$ и све $\alpha, \beta \in K$. Елементи скупа V су **вектори**, а елементи скупа K су **скалари**.

Ако је $K = \mathbb{R}$, векторски простор је **реалан**, а ако је $K = \mathbb{C}$, векторски простор је **комплексан**.

Често се векторски простор означава само са V , а $\alpha \cdot x$ са αx .

ПРИМЕРИ

1. $V = C$, $K = R$, а + и \cdot су стандардне операције у C ,

2. $V = R^n$, $K = R$, а + и \cdot су дефинисани са:

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$

$$\alpha(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n),$$

3. $V = \mathcal{P}_{\leq n}$ (скуп свих полинома степена не већег од n), $K = R$, а + и \cdot су сабирање полинома и множење полинома бројем,

4. $V = R^R$ (скуп свих функција $f : R \rightarrow R$), $K = R$, а + и \cdot су дате са:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x),$$

5. $V = C[a, b]$ (скуп свих непрекидних функција на $[a, b]$), $K = R$, а + и \cdot као у претходном примеру.

Помоћу датих вектора из V може да се генерише нови вектор.

Дефиниција 2 *Линеарна комбинација вектора x_1, \dots, x_n из V је вектор x дат са*

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n,$$

где су $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ скалари из K .

Дефиниција 3 *Ако је $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, скуп свих линеарних комбинација вектора x_1, \dots, x_n је линеарни омотач или линеал над X и означава се са $L(X)$.*

Дакле,

$$L(X) = \{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K\}.$$

2 Линеарна зависност и независност вектора

Дефиниција 4 Вектори x_1, \dots, x_n векторског простора V су **линеарно зависни** ако постоје скалари $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ из K , од којих је бар један различит од нуле и за које важи

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0.$$

У противном, вектори x_1, \dots, x_n су **линеарно независни**.

Другим речима, вектори x_1, \dots, x_n су линеарно независни ако из наведене једнакости следи да је $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

Очигледно је да су вектори од којих је један нула вектор линеарно зависни. Ако су x_1, \dots, x_n линеарно зависни, онда су и x_1, \dots, x_n, x линеарно зависни.

Теорема 1 Вектори x_1, \dots, x_n су линеарно зависни ако и само ако је један од њих линеарна комбинација осталих.

Доказ. Ако су вектори зависни, тада у њиховој линеарној комбинацији је бар један скалар различит од нуле. Вектор уз тај скалар је линеарна комбинација осталих.

Обрнуто, ако је један од њих линеарна комбинација осталих, онда је линеарна комбинација свих једнака нули, а један скалар је једнак 1. ■

Дефиниција 5 Бесконачно много вектора су **линеарно независни** ако је сваки њихов коначан подскуп линеарно независан. У противном, вектори су **линеарно зависни**.

3 База и димензија векторског простора

Дефиниција 6 Скуп линеарно независних вектора је **база** векторског простора ако је $L(B) = V$.

Теорема 2 Сваки вектор векторског простора може се на јединствен начин изразити као линеарна комбинација вектора базе.

Доказ. Нека је $x \in V$ и нека је $B = \{x_1, \dots, x_n\}$ база. Како је $L(B) = V$, то је $x \in L(B)$. Ако претпоставимо да је

$$x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n,$$

тада је

$$(\alpha_1 - \beta_1)x_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)x_n = 0,$$

па због независности вектора базе следи

$$\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = \dots = \alpha_n - \beta_n = 0,$$

односно $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n$. ■

Векторски простор има више база, али су све исте кардиналности.

Ако база има коначан број вектора, простор је **коначно-димензионалан**.

Теорема 3 Све базе коначно-димензионалног векторског простора имају једнак број вектора.

Дефиниција 7 Број елемената базе коначно-димензионалног векторског простора $V \neq \{0\}$ је **димензија** тог простора и означава се са $\dim V$. За $V = \{0\}$ је $\dim V = 0$.

ПРИМЕРИ

1. $\dim R^n = n$,
2. $\dim \mathcal{P}_{\leq n} = n + 1$.

Сваки линеарно независан скуп вектора векторског простора је или база или део неке базе.

Нека је V векторски простор димензије n и нека је $B = \{x_1, \dots, x_n\}$ једна база тог простора.

Дефиниција 8 *Ако је за*

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$$

*за $x \in V$, скалари $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ су **координате** вектора x у бази B .*

Координате сваког вектора у датој бази су јединствене.

СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА

- Појам система линеарних једначина
- Крамерово правило

4 ПОЈАМ СИСТЕМА ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА

4.1 Дефиниција система и решења

Нека је K дато поље и нека $a_{ij}, b_i \in K$ за $i = 1, \dots, m$ и $j = 1, \dots, n$.

Дефиниција 9 *Систем S облика*

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad = \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

је систем линеарних једначина над пољем K са непознатим

x_1, x_2, \dots, x_n , коефицијентима a_{ij} и слободним члановима b_i . Ако је

*$b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$ систем је **хомоген**, а у противном је*

***нехомоген**. Систем S је **квадратни** за $m = n$, а **правоугаони** за $m \neq n$.*

Краћи запис система је

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Дефиниција 10 Уређена n -торка $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in K^n$ је **решење** система S ако заменом у систему x_k са α_k за $k = 1, \dots, n$ добијемо n тачних једнакости. Систем је **решив** (сагласан, непротивуречан, могућ) ако има бар једно решење, а у противном је **нерешив** (несагласан, противуречан, немогућ, контрадикторан). Ако систем има само једно решење, онда је **одређен**, а ако има више решења, онда је **неодређен**.

У даљем је $K = R$. Скуп свих решења система S означавамо са R_S .

Дефиниција 11 Системи S_1 и S_2 су **еквивалентни** ако имају исте скупове решења, односно ако је $R_{S_1} = R_{S_2}$.

Дефиниција 12 **Еквивалентне трансформације** система су:

1. замена места једначинама,
2. 'множење' једначине бројем који није нула,
3. 'додавање' једне једначине другој једначини.

Теорема 4 **Еквивалентне трансформације** не мењају скуп решења система.

4.2 Матрични запис система

Ако је $A = (a_{ij})_{m \times n}$, B вектор слободних чланова и X вектор непознатих, систем може да се запише у облику

$$AX = B,$$

односно

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Матрица A је **матрица система** S , а матрица $\overline{A} = (A|B)$ је **проширена матрица** система.

Ако колоне матрице A означима са A_1, \dots, A_n , систем може да се запише и у облику

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

односно

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots x_n A_n = B.$$

Ако је A регуларна матрица, решење система је одређено вектором $X = A^{-1} \cdot B$ (решење матричне једначине).

5 КРАМЕРОВО ПРАВИЛО

5.1 Крамерове формуле

Нека је $AX = B$ дати квадратни систем са регуларном матрицом A и нека је $|A| = D$.

Из једнакости

$$X = A^{-1}B = \frac{\text{adj} A}{|A|} \cdot B = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

слиди да је

$$x_k = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^n b_i A_{ik}$$

за $k = 1, \dots, n$. Ако је D_k детерминанта која се добија од детерминанте D тако што се k -та колона замени вектором B , тада је $\sum_{i=1}^n b_i A_{ik}$ развој те детерминанте по k -тој колони. Према томе, важи следеће тврђење.

Теорема 5 *Ако је матрица система регуларна, систем има јединствено решење дато са*

$$x_k = \frac{D_k}{D}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Ове формуле су познате као Крамерове формуле.

5.2 Дискусија решења система

На основу Крамерових формула следи да:

1. систем има јединствено решење ако је $D \neq 0$,
2. систем је немогућ ако је $D = 0$ и $D_k \neq 0$ за неко $k \in \{1, 2, \dots, n\}$,
3. нема директног одговора о решивости система ако је $D = 0$ и $D_k = 0$ за свако $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, већ треба разматрати субдетерминанте и за D и за D_k ,

Специјално, хомоген систем за $D \neq 0$ има само тривијално решење.

СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА

- КРОНЕКЕР-КАПЕЛИЈЕВА ТЕОРЕМА
- ГАУСОВ АЛГОРИТАМ
- ИСПИТНА ПИТАЊА

КРОНЕКЕР-КАПЕЛИЈЕВА ТЕОРЕМА

- Простор врста и простор колона матрице
- Теорема
- Решавање система

1 Простор врста и простор колона матрице

Нека су A_1, A_2, \dots, A_n колоне матрице A система S .

Теорема 1 (о базисном минору) *Ако је $\text{rang} A = r$, тада:*

- 1. међу колонама A_1, \dots, A_n постоји r независних,*
- 2. свака од осталих $m - r$ колона је линеарна комбинација r независних колона.*

Доказ. Из претпоставке следи да матрица A има регуларну подматрицу реда r . Претпоставимо да је то подматрица коју одређују првих r врста и првих r колона.

1. Докажимо да су колоне A_1, \dots, A_r линеарно независне. Услов $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_r A_r = 0$

одређује хомоген систем

$$\begin{aligned} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1r}\alpha_r &= 0 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2r}\alpha_r &= 0 \\ &\vdots \\ a_{r1}\alpha_1 + a_{r2}\alpha_2 + \dots + a_{rr}\alpha_r &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \dots + a_{mr}\alpha_r &= 0 \end{aligned}$$

Како првих r једначина чини квадратни систем са регуларном матрицом, он (према Крамеровој теореме) има јединствено решење, односно само тривијално решење. Према томе, и цео систем има само тривијално решење, па је $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r$.

2. Докажимо да је колона A_j ($j = r+1, \dots, n$) линеарна комбинација колона A_1, \dots, A_r . Нека је

$$M_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{k1} & \dots & a_{kr} & a_{kj} \end{vmatrix}$$

где су $a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kr}, a_{kj}$ елементи k -те врсте матрице (A_1, \dots, A_r, A_j) . Како је $\text{rang} A = r$, то је $M_j = 0$ за сваки број $k \in \{1, 2, \dots, m\}$. Развојем детерминанте M_j по последњој врсти добијамо да је

$$a_{k1}C_{r+1,1} + a_{k2}C_{r+1,2} + \dots + a_{kr}C_{r+1,r} + a_{kj}M = 0$$

(коефицијент уз a_{kj} је управо детерминанта M регуларне подматрице реда r , а $C_{r+1,1}, \dots, C_{r+1,r}$ су одговарајући кофактори). Из ове једнакости имамо ($M \neq 0$)

$$\begin{aligned} a_{kj} &= -\frac{C_{r+1,1}}{M}a_{k1} - \frac{C_{r+1,2}}{M}a_{k2} - \dots - \frac{C_{r+1,r}}{M}a_{kr} \\ &= \alpha_1 a_{k1} + \alpha_2 a_{k2} + \dots + \alpha_r a_{kr}, \end{aligned}$$

што значи да је a_{kj} из колоне A_j линеарна комбинација елемената a_{k1}, \dots, a_{kr} из колона A_1, \dots, A_r

Како се за свако $k = 1, \dots, m$ добија иста линеарна комбинација, то је

$$A_j = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_r A_r.$$

Према томе, колона A_j је линеарна комбинација колона A_1, \dots, A_r . ■

Исто тврђење важи и за врсте. Дакле, број независних врста матрице A једнак је броју независних колона, односно рангу матрице.

Из теореме следи да је квадратна матрица регуларна ако и само ако су њене врсте (колоне) линеарно независне.

Дефиниција 1 Векторски простор генерисан врстама матрице A је *простор врста*, а простор генерисан колонама матрице A је *простор колона*.

Како независне врсте чине базу простора врста, а независне колоне чине базу простора колона, то су димензија простора врста и димензија простора колона једнаке рангу матрице A .

2 Теорема

Теорема 2 (Кронекер-Капелијева) *Систем линеарних једначина је сагласан ако и само ако је ранг матрице система једнак рангу проширене матрице система.*

Доказ. Нека је A матрица система и $\bar{A} = (A|B)$ проширена матрица система.

\Rightarrow (*Неопходност*)

Ако је систем решив, тада је колона B линеарна комбинација колона A_1, \dots, A_n матрице A , па је димензија простора колона матрице \bar{A} једнака димензији простора колона матрице A . На основу претходне теореме то значи да је $\text{rang} \bar{A} = \text{rang} A$.

\Leftarrow (*Довољност*)

Како је $\text{rang} \bar{A} = \text{rang} A$, димензије простора колона матрица A и \bar{A} су једнаке. То значи да је B линеарна комбинација колона A_1, \dots, A_n , односно да постоје скалари $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ такви да је $\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 \neq 0$ и

$$B = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_n A_n.$$

Из последње једнакости следи да је

$$\begin{array}{ccccccc} b_1 & = & a_{11}\alpha_1 & + & a_{12}\alpha_2 & + & \dots & + & a_{1n}\alpha_n \\ b_2 & = & a_{21}\alpha_1 & + & a_{22}\alpha_2 & + & \dots & + & a_{2n}\alpha_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ b_m & = & a_{m1}\alpha_1 & + & a_{m2}\alpha_2 & + & \dots & + & a_{mn}\alpha_n \end{array}$$

Према томе, $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ је решење система, што значи да је систем решив. ■

3 Решавање система

3.1 Нехомоген систем

На основу Кронекер-Капелијеве теореме може се утврдити да ли је дати систем сагласан.

Претпоставимо да јесте, при чему је $\text{rang} A = r$. Тада међу врстама матрице A (а тиме и матрице \overline{A}) постоји тачно r независних. Ако је $r < m$, преосталих $m - r$ једначина може се одбацити.

Нека је један базисни минор одређен са првих r врста и првих r колона матрице A (то се увек може постићи еквивалентним трансформацијама врста и колона).

Одбацивањем последњих $m - r$ једначина (у случају $m > r$) добијамо за $n > r$ еквивалентан систем

$$\begin{array}{cccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1r}x_r & = & b_1 & - & a_{1,r+1}x_{r+1} & \cdots & - & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2r}x_r & = & b_2 & - & a_{2,r+1}x_{r+1} & \cdots & - & a_{2n}x_n \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{r1}x_1 & + & a_{r2}x_2 & + & \cdots & + & a_{rr}x_r & = & b_r & - & a_{r,r+1}x_{r+1} & \cdots & - & a_{rn}x_n \end{array}$$

Променљиве x_1, \dots, x_r су **базисне** или **зависне**, а променљиве x_{r+1}, \dots, x_n су **слободне** или **независне**. За $r = n$ у систему не постоје слободне променљиве.

Теорема 3 *Сагласан систем има јединствено решење ако и само ако је ранг матрице система једнак броју непознатих.*

Доказ. Нека је $\text{rang} A = r$.

\Rightarrow (Неопходност)

Систем који има јединствено решење нема слободне променљиве, па је $r = n$.

\Leftarrow (Довољност)

Ако је $r = n$, одбацивањем $m - r$ једначина које нису у базисном минору, добијамо квадратни систем чија је матрица регуларна, па он има јединствено решење. ■

Према томе,

1. Ако је $\text{rang} A = n$, систем има јединствено решење које се може добити Крамеровим правилом, након одбацивања 'сувишних' једначина (ако их има).
2. Ако је $\text{rang} A < n$, након одбацивања 'сувишних' једначина (ако их има), добија се квадратни систем $CY = D$ реда r , где је Y вектор неких r од x_1, \dots, x_n непознатих и где се у вектору D појављују преосталих $m - r$ слободних непознатих. Свака од слободних непознатих може да узме произвољну вредност, па је систем неодређен, а скуп решења R_S је $n - r$ -параметарски.

3.2 Хомоген систем

Хомоген систем је сагласан и има тривијално решење $(0, 0, \dots, 0)$.

Теорема 4 *Хомоген систем има нетривијално решење ако и само ако је ранг матрице система мањи од броја непознатих.*

Доказ. Из претходне теореме следи да систем има јединствено решење за $n = r$ и да је неодређен за $r < n$. У првом случају систем има само тривијално решење, а у другом случају је неодређен, односно има и нетривијална решења. ■

Према томе,

1. Ако је $\text{rang} A = n$, систем има само тривијално решење. У случају квадратног система услов је $|A| \neq 0$.
2. Ако је $r < n$, систем је неодређен, а скуп решења је $n - r$ -параметарски.

Важи и следеће тврђење.

Теорема 5 *За $r < n$ скуп решења хомогеног систем је векторски простор димензије $n - r$.*

Једну базу векторског простора решења хомогеног система чине решења која се добијају тако што слободне променљиве узимају вредност нула, осим једне чија је вредност 1. Таква решења чине **фундаментални систем решења**. Ако је X_1, \dots, X_{n-r} фундаментални систем решења и X произвољно решење система, тада је

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_r X_{n-r}$$

за неке реалне константе c_1, \dots, c_{n-r} .

ГАУСОВ АЛГОРИТАМ

- Квадратни систем
- Правоугаони систем

4 Квадратни систем

4.1 Регуларна матрица система

ПРИМЕР

Ако је S систем

$$x + y + 2z = -1$$

$$2x - y + 2z = -4$$

$$4x + y + 4z = -2$$

тада применом елементарних трансформација добијамо

$$\begin{array}{rcl}
 x + y + 2z = -1 & x + y + 2z = -1 \\
 S \sim 3y + 2z = 2 & \sim 3y + 2z = 2 \\
 -3y - 4z = 2 & -2z = 4
 \end{array}$$

Из последње једначине следи $z = -2$, из претходне следи $3y = 6$, односно $y = 2$ и из прве једначине имамо $x = 1$.

Слично је и у општем случају. Нека је дат систем $AX = B$, где је $A = (a_{ij})_n$ регуларна матрица. Применом елементарних трансформација врши се елиминација променљивих и систем се своди на троугаону форму.

Ако је $a_{11} \neq 0$, тада множењем прве једначине редом са $-a_{21}/a_{11}$, $-a_{31}/a_{11}, \dots, a_{m1}/a_{11}$ и додавањем другој, трећој, ..., последњој једначини, добијамо еквивалентан систем

$$\begin{array}{rcl}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n & = & b_2^{(1)} \\
 \vdots & & \vdots \\
 a_{n2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{nn}^{(1)}x_n & = & b_n^{(1)}
 \end{array}$$

На тај начин је променљива x_1 елиминисана из свих једначина, осим прве.

Слично, елиминисањем променљиве x_2 из последњих $n - 2$ једначина добијамо еквивалентан систем (уз претпоставку $a_{22} \neq 0$)

$$\begin{array}{rcl}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n & = & b_2^{(1)} \\
 a_{33}^{(2)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(2)}x_n & = & b_3^{(2)} \\
 \vdots & & \vdots \\
 a_{n3}^{(2)}x_3 + \dots + a_{nn}^{(2)}x_n & = & b_n^{(2)}
 \end{array}$$

Настављајући овај поступак, после $n - 1$ корак имамо еквивалентан систем тругаоног облика

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)} \\ a_{33}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{3n}^{(2)}x_n &= b_3^{(2)} \\ &\vdots \\ a_{nn}^{(n-1)}x_n &= b_n^{(n-1)} \end{aligned}$$

- Услови $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$ могу се обезбедити пермутовањем једначина у систему.
- Из троугаоног облика система се једноставно рачуна детерминанта матрице система и једноставно решава систем.
- Полазећи од последње једначине према првој, сукцесивно се решава једна по једна променљива, а решење система је јединствено.
- Овај поступак је познат као *Гаусов алгоритам*.

4.2 Сингуларна матрица система

Гаусов алгоритам се може применити и у случају када матрица система није регуларна, с тим што се тада добија еквивалентан систем степенастог облика. Висине степеника су 1, а дужине могу бити веће од 1.

На пример, може се добити систем облика

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z - u &= 2 \\ z + u &= 1 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Променљиве x и z (на почетку сваког степеника) се решавају из система, а остале су слободне променљиве.

Међутим, може се добити и систем облика

$$\begin{array}{rclclcl} x & - & 2y & + & 3z & - & u & = & 2 \\ & & & & z & + & u & = & 1 \\ & & & & & & 0 & = & 1 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

У том случају систем није сагласан.

У општем случају, за $r(A) = k < n$ последња једначина система је

$$a_{kk}^{(k-1)}x_k + \cdots + a_{kn}^{(k-1)}x_n = b_k^{(k-1)}.$$

Иза ње следи $n - k$ једнакости од којих је прва $0 = c$, а остале су облика $0 = 0$.

1. Ако је $c \neq 0$, систем нема решења.
2. Ако је $c = 0$, систем је сагласан и неодређен. Из последње једначине решавамо једну променљиву а онда уназад и осталих $k - 1$ променљивих. Скуп решења система има $n - k$ слободних променљивих (параметара).

5 Правоугаони систем

Нека је дат систем $AX = B$ са m једначина и n непознатих ($m \neq n$).

1. Ако је $m > n$ и $\text{rang} A < n$ алгоритам је исти као у случају квадратног система са нерегуларном матрицом система.
2. Ако је $m < n$ опет исто, с тим што се могу али и не морају појавити једнакости облика $0 = c$ и $0 = 0$.

3. Ако је $m > n$ и $\text{rang} A = n$, тада се Гаусовим алгоритмом добија еквивалентан систем облика

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)} \\a_{33}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{3n}^{(2)}x_n &= b_3^{(2)} \\\vdots &= \vdots \\a_{nn}^{(n-1)}x_n &= b_n^{(n-1)} \\0 &= c \\0 &= 0 \\\vdots &= \vdots \\0 &= 0\end{aligned}$$

У том случају систем има јединствено решење ако је $c = 0$. У противном систем је несагласан.

ВЕКТОРИ

- Појам вектора и основне операције
- Скаларни производ вектора
- Векторски производ вектора
- Мешовити производ вектора
- Испитна питања

ПОЈАМ ВЕКТОРА И ОСНОВНЕ ОПЕРАЦИЈЕ

- Вектор у простору
- Основне операције вектора
- Координате вектора

1 Вектор у простору

Нека је Π простор који опажамо и нека су A и B две тачке тог простора.

Дефиниција 1 Дуж AB у којој разликујемо почетну тачку A и крајњу тачку B је оријентисана дуж или вектор. Права p која садржи тачке A и B је носач тог вектора и она одређује његов правац, а смер вектора је од A ка B . Дужина дужи AB је интензитет или норма вектора.

Ознака за вектор је \overrightarrow{AB} или \vec{a} или само a .

Специјални вектори су:

1. **јединични вектор** или **орт** - вектор чији је интензитет једнак јединици,
2. **нула вектор** (**о**) - вектор који има исту почетну и крајњу тачку и чији правац и смер нису одређени.

Нека је \mathcal{V} скуп свих вектора простора.

Дефиниција 2 Вектори \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} из \mathcal{V} су једнаки ако постоји трансляција дужи CD у дуж AB којом се тачка C пресликава у тачку A , а тачка D у тачку B .

Теорема 1 Релација једнакости вектора из \mathcal{V} је релација еквиваленције.

Класа еквиваленције вектора \overrightarrow{AB} је скуп вектора $\mathcal{V}_{\overrightarrow{AB}}$ дат са

$$\mathcal{V}_{\overrightarrow{AB}} = \{\mathbf{a} \in \mathcal{V} \mid \mathbf{a} = \overrightarrow{AB}\}.$$

За рад са векторима довољно је узети по један вектор из сваке класе.

Дефиниција 3 Вектори су:

1. **колинеарни** ако имају паралелне носаче,
2. **компланарни** ако су у паралелним равнима.

2 Основне операције вектора

Нека је $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BE}$ и $\mathbf{c} = \overrightarrow{AE}$.

Дефиниција 4 Операција $+$: $\mathcal{V}^2 \rightarrow \mathcal{V}$ дефинисана са

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$$

је **збир вектора**.

Неутрални елемент у односу на операцију сабирања је **нула вектор**, а инверзни елемент постоји за сваки вектор \mathbf{a} и означава се са $-\mathbf{a}$.

Теорема 2 Структура $(\mathcal{V}, +)$ је Абелова група.

Нека $\mathbf{a} \in \mathcal{V}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$.

Дефиниција 5 Операција $\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ дефинисана са

$$\lambda \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}$$

је **множење вектора скаларом** ако је интензитет вектора \mathbf{b} једнак $|\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$, ако му је правац исти као правац вектора \mathbf{a} и ако је смер исти као смер вектора \mathbf{a} за $\lambda > 0$, а супротан за $\lambda < 0$.

Теорема 3 Структура $(\mathcal{V}, +, \cdot)$ је векторски простор.

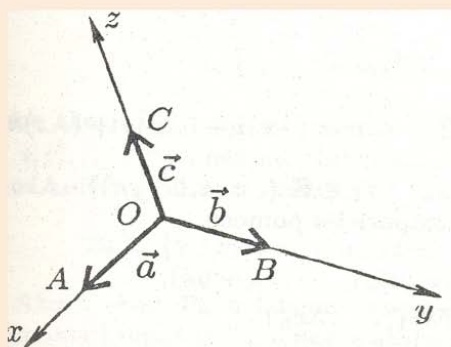
Теорема 4 У простору \mathcal{V} важи:

1. свака три некомпланарна вектора су линеарно независна,
2. свака четири вектора су линеарно зависна.

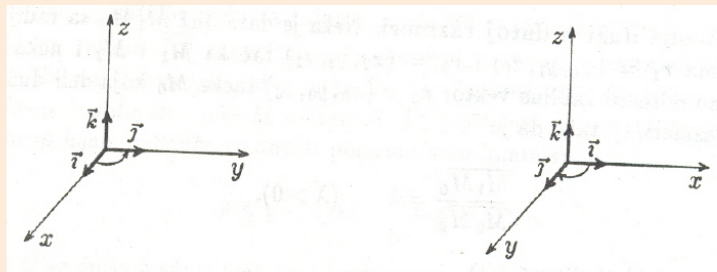
Према томе, простор \mathcal{V} је тродимензионалан и свака три некомпланарна вектора чине базу тог простора.

3 Координате вектора

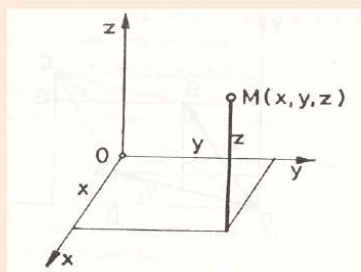
Нека је $B = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ база простора \mathcal{V} и нека је O произвољна тачка простора Π . Вектори $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$ одређују три осе, x , y и z које заједно са тачком O чине један **координатни систем** који се означава са $Oxyz$. Тачка O је **координатни почетак**.



Ако су базисни вектори узајамно нормални, координатни систем је **правоугли** или **Декартов**, а ако су и јединични, координатни систем је **ортонормиран**. Јединични вектори чији су почеци у тачки O обично се означавају са \mathbf{i} , \mathbf{j} и \mathbf{k} . Координатни систем може бити **десни** или **енглески** и **леви** или **француски**.



Нека је M још једна произвољна тачка простора Π и нека су x , y и z њене координате (*апсциса*, *ордината* и *апликата*).

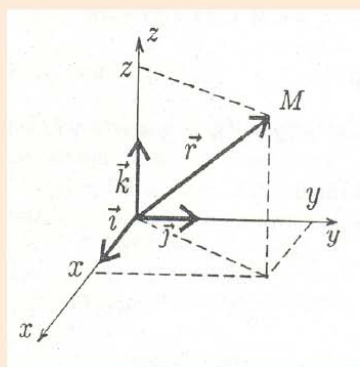


Дефиниција 6 Вектор \overrightarrow{OM} је **радијус вектор** или **вектор положаја** тачке M у односу на тачку O .

За радијус вектор се користи и ознака \mathbf{r} .

Теорема 5 За радијус вектор \overrightarrow{OM} важи

$$\overrightarrow{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

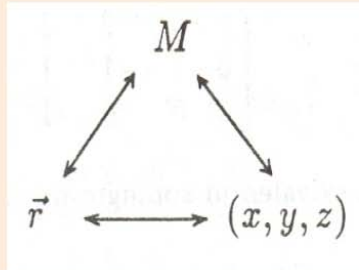


Теорема 6 Пресликавања

$$f : M \mapsto \overrightarrow{OM}, \quad g : \overrightarrow{OM} \mapsto (x, y, z), \quad h : (x, y, z) \mapsto M$$

су бијекције између простора Π , \mathcal{V} и R^3 .

Због тога се често тачка из Π , уређена тројка из R^3 и радијус вектор из \mathcal{V} идентификују, при чему се пише $\overrightarrow{OM} = (x, y, z)$.



За x , y и z се каже да су и **координате вектора** \overrightarrow{OM} . Ако је

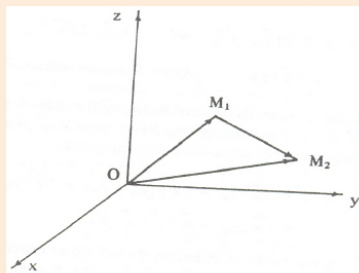
$$\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{OM_1} = (x_1, y_1, z_1), \quad \mathbf{r}_2 = \overrightarrow{OM_2} = (x_2, y_2, z_2),$$

тада је

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2), \quad \lambda \mathbf{r}_1 = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1),$$

као и

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$



СКАЛАРНИ ПРОИЗВОД

- Дефиниција и основна својства
- Скаларни производ у ортонормираној бази
- Растојање између двеју тачака
- Угао између два вектора
- Еуклидски простор

4 Дефиниција и основна својства

Дефиниција 7 Операција $\cdot : \mathcal{V}^2 \rightarrow R$ дефинисана са

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

је скаларни производ вектора.

Користи се и ознака $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$.

Директно из дефиниције следе нека својства скаларног производа.

Теорема 7 За $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathcal{V}$ и $\lambda \in R$ важи:

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$,
2. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$,
3. $(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$,
4. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 \geq 0$,
5. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$ ако и само ако је $\mathbf{a} = \mathbf{o}$.

5 Скаларни производ у ортонормираној бази

Нека је $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ ортонормирана база десне оријентације.

Очигледно да је

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$$

и

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0.$$

Теорема 8 Ако је $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ у бази $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, тада је у тој бази

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Доказ. Како је

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k},$$

то је

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \cdot (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) \\ &= a_x b_x \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + a_y b_y \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} + a_z b_z \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \blacksquare \end{aligned}$$

6 Растојање између двеју тачака

За $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ имамо да је

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2.$$

Како је $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$, то је интензитет вектора \mathbf{a} дат са

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Ако тачкама M_1 и M_2 одговарају радијус вектори \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , тада је $\overrightarrow{M_1 M_2} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, па је растојање d између тачака M_1 и M_2 дато са

$$d = |\overrightarrow{M_1 M_2}| = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|,$$

односно са

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

7 Мера угла између два вектора

Из дефиниције скаларног производа имамо да је

$$\cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|},$$

односно преко координата у ортонормираној бази

$$\cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Два ненулта вектора \mathbf{a} и \mathbf{b} су ортогонална ако и само ако је $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

Нека су α , β и γ углови између вектора $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и ортова \mathbf{i} , \mathbf{j} и \mathbf{k} . Како је

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{i} = a_x, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{j} = a_y, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{k} = a_z,$$

то је

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\mathbf{a}|}.$$

Специјално, за $|\mathbf{a}| = 1$ је

$$\cos \alpha = a_x, \quad \cos \beta = a_y, \quad \cos \gamma = a_z,$$

што значи да су $\cos \alpha$, $\cos \beta$ и $\cos \gamma$ ортогоналне пројекције јединичног вектора на координатне осе, односно координате тог јединичног вектора.

Дакле, ако је \mathbf{a} јединични вектор, онда је

$$\mathbf{a} = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}.$$

За произвољан вектор \mathbf{a} важи

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

8 Еуклидски простор

Ако се у векторском простору R^n дефинише скаларни производ са

$$a \cdot b = \sum_{k=1}^n a_k b_k$$

за $a = (a_1, \dots, a_n)$ и $b = (b_1, \dots, b_n)$ добија се n -димензионални Еуклидски простор.

Норма вектора се дефинише као и у простору \mathcal{V} , али се означава са $\|a\|$. Дакле,

$$\|a\| = \sqrt{a \cdot a} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}.$$

На пример, вектори стандардне базе имају норму једнаку 1.

За векторе a и b се каже да су ортогонални ако је $a \cdot b = 0$. Према томе, вектори стандардне базе су међусобно ортогонални, па је та база једна ортонормирана база у Еуклидском простору R^n .

Дефинишу се, такође, збир $a + b$ и разлика $a - b$, као и растојање d између a и b са

$$d = |b - a| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2}.$$

Угао између вектора a и b одређен је са

$$\cos \angle(a, b) = \frac{a_1 b_1 + \dots + a_n b_n}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + \dots + b_n^2}}.$$

ВЕКТОРСКИ ПРОИЗВОД

- Дефиниција и основна својства
- Векторски производ у ортонормираној бази

9 Дефиниција и основна својства

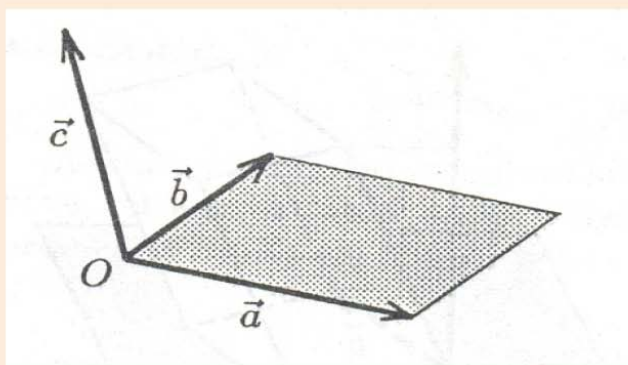
Дефиниција 8 Операција $\times : \mathcal{V}^2 \rightarrow \mathcal{V}$ којом се пару вектора \mathbf{a} и \mathbf{b} додељује вектор \mathbf{c} који има:

1. правац ортогоналан на векторе \mathbf{a} и \mathbf{b} ,
2. смер при којем \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} образују триједар десне оријентације,
3. интензитет једнак $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

је **векторски производ вектора**.

Векторски производ вектора \mathbf{a} и \mathbf{b} је вектор $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Према дефиницији интензитет вектора $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ једнак је мерном броју површине паралелограма конструисаног над векторима \mathbf{a} и \mathbf{b} .



Из дефиниције следе нека својства векторског производа.

Теорема 9 За $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathcal{V}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ важи:

1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$,
2. $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$,
3. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$,
4. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$,
5. $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$,
6. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ ($\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \vec{0}$) ако и само ако су вектори \mathbf{a} и \mathbf{b} колинеарни.

10 Векторски производ у ортонормираној бази

Нека је $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ ортонормирана база десне оријентације.

Теорема 10 *Ако је $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ у бази $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, тада је у тој бази*

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y, -a_x b_z + a_z b_x, a_x b_y - a_y b_x).$$

Доказ. Тврђење следи из једнакости

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \times (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k}\end{aligned}$$

Векторски производ може да се запише и у облику

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

или у облику формалне детерминанте,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Нека је $*$ операција у R^3 дефинисана са

$$(a_1, a_2, a_3) * (b_1, b_2, b_3) = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Теорема 11 *Структуре $(\mathcal{V}, +, \times)$ и $(R^3, +, *)$ су изоморфне.*

Доказ. Изоморфизам се остварује бијекцијом $f: \mathcal{V} \rightarrow R^3$ датом са

$$f(\mathbf{a}) = (a_x, a_y, a_z).$$

Једноставно се проверава да је

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b}), \quad f(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) * f(\mathbf{b}).$$

МЕШОВИТИ ПРОИЗВОД ВЕКТОРА

- Дефиниција и основна својства
- Мешовити производ у ортонормираној бази
- Геометријска интерпретација

11 Дефиниција и основна својства

Дефиниција 9 Операција која пресликава \mathcal{V}^3 у \mathbb{R} дефинисана за векторе \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} као скаларни производ вектора $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ и вектора \mathbf{c} је *мешовити производ вектора*.

Мешовити производ вектора \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} означава се са $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$.

Дакле,

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}.$$

Из својстава векторског и скаларног производа следе нека својства мешовитог производа.

Теорема 12 *За мешовити производ важи:*

1. $\lambda[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{a}, \lambda\mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \lambda\mathbf{c}]$,
2. $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = 0$ ако и само ако су \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} линеарно зависни, односно ако су компланарни.

Доказ. за својство 2.

\Rightarrow

Ако је $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = 0$, тада је $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ или $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ или $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{c}$. У првом случају су \mathbf{a} и \mathbf{b} колинеарни, а у трећем су сва три вектора нормална на $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Према томе, у сва три случаја су вектори \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} компланарни.

\Leftarrow

Ако је бар један од вектора \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} или $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ нула вектор, тада је мешовити производ једнак нули. У противном је $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{c}$, па је опет мешовити производ једнак нули. ■

12 Мешовити производ у ортонормираној бази

Нека је $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ ортонормирана база десне оријентације и нека је

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}, \quad \mathbf{c} = c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j} + c_z \mathbf{k}.$$

Теорема 13 *За $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathcal{V}$ важи:*

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Доказ. Како је

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \mathbf{k},$$

то је

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] &= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z \\ &= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Из својстава детерминанте следе још нека својства мешовитог производа.

Теорема 14 *За $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathcal{V}$ важи:*

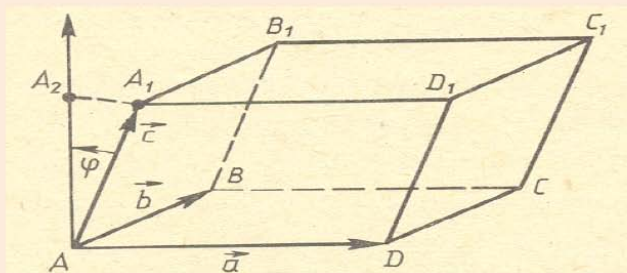
1. $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}]$ (цикличне пермутације),
2. $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = -[\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}] = -[\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}].$

13 Геометријска интерпретација

Нека су \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} некопланарни вектори.

Теорема 15 *Апсолутна вредност мешовитог производа $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ једнака је запремини паралелопипеда одређеног векторима \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} .*

Доказ. Нека вектори \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} образују триједар десне оријентације.



Ако је P површина паралелограма одређеног векторима \mathbf{a} и \mathbf{b} и ако је H дужина одговарајуће висине паралелопипеда запремине V , тада је

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \\ &= |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}| \cos \angle(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c}) \\ &= P \cdot H \\ &= V. \blacksquare \end{aligned}$$

Ако вектори \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} образују триједар леве оријентације, тада је $H = -|\mathbf{c}| \cos \angle(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c})$, па је $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = -V$.

Према томе, $||[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]|| = V$.

АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА

- Раван у простору
- Права у простору
- Права и раван
- Хиперраван

РАВАН У ПРОСТОРУ

- Разни облици једначине равни
- Растојање тачке од равни
- Узајамни положај двеју равни
- Угао између двеју равни

1 Разни облици једначине равни

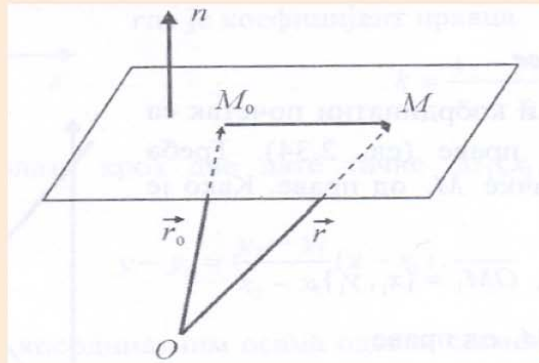
Нека је $Oxyz$ правоугли координатни систем и нека је $M_0(x_0, y_0, z_0)$ фиксирана, а $M(x, y, z)$ произвољна тачка дате равни π .

Раван π је одређена тачком $M_0 \in \pi$ и вектором \mathbf{n} који је нормалан на раван π .

1.1 Општи облик

Ако је $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$, $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$ и $\mathbf{n} = (A, B, C)$, где је $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, тада је $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$.

Обрнуто, ако за неку тачку M простора важи претходна једнакост, онда тачка M припада равни π .



Према томе, **општи облик** једначине равни је

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0,$$

векторски, односно

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

скаларно или у координатама. Вектор \mathbf{n} је **вектор нормале** равни π .

Ако је $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0 = -D$, тада је једначина равни

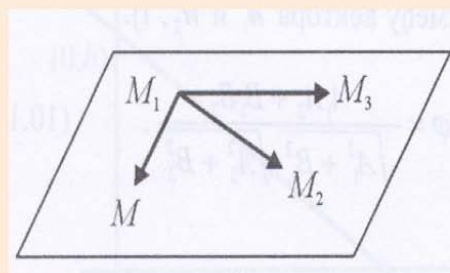
$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} + D = 0,$$

односно

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

1.2 Раван која садржи три дате тачке

Нека је раван π одређена тачкама $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$.



Једначина равни π је

$$[\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}] = 0,$$

векторски, односно

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

скаларно или у координатама.

1.3 Сегментни облик

Ако су дате тачке на координатним осама, $M_1(a, 0, 0)$, $M_2(0, b, 0)$ и $M_3(0, 0, c)$, једначина равни π одређене тим тачкама је

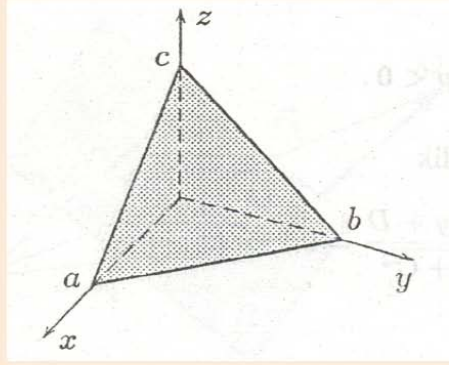
$$\begin{vmatrix} x - a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0,$$

односно

$$(x - a)bc + abz + acy = 0.$$

Из ове једначине добијамо **сегментни облик** равни π

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$



Овај облик може да се добије и из општег облика једначине равни

$$Ax + By + Cz = -D$$

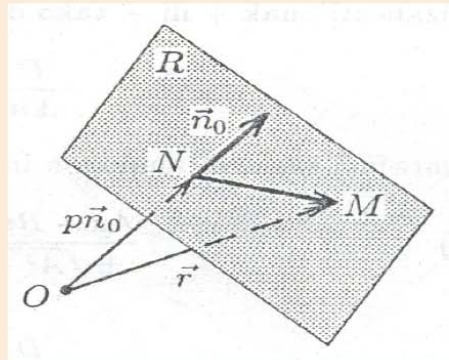
дељењем леве и десне стране са $-D$ за $D \neq 0$ и стављањем

$$a = \frac{-D}{A}, \quad b = \frac{-D}{B}, \quad c = \frac{-D}{C}.$$

1.4 Нормалан облик

Нека је p одстојање координатног почетка O од дате равни π и нека је \mathbf{n}_0 јединични вектор нормале те равни. За радијус вектор \mathbf{r} произвољне тачке M равни π важи

$$(\mathbf{r} - p\mathbf{n}_0) \cdot \mathbf{n}_0 = 0.$$



Из ове једнакости добијамо **нормалан облик** једначине равни

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_0 - p = 0$$

или скаларно

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0,$$

где су α , β и γ углови вектора нормале са координатним осама. Из општег облика једначине равни

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

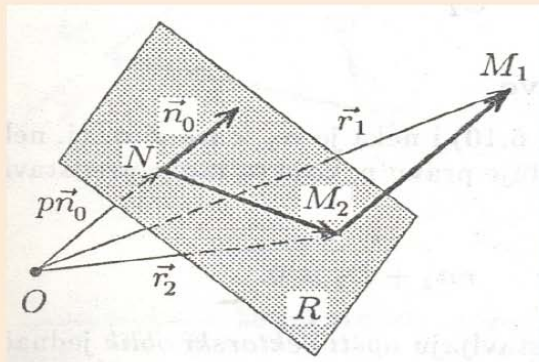
нормалан облик може да се добије дељењем са $|\mathbf{n}|$ или $-|\mathbf{n}|$ зависно од знака параметра D (узима се супротан знак). При томе је $\mathbf{n}_0 = \pm(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ и

$$\cos \alpha = \frac{A}{|\mathbf{n}|}, \quad \cos \beta = \frac{B}{|\mathbf{n}|}, \quad \cos \gamma = \frac{C}{|\mathbf{n}|},$$

где је $|\mathbf{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$.

2 Растојање тачке од равни

Из нормалног облика једначине равни $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_0 - p = 0$ једноставно се одређује одстојање неке тачке M_1 од те равни. Ако је M_2 пројекција тачке M_1 на дату раван, тражено одстојање је једнако интензитету вектора $\overrightarrow{M_2M_1}$.



Како тачка M_2 припада равни и како је вектор $\overrightarrow{M_2M_1}$ колинеаран са \mathbf{n}_0 , имамо да је

$$\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{n}_0 - p = 0, \quad \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \lambda \mathbf{n}_0.$$

Из ове две једнакости следи

$$(\mathbf{r}_1 - \lambda \mathbf{n}_0) \cdot \mathbf{n}_0 - p = 0,$$

одакле је

$$\lambda = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{n}_0 - p.$$

Према томе,

$$d = |\lambda| = |\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{n}_0 - p|$$

или скаларно,

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Дакле, тражено одстојање се добија тако што се у нормалном облику једначине равни замене координате тачке M_1 и узме апсолутна вредност.

3 Узајамни положај двеју равни

Дате равни π_1 и π_2 могу да буду паралелне или да имају заједничких тачака, а да се не 'поклапају' (нису исте).

Ако су

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

једначине равни π_1 и π_2 , тада

1. $\pi_1 \parallel \pi_2$ ако и само ако $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$

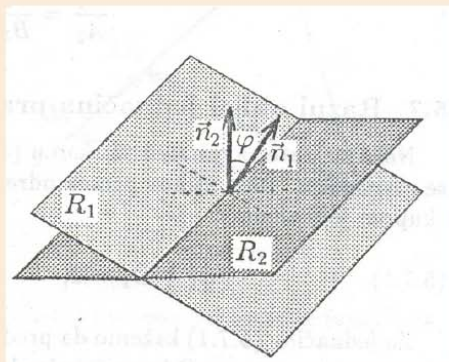
2. $\pi = \pi_2$ ако и само ако $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2},$

3. π_1 и π_2 нису паралелне ('секу се') ако и само ако $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$

или $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$

4 Угао између двеју равни

Угао између равни π_1 и π_2 је једнак углу између њихових нормала \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 .



Дакле,

$$\begin{aligned}\cos \angle(\pi_1, \pi_2) &= \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} \\ &= \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}\end{aligned}$$

Равни π_1 и π_2 су ортогоналне ако је угао између њих прав, односно ако је

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$$

или

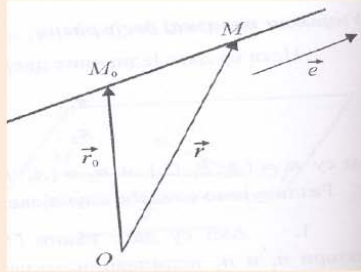
$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.$$

ПРАВА У ПРОСТОРУ

- Разни облици једначине праве
- Узајамни положај двеју правих
- Угао између двеју правих

5 Разни облици једначине праве

Нека је $M_0(x_0, y_0, z_0)$ фиксирана, а $M(x, y, z)$ произвољна тачка праве p и нека су \mathbf{r}_0 и \mathbf{r} радијус вектори тих тачака.



5.1 Канонски облик

Ако је права p одређена тачком M_0 и вектором $\mathbf{v} = (a, b, c)$, тада се њена једначина добија из услова да су вектори $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ и \mathbf{v} колинеарни,

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Ово је **канонски** или **симетричан** облик једначине праве.

Једначина може да се напише и у облику

$$\frac{x - x_0}{\cos \alpha} = \frac{y - y_0}{\cos \beta} = \frac{z - z_0}{\cos \gamma},$$

где су α , β и γ углови између вектора \mathbf{v} и координатних оса.

5.2 Параметарски облик

Из канонског облика се добија **параметарски облик** једначине праве

$$x = x_0 + \lambda a, \quad y = y_0 + \lambda b, \quad z = z_0 + \lambda c$$

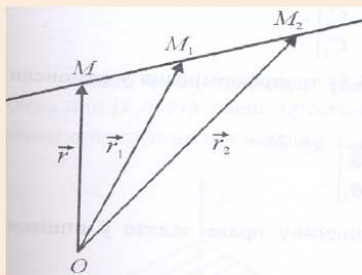
или у векторском облику

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \lambda \mathbf{v}.$$

Свакој вредности параметра λ одговара једна тачка праве p .

5.3 Права која садржи две дате тачке

Ако је права p одређена тачкама $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ чији су радијус вектори \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , тада вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ одређује правац праве.



Према томе једначина праве p је

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \lambda(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1),$$

односно скаларно

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

5.4 Општи облик

Претпоставимо да је права p пресек равни π_1 и π_2 чији вектори нормала $\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ нису колинеарни.

Једначине

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_1 + D_1 = 0, \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_2 + D_2 = 0$$

или скаларно

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

представљају **општи облик** једначине праве p .

Из општег облика може да се добије канонски и обрнуто.

Како је ранг претходног система једнак 2, претпоставимо да је

$$D = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0. \text{ Једно решење система је } (x_0, y_0, 0), \text{ где је}$$

$$x_0 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} -D_1 & B_1 \\ -D_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad y_0 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} A_1 & -D_1 \\ A_2 & -D_2 \end{vmatrix}.$$

Вектор који одређује правац праве је $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$. Према томе, канонски облик једначине праве p је

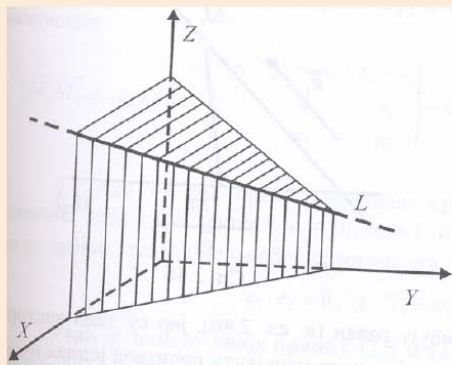
$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Обрнуто, из симетричног облика имамо да је

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}, \quad \frac{x - x_0}{a} = \frac{z - z_0}{c},$$

одакле се добија општи облик

$$A_1x + B_1y + D_1 = 0, \quad A_2x + C_2z + D_2 = 0.$$



Ако је дат параметарски облик $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \lambda \mathbf{v}$, онда скаларним множењем леве и десне стране ове једнакости векторима \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 који су нормални на вектор \mathbf{v} добијамо једнакости

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_1 = \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n}_1 + \lambda \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_1 = \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n}_1,$$

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_2 = \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n}_2 + \lambda \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_2 = \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n}_2.$$

Ове једнакости представљају једначине равни

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_1 + D_1 = 0, \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_2 + D_2 = 0,$$

где је $D_1 = -\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n}_1$ и $D_2 = -\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n}_2$. Обично се за \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 узимају два од вектора $(b, -a, 0)$, $(c, 0, -a)$, $(0, c, -b)$.

6 Узајамни однос двеју правих

Дате су праве p_1 и p_2 чије су једначине

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1}, \quad \frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{c_2}.$$

6.1 Компланарне праве

Праве p_1 и p_2 су компланарне ако су вектори $\mathbf{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $\mathbf{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ и $\overrightarrow{M_1 M_2}$ компланарни, односно ако је

$$[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1] = 0$$

или скаларно

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Ако су вектори \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 колинеарни, праве p_1 и p_2 су паралелне. Ако су још и вектори \mathbf{n}_1 и $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ колинеарни, праве се 'поклапају'.

6.2 Мимоилазне праве

Праве p_1 и p_2 су мимоилазне ако вектори $\mathbf{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $\mathbf{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ нису компланарни, односно ако је

$$[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1] \neq 0.$$

За мимоилазне праве p_1 и p_2 постоји заједничка нормала, односно права p која је нормална и на p_1 и на p_2 . Правац праве p је $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$.

Може да се одреди и најкраће растојање између правих p_1 и p_2 . Нека је π раван која је паралелна правој p_1 и садржи праву p_2 . Једначина равни π је

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) \cdot (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2) = 0.$$

Тражено растојање d једнако је одстојању било које тачке праве p_1 , на пример M_1 , од равни π . Према томе,

$$d = \frac{|(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2)|}{|\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2|}.$$

7 Угао између двеју правих

Угао између правих p_1 и p_2 је угао између њихових вектора нормала \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 . Према томе,

$$\begin{aligned} \cos \angle(p_1, p_2) &= \cos \angle(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) \\ &= \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} \\ &= \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \end{aligned}$$

Праве p_1 и p_2 су ортогоналне ако је $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$, односно

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0.$$

ПРАВА И РАВАН

- Узајамни положај праве и равни
- Угао између праве и равни

8 Узајамни положај праве и равни

Нека је права p одређена тачком $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектором $\mathbf{v} = (a, b, c)$ и нека је раван π одређена вектором нормале $\mathbf{n} = (A, B, C)$ и параметром D . Дакле, једначине праве p и равни π су

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \lambda \mathbf{v}, \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} + D = 0$$

или, скаларно,

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}, \quad Ax + By + Cz + D = 0.$$

8.1 Права и раван су међусобно паралелне

Права p и раван π су међусобно паралелни ако су вектори \mathbf{v} и \mathbf{n} узајамно нормални, односно ако је

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$$

или, скаларно,

$$aA + bB + cC = 0.$$

8.2 Права 'продире' раван

За радијус вектор \mathbf{r} заједничке тачке праве p и равни π (продорне тачке) важи

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \lambda \mathbf{v}, \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} + D = 0.$$

Заменом \mathbf{r} из прве у другу једнакост добијамо

$$(\mathbf{r}_0 + \lambda \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} + D = 0,$$

односно

$$\lambda = -\frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n} + D}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}.$$

Према томе, радијус вектор заједничке тачке је дат са

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 - \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n} + D}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}.$$

9 Угао између праве и равни

Угао између праве p и равни π је једнак комплементу угла између праве p и вектора нормале равни π . Према томе,

$$\begin{aligned}\sin \angle(p, \pi) &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - \angle(p, \pi) \right) \\ &= \cos \angle(\mathbf{v}, \mathbf{n}) \\ &= \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{n}|} \\ &= \frac{aA + bB + cC}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\end{aligned}$$

Правна p је нормална на раван π ако и само ако су вектори \mathbf{v} и \mathbf{n} колинеарни.

ХИПЕРРАВАН

10 Хиперраван у Еуклидском простору

У Еуклидском простору може да се дефинише појам који одговара појму *раван* у простору Π .

Нека је у векторском простору R^n дефинисан скаларни производ са

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

за $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ и нека је $\boldsymbol{\alpha} \in R^n$ и $\alpha \in R$.

10.1 Дефиниција хиперравни

Скуп свих тачака $\mathbf{x} \in V$ за које важи

$$\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\alpha} + \alpha = 0$$

је $n - 1$ -димензионална раван или хиперраван у простору R^n .

За $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, једначина хиперравни је

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n + \alpha = 0.$$

Ако је $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ фиксирана, а \mathbf{x} произвољна тачка хиперравни, тада је

$$\alpha_1(x_1 - a_1) + \alpha_2(x_2 - a_2) + \dots + \alpha_n(x_n - a_n) = 0$$

или

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{y} = 0,$$

за $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$

Аналогно појму ортогоналности вектора можемо дефинисати да су вектори \mathbf{x} и \mathbf{y} из R^n **ортогонални** ако је $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$. У том смислу за вектор $\boldsymbol{\alpha}$ можемо рећи да је **вектор нормале** хиперравни.

Поред појма *хиперраван* могу се увести и појмови *k-димензиона раван, права, дуж, нормала на раван, одстојање тачке од хиперравни, пресек две равни, угао између две праве, угао између праве и хиперравни*.

10.2 Специјални случајеви хиперравни

1. У простору R (права) једначина хиперравни је

$$\alpha_1 x_1 + \alpha = 0.$$

што представља тачку са координатом $-\alpha/\alpha_1$,

2. У простору R^2 (раван са координатним осама x_1 и x_2) једначина хиперравни је

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha = 0,$$

што представља једначину праве у равни.

3. У простору R^3 (простор са координатним осама x_1 , x_2 и x_3) једначина хиперравни је

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha = 0,$$

што представља једначину равни (у општем облику).

ФУНКЦИЈЕ

КАРДИНАЛНИ БРОЈЕВИ

ФУНКЦИЈЕ

- Појам и врсте функција
- Композиција функција
- Инверзна функција

1 Појам и врсте функција

Претпоставимо да су X и Y непразни скупови.

Дефиниција 1 Ако се сваком елементу $x \in X$ придружи (додели) тачно један елемент $y \in Y$, кажемо да је дефинисана **функција** (пресликавање, оператор) f која пресликава X у Y . За $Y = R$ користи се и термин **функционела**, а за $X \subset R$ и $Y = R$ користи се термин **реална функција**.

Функција је, дакле, дефинисана на целом скупу X и једнозначна.

Ознака $f : X \rightarrow Y$ значи да се скуп X пресликава у скуп Y , а ознаке $f : x \mapsto y$ и $y = f(x)$ значе да се елемент x функцијом f пресликава у елемент y .

Скуп X зовемо **домен**, а скуп Y је **кодомен**. Елемент x је **аргумент, оригинал**, а елемент y је **слика**.

Скуп свих парова (**оригинал, слика**) је подскуп скупа $X \times Y$, односно једна бинарна релација.

Ако је $A \subset X$, тада је $f(A)$ ознака за скуп $\{f(x) \mid x \in A\}$. Скуп $f(X)$ је скуп свих вредности функције f .

Функција је потпуно дефинисана само ако су дати домен, кодомен и правило пресликавања.

Важне су следеће две једноставне функције.

Дефиниција 2 Функција $f : X \rightarrow Y$ је

1. **константа** или **константно прсликавање** ако је $f(x) = c$ за свако $x \in X$ и неко $c \in Y$,
2. **идентичко прсликавање** ако је $Y = X$ и $f(x) = x$ за свако $x \in X$.

Једнакост функција се дефинише само за исте домене и кодомене.

Дефиниција 3 Функције $f, g : X \rightarrow Y$ су **једнаке** ако је $f(x) = g(x)$ за свако $x \in X$.

Ралукују се следеће три врсте функција.

Дефиниција 4 Функција $f : X \rightarrow Y$ је:

1. **сирјекција** ако је $f(X) = Y$,
2. **инјекција** или **'1 – 1'** ако из $f(x_1) = f(x_2)$ следи $x_1 = x_2$,
3. **бијекција** ако је истовремено и сирјекција и инјекција.

За бијекцију се користе и термини **узајамно једнозначно прсликавање** (кореспонденција) или **биунивоко прсликавање**.

2 Композиција функција

Дефиниција 5 Нека су дате функције $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow Z$. Функција $h : X \rightarrow Z$ дефинисана са $h(x) = g(f(x))$ за $x \in X$ се зове **композиција функција g и f** и означава са $g \circ f$.

За композицију функција важи асоцијативни закон, а не важи комутативни.

Теорема 1 Нека су дате функције $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ и $h : Z \rightarrow U$. Тада за $x \in X$ важи

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Доказ. Из дефиниције композиције функција следи да је

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))).$$

Исто добијамо и за $((h \circ g) \circ f)(x)$. ■

Теорема 2 *Ако је $f : X \rightarrow Y$ бијекција, тада постоји једно и само једно пресликавање $g : Y \rightarrow X$ за које су $f \circ g$ и $g \circ f$ идентичка пресликавања.*

3 Инверзна функција

На основу претходне теореме се уводи појам инверзне функције.

Дефиниција 6 *Ако је функција $f : X \rightarrow Y$ бијекција и ако је функција $g : Y \rightarrow X$ таква да су $g \circ f$ и $f \circ g$ идентичка пресликавања, тада g зовемо **инверсном функцијом** за f и означавамо са f^{-1} .*

Инверзна функција за f^{-1} је f .

КАРДИНАЛНИ БРОЈЕВИ

- Моћ и еквиваленција скупова
- Пребројиви и небројиви скупови

4 Моћ и еквиваленција скупова

Дефиниција 7 *Два скупа имају исту **моћ** ако постоји бијекција из једног у други. За такве скупове кажемо да су **еквивалентни**.*

Теорема 3 *Еквиваленција скупова је релација еквиваленције.*

Дефиниција 8 *Скуп је **бесконачан** ако је еквивалентан неком свом правом подскупу, а у противном је коначан.*

За скупове који имају исту моћ каже се да имају исти **кардинални број**. Кардинални број скупа X се означава са $\text{card}X$.

Дефиниција 9 *Кардинални број коначног скупа је једнак броју његових елемената.*

Теорема 4 *Ако су X и Y непразни скупови, тада је*

1. $\text{card}(X \cup Y) \leq \text{card } X + \text{card } Y,$

2. $\text{card } X < \text{card } \mathcal{P}(X),$

3. $\text{card } \mathcal{P}(X) = 2^{\text{card } X}.$

- Дакле, не постоји највећи кардинални број.
- Скуп N има моћ или кардинални број \aleph_0 (алеф нула, алеф - прво слово хебрејског писма).
- Скуп реалних бројева има моћ континуума или кардинални број c . При томе је $2^{\aleph_0} = c$.
- Претпоставка да не постоји скуп чији је кардинални број већи од \aleph_0 и мањи од c је позната као **хипотеза о континууму** и она се у оквиру постојеће теорије не може ни доказати ни оповргнути!!!

5 Пребројиви и непребројиви скупови

Дефиниција 10 *Скуп који је еквивалентан скупу N је **пребројив**. Бесконачан скуп који није пребројив је **непребројив**.*

Очигледно да је унија два пребројива скупа пребројив скуп. Међутим, важи и много више.

Теорема 5 *Унија пребројиво много пребројивих скупова је пребројив скуп.*

Доказ. Нека су A_1, A_2, \dots пребројиви скупови и нека је $A = \cup_{i \in N} A_i$. Ако је

$$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots\},$$

$\nearrow \quad \nearrow \quad \nearrow$

$$A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots\},$$

$\nearrow \quad \nearrow \quad \nearrow$

$$A_3 = \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, \dots\},$$

.....

елементе скупа A можемо да поређамо у низ узимањем елемената по дијагоналама, уз изостављање елемената који се понављају. ■

Како је Q пребројива унија рационалних бројева из $(a, a + 1]$ за $a \in Z$, следи да је и Q пребројив скуп.

Наравно, постоје и непребројиви скупови.

Теорема 6 *Скуп $(0, 1)$ је непребројив.*

Доказ. Претпоставимо супротно. Ако су

$$a_1 = 0, a_{11}a_{12} \dots a_{1n} \dots,$$

$$a_2 = 0, a_{21}a_{22} \dots a_{2n} \dots,$$

.....

$$a_n = 0, a_{n1}a_{n2} \dots a_{nn} \dots,$$

.....

сви елементи скупа $(0, 1)$, онда је број

$$a = 0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots,$$

где је $\alpha_k \neq a_{kk}$ ($k \in N$), различит од њих и такође припада скупу $(0, 1)$. Контрадикција. ■

Из ове чињенице и пребројивости скупа Q следи да постоје ирационални бројеви, односно да је дефиниција којом су уведени *добра*.

М1 - ОСМО ПРЕДАВАЊЕ

Драган Ђорић

17.11.2008.

Н И З О В И

- Дефиниција низа и примери
- Гранична вредност низа
- Својства конвергентних низова
- Тачке нагомилавања низа
- Критеријуми за конвергенцију низа

ДЕФИНИЦИЈА НИЗА И ПРИМЕРИ

- Околина тачке у \mathbb{R}
- Дефиниција низа у \mathbb{R}
- Примери низова у \mathbb{R}

1 Околина тачке у \mathbb{R}

Дефиниција 1 Нека су a и b реални бројеви, такви да је $a < b$.

1. Скуп (a, b) дефинисан са

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

назива се **интервал** (отворени) са крајевима a и b .

2. Скуп $[a, b]$ дефинисан са

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

назива се **сегмент** (одсечак) са крајевима a и b .

3. Слично се дефинишу **полуотворени интервали** $[a, b)$ и $(a, b]$.

4. **Околина броја** $x \in \mathbb{R}$ је сваки отворени интервал који садржи x . Ознака је $O(x)$.

5. Интервал $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, где је $\varepsilon > 0$ је **ε -околина броја x** .

Ознака је $O_\varepsilon(x)$.

За нека тврђења корисно је скуп \mathbb{R} допунити са два елемента: $-\infty$ и $+\infty$ (или само ∞). *Проширени скуп реалних бројева $\overline{\mathbb{R}}$ је дат са*

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\},$$

при чему за сваки реалан број x важи $-\infty < x < +\infty$.

Дефинишу се и скупови

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}, \quad (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$$

које узимамо за околине тачака $+\infty$ и $-\infty$. Слично је

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}, \quad (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}.$$

За операције са елементима $-\infty$ и $+\infty$ усвајају се једнакости:

$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty, \quad (+\infty) + (+\infty) = +\infty,$$

$$(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty, \quad (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty,$$

$$(-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty, \quad (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty.$$

Ако је $x \in \mathbb{R}$, тада је $x + (+\infty) = +\infty$ и $x + (-\infty) = -\infty$.

Ако је $x > 0$, тада је $x \cdot (+\infty) = +\infty$ и $x \cdot (-\infty) = -\infty$, а ако је $x < 0$, тада је $x \cdot (+\infty) = -\infty$ и $x \cdot (-\infty) = +\infty$.

Изрази $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$ немају смисла у $\overline{\mathbb{R}}$.

2 Дефиниција низа у \mathbb{R}

*Дефиниција 2 Низ у \mathbb{R} је функција $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Вредност $f(n)$ означавамо са a_n и зовемо ***n*-тим чланом низа**.*

Низ означавамо са $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ или $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ или само (a_n) .

Слично се дефинише и низ у скупу A (или низ елемената скупа A) - као функција $f : \mathbb{N} \rightarrow A$.

Дефиниција 3 Низ (a_n) је ограничен ако постоје реални бројеви A и B такви да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи

$$A \leq a_n \leq B.$$

- Број A је доње ограничење (ограничење са доње стране), а број B је горње ограничење (ограничење са горње стране).
- Услов из дефиниције је еквивалентан услову $|a_n| \leq M$, где је M позитиван реалан број.

Дефиниција 4 Низ (a_n) је

1. **растући** (неоппадајући) ако је $a_n \leq a_{n+1}$ за $n \in \mathbb{N}$,
2. **строго растући** (растући) ако је $a_n < a_{n+1}$ за $n \in \mathbb{N}$,
3. **оппадајући** (нерастући) ако је $a_n \geq a_{n+1}$ за $n \in \mathbb{N}$,
4. **строго опадајући** (оппадајући) ако је $a_n > a_{n+1}$ за $n \in \mathbb{N}$.

Низови (1) - (4) су **монотони** низови.

3 Примери низова у \mathbb{R}

1. За $a_n = n^2$ је $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 8$, \dots , односн

$$1, 4, 8, 16, \dots, n^2, \dots$$

Низ је растући и неограничен.

2. За $a_n = \frac{1}{n}$ (хармонијски низ) је $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, \dots , односно

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

Низ је опадајући и ограничен.

3. За $a_n = (-1)^n$ имамо $-1, 1, -1, 1, \dots$

Низ је ограничен, али није ни растући, ни опадајући.

4. За $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ ($n > 2$) и $a_1 = a_2 = 1$ (Фибоначијев низ) имамо

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

Низ је растући и неограничен.

5. За $a_n = \frac{1}{2} \left(a_{n-1} + \frac{3}{a_{n-1}} \right)$ ($n > 1$ и $a_1 > 0$ низ је ограничен одоздо са $\sqrt{3}$,

$$\frac{2}{\sqrt{3}}a_n = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} \left(a_{n-1} + \frac{\sqrt{3}}{a_{n-1}} \right) = \frac{a_{n-1}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{a_{n-1}} \geq 2$$

и опадајући,

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{\sqrt{3}}{a_n} \right) \leq \frac{1}{2}(a_n + a_n) = a_n.$$

ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ НИЗА

- Дефиниција граничне вредности низа
- Веза конвергенције и ограничености низа
- Конвергенција монотоног низа

4 Дефиниција граничне вредности низа

Дефиниција 5 Број $a \in \mathbb{R}$ је **гранична вредност** низа (a_n) ако свака околина од a садржи све чланове низа, осим коначно много. Запис је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

или

$$a_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty)$$

Низ који има граничну вредност је **конвергентан**, а у противном **дивергентан**.

- Према дефиницији, за сваку околину $O(a)$ постоји природан број n_0 (који зависи од те околине) такав да за $n > n_0$ важи $a_n \in O(a)$. Дакле, само чланови a_1, a_2, \dots, a_{n_0} не морају бити у околини $O(a)$.
- Ако за околину узмемо ε околину $O_\varepsilon(a)$, тада за свако $\varepsilon > 0$ постоји природан број $n_0(\varepsilon)$ за који важи

$$n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

ПРИМЕРИ

1. Ако је $a_n = \frac{1}{n}$, тада је $|a_n - 0| < \varepsilon$ за $n > n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, па је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

2. Ако је $a_n = \frac{n}{n+1}$, тада је $|a_n - 1| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$ за $n > n_0 > \frac{1}{\varepsilon} - 1$, па је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

3. Ако је $a_n = n$ и $a \in \mathbb{R}$, тада за сваку околину $O(a)$ постоји бесконачно много чланова низа који су ван те околине. Према томе, низ је дивергентан.

4. Ако је $a_n = \sin \frac{n\pi}{2}$ и $a \in \mathbb{R}$, тада за сваку околину $O(a)$ постоји бесконачно много чланова низа који су ван те околине. Према томе, низ је дивергентан.

5 Веза конвергенције и ограничености низа

Теорема 1 *Конвергентан низ је ограничен.*

Доказ. Нека је a гранична вредност низа (a_n) . Ван околине $O_\varepsilon(a)$ налази се само коначно много елемената тог низа. Ако је најмањи члан низа који је ван околине једнак m , а највећи једнак M , тада важи

$$A = \min\{a - \varepsilon, m\} \leq a_n \leq \max\{a + \varepsilon, M\} = B.$$

Према томе, низ је ограничен. ■

Ограничен низ не мора бити конвергентан. На пример, за $a_n = (-1)^n$ је $|a_n| \leq 1$, а низ (a_n) није конвергентан.

6 Теорема о монотонном низу

Теорема 2 *Монотон и ограничен низ је конвергентан.*

Доказ. Претпоставимо да је низ растући и да је $a = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (најмање горње ограничење). Из ограничености низа следи да је $a < +\infty$. Тада за свако $\varepsilon > 0$ постоји број $n_0 \in \mathbb{N}$ за који је $a_{n_0} > a - \varepsilon$. Како је низ растући, то је $a_n \geq a_{n_0}$ за $n > n_0$, односно

$$a_n \in (a - \varepsilon, a) \quad \forall n > n_0.$$

Према томе, $a_n \rightarrow a$ ($n \rightarrow \infty$).

Слично је и за опадајући низ. ■

Како је конвергентан низ ограничен, имамо и следеће тврђење.

Теорема 3 *Монотон низ је конвергентан ако и само ако је ограничен.*

Ако растући низ није ограничен, тада $a_n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$).

Ако опадајући низ није ограничен, тада $a_n \rightarrow -\infty$ ($n \rightarrow \infty$).

ПРИМЕРИ

1. За $a_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ низ је растући и ограничен

$$a_n < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} = 1 - \frac{1}{n} < 1,$$

па је и конвергентан.

2. За $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ низ је растући и ограничен ($a_n < 3$)
(Додатак), па је и конвергентан

СВОЈСТВА КОНВЕРГЕНТНИХ НИЗОВА

- Јединственост граничне вредности
- Нула низови
- Гранична вредност збира и производа низова

7 Јединственост граничне вредности

Теорема 4 *Конвергентан низ има само једну граничну вредност.*

Доказ. Претпоставимо супротно, да низ (a_n) има бар две граничне вредности, a и b . Ако су $O(a)$ и $O(b)$ дисјунктне околине, онда не могу скоро сви чланови низа (осим коначно много) бити у обе те околине. Према томе, претпоставка није добра, односно није могуће да низ има више граничних вредности.

8 Нула низови

Дефиниција 6 *Низ је нула низ ако конвергира ка нули.*

- Низ (a_n) је, дакле, нула низ ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји природан број n_0 такав да за $n > n_0$ важи $|a_n| < \varepsilon$.
- Ако низ (a_n) конвергира ка a и ако је $\alpha_n = a_n - a$, тада је α_n нула низ. Важи и обрнуто - ако је α_n нула низ, тада је a гранична вредност низа (a_n) . Дакле,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow a_n = a + \alpha_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0.$$

За нула низове важи следеће тврђење.

Теорема 5 *1. Збир два нула низа је нула низ.*

2. Производ ограниченог и нула низа је нула низ.

3. Производ два нула низа је нула низ.

Доказ. Нека су (a_n) и (b_n) нула низови и нека је (x_n) ограничен низ.

1. Ако је $c_n = a_n + b_n$, тада из

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ за } n > n_1, \quad |b_n| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ за } n > n_2$$

следи

$$|c_n| \leq |a_n| + |b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad n > \max\{n_1, n_2\}.$$

Према томе, (c_n) је нула низ.

2. Ако је $d_n = x_n \cdot a_n$, тада из

$$|x_n| \leq M, \quad |a_n| < \frac{\varepsilon}{M} \text{ за } n > n_0$$

следи

$$|d_n| = |x_n| \cdot |a_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon, \quad n > n_0.$$

Према томе, (d_n) је нула низ.

3. Низ (a_n) је ограничен, а (b_n) је нула низ, па тврђење следи из 2. ■

9 Гранична вредност збира и производа низова

Теорема 6 Нека је a гранична вредност низа (a_n) и нека је b гранична вредност низа (b_n) . Тада је

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a + b,$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = ab.$

ДОКАЗ. Нека је $a_n = a + \alpha_n$ и $b_n = b + \beta_n$, где су (α_n) и (β_n) нула низови.

1. Из

$$a_n + b_n = a + b + \alpha_n + \beta_n = a + b + \gamma_n,$$

где је (γ_n) нула низ (претходна теорема), следи да $a_n + b_n \rightarrow a + b$ ($n \rightarrow \infty$).

2. Из

$$a_n \cdot b_n = ab + \alpha_n \cdot b_n + \beta_n \cdot a_n + \alpha_n \cdot \beta_n$$

следи $a_n \cdot b_n \rightarrow ab$ ($n \rightarrow \infty$). ■

Слично тврђење важи и за количник два конвергентна низа.

Теорема 7 Нека је a гранична вредност низа (a_n) и нека је $b \neq 0$ гранична вредност низа (b_n) , при чему је $b_n \neq 0$. Тада важи

1. Низ $(1/b_n)$ конвергира ка $1/b$.
2. Низ (a_n/b_n) конвергира ка a/b .

Доказ. Нека је $a_n = a + \alpha_n$ и $b_n = b + \beta_n$.

1. Како је $b \neq 0$, то је $|b_n| > c > 0$ за $n > n_0$, па је низ $(b \cdot b_n)$ ограничен. Из

$$\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b \cdot b_n}(b - \beta_n)$$

слиди да је низ $(1/b_n - 1/b)$ нула низ, односно $1/b_n$ конвергира ка $1/b$.

2. Из $\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{b_n} \cdot a_n$, 1. и претходне теореме слиди тврђење. ■

ТАЧКЕ НАГОМИЛАВАЊА НИЗА

- Дефиниција и услови егзистенције
- Услов за конвергенцију низа

10 Дефиниција и услови егзистенције

Дефиниција 7 Број a је тачка нагомилавања низа (a_n) ако свака околина те тачке садржи бесконачно много чланова тог низа.

Ван околине тачке нагомилавања може такође бити бесконачно много тачака низа.

Да ли сваки низ има (бар једну) тачку нагомилавања? Пре теореме која даје одговор на ово питање имамо помоћно тврђење.

Теорема 8 (Канторов принцип уметнутих одсечака) Ако је $([a_n, b_n])_n$ низ уметнутих одсечака,

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$$

чије дужине теже нули ($\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$), тада постоји тачно једна тачка која припада свим тим одсечцима.

Доказ. Како је

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

низ (a_n) је растући и ограничен (горња граница је, на пример, b_1), а низ (b_n) је опадајући и ограничен (доња граница је, на пример, a_1). По теореме о монотоном низу следи да су низови (a_n) и (b_n) конвергентни, а из услова $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ следи да је

$$\inf_n \{b_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_n \{a_n\} = a.$$

Тачка a припада свим интервалима $[a_n, b_n]$ ($a_n \leq a \leq b_n$) и ниједна друга тачка не припада свим интервалима (зашто?). ■

Следећа теорема даје одговор на питање о егзистенцији тачака нагомилавања низа.

Теорема 9 (Коши - Болцанова теорема)

1. Сваки ограничен низ бројева има тачку нагомилавања у \mathbb{R} .
2. Сваки низ бројева има тачку нагомилавања у $\overline{\mathbb{R}}$.

Доказ. Нека је (x_n) дати низ.

1. Пошто је низ ограничен, сви његови чланови припадају неком одсечку $[a, b]$. Ако тај одсечак поделимо на два дела (на пример, једнаких дужина), тада ће у једном од њих (означимо га са $[a_1, b_1]$) бити бесконачно чланова низа (x_n) . Настављањем тог поступка добијамо низ уметнутих одсечака

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$$

чије дужине теже нули ($b_n - a_n = (b - a)/2^n$). Према Канторовом принципу уметнутих одсечака постоји тачка c која припада свим одсечцима $[a_n, b_n]$. Свака околина тачке c садржи неки одсечак $[a_n, b_n]$, а то значи и бесконачно много чланова низа (x_n) . Према томе, c је тачка нагомилавања тог низа.

2. Ако је низ неограничен одозго, тада се у свакој околини тачке $+\infty$ налази бесконачно много чланова низа, па је $+\infty$ тачка нагомилавања тог низа. Слично, ако је низ неограничен одоздо, тачка $-\infty$ је његова тачка нагомилавања.

Како из 1. имамо да ограничен низ има тачку нагомилавања, то значи да сваки низ има тачку нагомилавања у \mathbb{R} . ■

11 Услов за конвергенцију низа

Низ може имати и више тачака нагомилавања.

ПРИМЕРИ

1. За $a_n = (-1)^n$ тачке нагомилавања су -1 и 1 .
2. За $a_n = n^{(-1)^n}$ тачке нагомилавања су 0 и $+\infty$.

Теорема 10 Сваки низ има најмању и највећу тачку нагомилавања у $\overline{\mathbb{R}}$.

Дефиниција 8 Дат је низ (a_n) .

1. Највећа тачка нагомилавања тог низа зове се *limes superior* и означава са $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ или са $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$.
2. Најмања тачка нагомилавања тог низа зове се *limes inferior* и означава са $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ или са $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$.

ПРИМЕРИ

1. За $a_n = (-1)^n$ је $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$ и $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.
2. За $a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ је

$$\inf_n \{a_n\} = -2, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -1, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1, \quad \sup_n \{a_n\} = \frac{3}{2}.$$

Теорема 11 *Потребан и довољан услов за конвергенцију низа је да он има само једну тачку нагомилавања a , при чему је $|a| \neq +\infty$ (или да је ограничен и да има само једну тачку нагомилавања).*

Доказ. Потребан услов (\Rightarrow) Нека низ (a_n) има граничну вредност a , нека је $b \neq a$ и нека су $O(a)$ и $O(b)$ дисјунктне околине тих тачака. У околини тачке $O(a)$ налазе се сви чланови низа осим коначно много. То значи да се у околини $O(b)$ налази само коначно много тачака низа, па b није тачка нагомилавања низа (a_n) . Према томе, низ (a_n) има само једну тачку нагомилавања (то је a).

Довољан услов (\Leftarrow) Нека је a једина тачка нагомилавања низа (a_n) и нека је $O(a)$ произвољна околина те тачке. Како низ нема других тачака нагомилавања, ван те околине је само коначно много тачака низа, јер би у противном (по Коши - Болцановој теорему) елементи ван низа имали тачку нагомилавања. Према томе, a је гранична вредност низа. ■

КРИТЕРИЈУМИ ЗА КОНВЕРГЕНЦИЈУ НИЗА

- Потребан и довољан услов за конвергенцију низа
- Теорема о три низа

12 Потребан и довољан услов за конвергенцију низа

Дефиниција 9 *Низ (a_n) је Кошијев ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји природан број $n_0(\varepsilon)$ такав да је*

$$|a_m - a_n| < \varepsilon, \quad m, n > n_0.$$

Теорема 12 *Кошијев низ је ограничен.*

Теорема 13 *(Кошијев критеријум, потребан и довољан услов за конвергенцију низа) Низ (a_n) је конвергентан ако и само ако је Кошијев низ.*

Доказ. Потребан услов (\Rightarrow):

Ако је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, тада за $\varepsilon > 0$ постоји природан број n_0 такав да је

$$|a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

за $m, n > n_0$. Тада је

$$|a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a| < \varepsilon, \quad m, n > n_0,$$

па је (a_n) Кошијев низ.

Довољан услов (\Leftarrow):

Нека је (a_n) Кошијев низ и нека је

$$a_* = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad a^* = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$$

(на основу претходне теореме низ је ограничен). Тада за свако $\varepsilon > 0$ постоји n_0 и постоје $m, n > n_0$ за које важи

$$|a_* - a_m| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |a_n - a^*| < \frac{\varepsilon}{3},$$

па је

$$|a^* - a_*| < |a_* - a_m| + |a_m - a_n| + |a_n - a^*| < \varepsilon.$$

Према томе, низ (a_n) има само једну тачку нагомилавања. На основу једне од претходних теорема (услов за конвергенцију низа) (a_n) је конвергентан низ.

13 Теорема о три низа

Теорема 14 Ако је $a_n \leq b_n \leq c_n$ за $n > n_0$ и ако је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a,$$

тада је $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$.

Доказ. За свако $\varepsilon > 0$ постоје природни бројеви n_1 и n_2 такви да важи $a_n \in O_\varepsilon(a)$ за $n > n_1$ и $c_n \in O_\varepsilon(a)$ за $n > n_2$.

Како је $a_n \leq b_n \leq c_n$, важи $b_n \in O_\varepsilon(a)$ за $n > \max\{n_1, n_2\}$, па је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a. \quad \blacksquare$$

ДОДАТАК

Низ чији је општи члан $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ је конвергентан.

Доказ. Из неједнакости

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 + n \cdot \frac{-1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}, \quad n > 1$$

следи

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} > 1,$$

па је

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1-n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = a_{n-1}.$$

За $k \leq n$ важи

$$1 + \frac{k}{n} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}$$

(прва неједнакост следи из биномне формуле, а друга се лако доказује индукцијом). Специјално, за $k = n$ имамо

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

По теореме о конвергенцији монотоног и ограниченог низа, низ (a_n) је конвергентан. ■

Гранична вредност низа (a_n) је број e (једна од најважнијих константи у математици) који је ирационалан и који је приближно једнак 2.71828.

М1 - ДЕВЕТО ПРЕДАВАЊЕ

Драган Ђорић

24.11.2008.

ГРАНИЧНЕ ВРЕДНОСТИ ФУНКЦИЈА

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow a_+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow a_-} f(x)$$
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

- Реалне функције реалне променљиве
- Дефиниције граничних вредности
- Особине граничних вредности
- Упоредба бесконачно малих функција

РЕАЛНЕ ФУНКЦИЈЕ РЕАЛНЕ ПРОМЕНЉИВЕ

- Појам и примери
- Класификација функција

1 Појам и примери

- Реална функција реалне променљиве је функција $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, где је $D \subset \mathbb{R}$.
- Функција може бити задата на различите начине, а најчешће аналитичким изразом.
- Максимални домен D_f за функцију која је дефинисана неким аналитичким изразом је **област дефинисаности** те функције. На пример, за $f : x \mapsto \sqrt{x}$ је $D_f = [0, +\infty)$, а за $g : x \mapsto \ln x$ је $D_g = (0, +\infty)$.

- За функцију $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ skup Γ дефинисан са

$$\Gamma = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}$$

је њен **график**. Геометријски, график функције је skup тачака у \mathbb{R}^2 . Када је тај skup линија, кажемо да график функције f представља криву $y = f(x)$.

2 Класификација функција

Дефиниција 1 Функција $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ је ограничена ако постоје реални бројеви A и B такви да за свако $x \in D$ важи

$$A \leq f(x) \leq B.$$

Услов из дефиниције је еквивалентан услову $|f(x)| \leq M$, где је M позитиван реалан број.

Дефиниција 2 Функција $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ је на $C \subset D$

1. **растућа** (неоппадајућа) ако за све $x_1, x_2 \in C$ важи

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2),$$

2. **строго растућа** (растућа) ако за све $x_1, x_2 \in C$ важи

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

3. **оппадајућа** (нерастућа) ако за све $x_1, x_2 \in C$ важи

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2),$$

4. **строго опадајућа** (опадајућа) за све $x_1, x_2 \in C$ важи

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2),$$

Функције (1) - (4) су **монотоне** функције.

Дефиниција 3 Нека је D симетричан скуп (ако $x \in D$, тада је $-x \in D$). Функција $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ је

1. **парна** ако је $f(-x) = f(x)$ за свако $x \in D$,
2. **непарна** ако је $f(-x) = -f(x)$ за свако $x \in D$.

Дефиниција 4 Функција $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ је **периодична** ако постоји позитиван број T (**период**) такав да за свако $x \in D$ важи

$$x + T \in D, \quad f(x + T) = f(x).$$

Постоје и разне друге класе функција, као што су конвексне и конкавне или елементарне и неелементарне.

ДЕФИНИЦИЈЕ ГРАНИЧНИХ ВРЕДНОСТИ

- Гранична вредност у тачки
- Једностране граничне вредности
- Гранична вредност у бесконачности
- Бесконачна гранична вредност

3 Гранична вредност у тачки

Дефиниција 5 Нека је $U(a)$ околина тачке $a \in \mathbb{R}$ и нека је $U_\varepsilon(a)$ њена ε околина.

1. Скуп $U(a)$ без тачке a је **пробушена околина тачке a** и означава се са $\mathring{U}(a)$.
2. Скуп $U_\varepsilon(a)$ без тачке a је **пробушена ε -околина тачке a** и означава се са $\mathring{U}_\varepsilon(a)$.

Нека је функција f дефинисана у пробушеној околини тачке a (може и у тачки a , али не мора).

Дефиниција 6 Реалан број A је *гранична вредност* или *лимес* функције f у тачки a ако за сваку околину V броја A постоји пробушена околина \mathring{U} тачке a таква да је $f(\mathring{U}) \subset V$. Каже се још и да f конвергира (тежи) ка A када x тежи ка a , што се записује са

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

или

$$f(x) \rightarrow A, \quad x \rightarrow a.$$

- Уколико је функција дефинисана и у тачки a , њена вредност у тој тачки не утиче на граничну вредност.
- Ако уместо произвољних околина узмемо ε -околине, тада је A лимес функције f у тачки a ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta(\varepsilon) > 0$ тако да важи

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

- Гранична вредност се слично дефинише и за функцију $f : D \rightarrow R$ у случају када домен D не садржи пробушену околину тачке a која је тачка нагомилавања скупа D . Тада се у дефиницији узима услов

$$f(\mathring{U} \cap D) \subset V.$$

ПРИМЕРИ

1. Ако је $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$, тада не постоји $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
2. Ако је $g(x) = |\operatorname{sgn}(x)|$, тада је $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1 \neq g(0)$.
3. Ако је $f(x) = 1$ за $x \in \mathbb{Q}$ и $f(x) = 0$ за $x \notin \mathbb{Q}$, тада f нема граничну вредност ни у једној тачки.

Теорема 1 *Ако постоји гранична вредност функције f у тачки a , тада постоји околина $U(a)$ таква да је f ограничена у пробушеној околини $\mathring{U}(a)$.*

Доказ. Ако је A гранична вредност у тачки a , тада за околину V од A постоји околина U од a таква да је $f(\mathring{U}) \subset V$. Како је V ограничен скуп, то је и \mathring{U} ограничен скуп. ■

4 Једностране граничне вредности

Једностране граничне вредности функције f у тачки a добијамо ако у дефиницији граничне вредности уместо околина $U(a)$ и $\mathring{U}(a)$ узмемо само **десне околине** $U(a_+)$ и $\mathring{U}(a_+)$, односно само **леве околине** $U(a_-)$ и $\mathring{U}(a_-)$, при чему је

$$U(a_+) = U(a) \cap [a, +\infty), \quad \mathring{U}(a_+) = U(a_+) \setminus \{a\},$$

$$U(a_-) = U(a) \cap (-\infty, a], \quad \mathring{U}(a_-) = U(a_-) \setminus \{a\}.$$

Специјално, за леве и десне ε -околине имамо

1. Функција f дефинисана у левој околини $U(a_-)$ тачке a има **леву граничну вредност** A ако за свако ε постоји δ такво да важи

$$x \in (a - \delta, a) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

2. Функција f дефинисана у десној околини $U(a_+)$ тачке a има **десну граничну вредност** B ако за свако ε постоји δ такво да важи

$$x \in (a, a + \delta) \Rightarrow |f(x) - B| < \varepsilon.$$

Ако лева и десна гранична вредност постоје, пише се

$$A = \lim_{x \rightarrow a_-} f(x) = f(a_-), \quad B = \lim_{x \rightarrow a_+} f(x) = f(a_+).$$

ПРИМЕРИ

1. За функцију $f : x \mapsto \operatorname{sgn}(x)$ је

$$\lim_{x \rightarrow 0_-} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0_+} f(x) = 1.$$

2. За функцију $f : x \mapsto \frac{\sin x}{|x|}$ је

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0_-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0_-} \frac{\sin x}{-x} = -1.$$

Наравно, ако постоји гранична вредност функције у тачки a , онда постоје и лева и десна гранична вредност у a и једнаке су. Међутим, важи и обрнуто.

Теорема 2 *Функција $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ има граничну вредност у тачки a ако и само ако постоје лева и десна гранична вредност у тој тачки и ако су оне једнаке.*

Дакле,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a_-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a_+} f(x) = A.$$

5 Гранична вредност у бесконачности

Иста дефиниција граничне вредности остаје и у случају $a \in \{-\infty, +\infty\}$.

За околине

$$U_M(-\infty) = (-\infty, -M), \quad U_M(+\infty) = (M, +\infty)$$

имамо

1. Функција f дефинисана у околини тачке $-\infty$ има у $-\infty$ граничну вредност A ако за сваку околину V тачке A постоји околина $U_M(-\infty)$ која се цела функцијом f пресликава у V .
2. Функција f дефинисана у околини тачке $+\infty$ има у $+\infty$ граничну вредност B ако за сваку околину V тачке B постоји околина $U_M(+\infty)$ која се цела функцијом f пресликава у V .

Ако постоје граничне вредности функције f у $-\infty$ и у $+\infty$, пише се

$$A = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \quad B = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x),$$

а ако је још и $A = B$, пише се

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A.$$

Специјално, за ε -околину граничне вредности, можемо рећи

1. да постоји гранична вредност A у $-\infty$ ако за свако ε постоји $M > 0$ такво да важи

$$x < -M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

2. да постоји гранична вредност B у $+\infty$ ако за свако ε постоји $M > 0$ такво да важи

$$x > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

3. да постоји гранична вредност A у ∞ ако за свако ε постоји $M > 0$ такво да важи

$$|x| > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

ПРИМЕРИ

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0,$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x+1} = 2,$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) = +\infty,$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) = \frac{1}{2}.$

6 Бесконачна гранична вредност

До сада су све граничне вредности биле коначни бројеви ($A \in \mathbb{R}$). Међутим, иста дефиниција остаје и у случају $A \in \{-\infty, +\infty\}$.

Дакле,

1. Функција f у тачки $a \in \overline{\mathbb{R}}$ има граничну вредност $-\infty$ ако за сваку околину $V(-\infty)$ постоји околина $U(a)$ таква да је $f(\overset{\circ}{U}(a)) \subset V(-\infty)$.
2. Функција f у тачки $a \in \overline{\mathbb{R}}$ има граничну вредност $+\infty$ ако за сваку околину $V(+\infty)$ постоји околина $U(a)$ таква да је $f(\overset{\circ}{U}(a)) \subset V(+\infty)$.

ПРИМЕРИ

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$
2. $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} = +\infty$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = +\infty$

Узимајући све случајеве у обзир, можемо дати јединствену дефиницију граничне вредности функције $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ која је дефинисана у околини тачке a .

Дефиниција 7 Функција f у тачки $a \in \overline{\mathbb{R}}$ има граничну вредност $A \in \overline{\mathbb{R}}$ ако за сваку околину V од A постоји околина U од a таква да је $f(\overset{\circ}{U}) \subset V$.

ОСОБИНЕ ГРАНИЧНИХ ВРЕДНОСТИ

- Јединственост граничне вредности
- Бесконачно мале величине
- Граничне вредности збира и производа

7 Јединственост граничне вредности

Теорема 3 *Ако постоји гранична вредност функције f у тачки a , она је јединствена.*

Доказ. Претпоставимо да функција у тачки a има више граничних вредности, на пример две, A и B . Ако су V_A и V_B дисјунктне околине за A и B , тада не постоји околина V од a која се функцијом f пресликава и у V_A и у V_B . Према томе, не могу постојати две различите граничне вредности у истој тачки. ■

8 Бесконачно мале величине

Дефиниција 8 *Функција $\alpha : D \rightarrow \mathbb{R}$ је бесконачно мала када $x \rightarrow a$ ако је $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$.*

- Функција је, дакле, бесконачно мала када $x \rightarrow a$ ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји δ такво да је важи

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon.$$

- Ако је $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ и ако је $\alpha(x) = f(x) - A$, тада је α бесконачно мала функција када $x \rightarrow a$. Важи и обрнуто - ако је α бесконачно мала функција када $x \rightarrow a$, тада је A гранична вредност функције f у тачки a . Дакле,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0.$$

За бесконачно мале функције важи следеће тврђење.

Теорема 4 *1. Збир две бесконачно мале када $x \rightarrow a$ је бесконачно мала функција када $x \rightarrow a$.*

2. Производ бесконачно мале функције када $x \rightarrow a$ и функције која је ограничена у околини $U(a)$ је бесконачно мала функција када $x \rightarrow a$.

3. Производ две бесконачно мале када $x \rightarrow a$ је бесконачно мала функција када $x \rightarrow a$.

Доказ. Нека су α и β бесконачно мале функције када $x \rightarrow a$ и нека је f ограничена функција у некој околини $U(a)$.

1. Ако је $\gamma(x) = \alpha(x) + \beta(x)$, тада из

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ за } |x - a| < \delta_1, \quad |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ за } |x - a| < \delta_2$$

слиди

$$|\gamma(x)| \leq |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad |x - a| < \min\{\delta_1, \delta_2\}.$$

Према томе, γ је бесконачно мала функција када $x \rightarrow a$.

2. Ако је $g(x) = f(x) \cdot \alpha(x)$, тада из

$$|f(x)| \leq M, \quad |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \text{ за } x \in U(a)$$

слиди

$$|g(x)| = |f(x)| \cdot |\alpha(x)| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon, \quad x \in U(a).$$

Према томе, g је бесконачно мала функција када $x \rightarrow a$.

3. Функција α је ограничена у некој околини $U(a)$, а β је бесконачно мала функција када $x \rightarrow a$, па тврђење слиди из 2. ■

Дефинишу се и бесконачно велике функције када $x \rightarrow a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Дефиниција 9 Функција f је бесконачно велика када $x \rightarrow a$ ако за свако $M > 0$ постоји околина $U(a)$ таква да важи

$$x \in \overset{\circ}{U}(a) \Rightarrow |f(x)| > M.$$

Теорема 5 Ако је f бесконачно мала (велика) функција када $x \rightarrow a$, тада је $1/f$ бесконачно велика (мала) функција када $x \rightarrow a$.

9 Граничне вредности збира и производа

Теорема 6 Нека је A гранична вредност функције f и нека је B гранична вредност функције g када $x \rightarrow a$. Тада је

$$1. \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A + B,$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = AB.$$

Доказ. Нека је $f(x) = A + \alpha(x)$ и $g(x) = B + \beta(x)$, где су α и β бесконачно мале функције када $x \rightarrow a$.

1. Из

$$f(x) + g(x) = A + B + \alpha(x) + \beta(x) = A + B + \gamma(x),$$

где је γ бесконачно мала функција када $x \rightarrow a$ (претходна теорема), следи да $f(x) + g(x) \rightarrow A + B$ ($x \rightarrow a$).

2. Из

$$f(x) \cdot g(x) = AB + \alpha(x) \cdot B + \beta(x) \cdot A + \alpha(x) \cdot \beta(x)$$

следи $f(x) \cdot g(x) \rightarrow AB$ ($x \rightarrow a$). ■

Слично тврђење важи и за количник две функције.

Теорема 7 Нека је A гранична вредност функције f и нека је $B \neq 0$ гранична вредност функције g када $x \rightarrow a$, при чему је $g(x) \neq 0$ у некој околини $U(a)$. Тада важи

1. Функција $1/g$ тежи ка $1/B$ када $x \rightarrow a$.

2. Функција f/g тежи ка A/B када $x \rightarrow a$.

Доказ. Нека је $f(x) = A + \alpha(x)$ и $g(x) = B + \beta(x)$.

1. Како је $B \neq 0$, то је $|b(x)| > c > 0$ у некој околини $U(a)$ (зашто?), па је у тој околини и функција $B \cdot g$ ограничена. Из

$$\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} = \frac{1}{B \cdot g(x)}(B - \beta(x))$$

слиди да је функција $1/g - 1/B$ бесконачно мала када $x \rightarrow a$, односно $1/g$ конвергира ка $1/B$ када $x \rightarrow a$.

2. Из $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{g(x)} \cdot f(x)$, 1. и претходне теореме слиди тврђење.

■

10 Неке важне граничне вредности

Теорема 8 *Функција $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ (која није дефинисана у нули) има граничну вредност 1 када $x \rightarrow 0$.*

Доказ. За $0 < x < \pi/2$ из неједнакости $\sin x < x < \tan x$ добијамо

$$\frac{1}{\tan x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}, \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1,$$

односно

$$-1 < -\frac{\sin x}{x} < -\cos, \quad 0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < \frac{x^2}{2}$$

Како за свако ε постоји δ такво да је $\frac{x^2}{2} < \varepsilon$ за $0 < x < \delta$, слиди да за функцију f постоји десна гранична вредност у нули.

Међутим, функција f је парна, па постоји и лева гранична вредност која је једнака десној. Према томе,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Доказује се да важе и следеће једнакости.

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \text{ (специјално, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1)$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a \text{ за } a \in \mathbb{R}$$

УПОРЕЂИВАЊЕ БЕСКОНАЧНО МАЛИХ ФУНКЦИЈА

- Дефиниције и примери
- Неке важне еквивалентне функције
- Нека својства симбола 'мало о'

11 Дефиниције и примери

Често је корисно упоредити две функције у околини тачке $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Овде се даје упоређивање бесконачно малих функција када $x \rightarrow a$.

Дефиниција 10 Нека су α и β бесконачно мале функције када $x \rightarrow a$ и нека је

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \in \mathbb{R}.$$

1. Ако је $C \neq 0$, тада су α и β бесконачно мале функције **истог реда** када $x \rightarrow 0$.
2. Ако је $C = 1$, тада су α и β **еквивалентне** бесконачно мале функције када $x \rightarrow 0$. Ознака је $\alpha(x) \sim \beta(x)$ ($x \rightarrow a$) или само $\alpha \sim \beta$ ($x \rightarrow a$).

3. Ако је $C = 0$, тада је α бесконачно мала функција вишег реда у односу на β када $x \rightarrow a$. Ознака је $\alpha(x) = o(\beta(x))$ ($x \rightarrow a$) и чита се 'α је о мало (мало о) од β када $x \rightarrow a$ '. Може и само $\alpha = o(\beta)$ ($x \rightarrow a$).

Неке напомене

- У случају $\alpha \sim \beta$ ($x \rightarrow a$) каже се и 'f се асимптотски понаша као g када $x \rightarrow a$ '. Често се за g узима функција облика $(x - a)^k$ за $x \rightarrow a \in \mathbb{R}$, односно x^k за $x \rightarrow \pm\infty$.
- Ако је $\alpha \sim \beta$ када $x \rightarrow a$, тада је у некој околини $\overset{\circ}{U}(a)$ $\alpha(x) = \gamma(x) \cdot \beta(x)$, где је $\lim_{x \rightarrow a} \gamma(x) = 1$.
- Ако је $\alpha = o(\beta)$ када $x \rightarrow a$, тада је $\alpha(x) = \gamma(x) \cdot \beta(x)$ у некој околини $\overset{\circ}{U}(a)$, где је γ бесконачно мала када $x \rightarrow a$. Важи и обрнуто.
- Из 2. и 3. следи да важи

$$\alpha \sim \beta \ (x \rightarrow a) \Leftrightarrow \alpha - \beta = o(\alpha) \ (x \rightarrow a)$$

јер је за $\gamma(x) = 1 + \delta(x)$ и $\delta(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow 0$)

$$\alpha(x) = \gamma(x)\beta(x) = (1 + \delta(x))\beta(x) = \beta(x) + \delta(x)\beta(x).$$

- Релација \sim на скупу функција дефинисаних у околини тачке a је релација еквиваленције.
- Ознака $o(g)$ представља скуп свих функција које су бесконачно мале у односу на g када $x \rightarrow a$.

ПРИМЕРИ

1. Функције $\alpha(x) = \sin x$ и $\beta(x) = x$ су бесконачно мале истог реда када $x \rightarrow 0$ јер је

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2.$$

2. Функције $\alpha(x) = \sin x^2$ и $\beta(x) = x^2$ су еквивалентне бесконачно мале када $x \rightarrow 0$, па је

$$\sin x^2 = x^2 + o(x^2), \quad x \rightarrow 0.$$

3. Функција $\alpha(x) = x\sqrt{x}$ је бесконачно мала у односу на функцију $\beta(x) = \sin x$ када $x \rightarrow a$. Дакле, $x\sqrt{x} = o(\sin x)$ ($x \rightarrow 0$).

Ако $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не постоји, бесконачно мале функције α и β су **неупоредиве**. На пример, функције $\alpha(x) = \frac{\sin x}{x}$ и $\beta(x) = \frac{1}{x}$ су неупоредиве када $x \rightarrow \infty$.

На сличан начин се упоређују и бесконачно велике функције када $x \rightarrow a \in \overline{\mathbb{R}}$, као и две произвољне функције дефинисане у пробушеној околини тачке a .

12 Неке важне еквивалентне функције

Из познатих граничних вредности имамо следеће важне еквивалентне бесконачно мале функције када $x \rightarrow 0$.

1. $\sin x \sim x$
2. $\ln(1+x) \sim x$
3. $a^x - 1 \sim x \ln a$ (специјално, $e^x - 1 \sim x$)
4. $(1+x)^a - 1 \sim ax$, $a \in \mathbb{R}$

Дакле, када $x \rightarrow 0$ важи и

1. $\sin x = x + o(x)$
2. $\ln(1+x) = x + o(x)$
3. $a^x - 1 = x \ln a + o(x)$ (специјално, $e^x - 1 = x + o(x)$)
4. $(1+x)^a - 1 = ax + o(x)$, $a \in \mathbb{R}$

13 Нека својства симбола 'мало о'

За мало о важе једнакости (када $x \rightarrow a$)

1. $f \cdot o(g) = o(fg)$
2. $o(f) + o(f) = o(f)$
3. $o(o(f)) = o(f)$
4. $o(f) = o(g)$ ако је $f \sim g$.

Наведена својства се користе за израчунавање граничних вредности функција.

ПРИМЕРИ

1. За $x \rightarrow 0$ важи

$$1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x = 2(x + o(x))^2 = 2(x^2 + 2x \cdot o(x) + o(x^2)) = 2(x^2 + o(x^2))$$

па је

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{x^2} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (1 + o(1)) = 2.$$

2. За $x \rightarrow 0$ важи

$$\frac{e^{2x} - e^x}{\sin 2x - \sin x} = \frac{1 + 2x + o(x) - (1 + x + o(x))}{2x + o(x) - (x + o(x))} = \frac{x + o(x)}{x + o(x)} = \frac{1 + o(1)}{1 + o(1)},$$

па је

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{\sin 2x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + o(1)}{1 + o(1)} = 1.$$

Наравно, то није увек могуће. На пример, из $\sin x = x + o(x)$ када $x \rightarrow 0$ имамо да је

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x^3}.$$

Међутим, ако не знамо ког је реда бесконачно мала $o(x)$, не можемо ово искористити за одређивање тражене граничне вредности.

НЕПРЕКИДНОСТ ФУНКЦИЈА

- Појам непрекидности функције
- Врсте прекида
- Својства непрекидних функција
- Равномерна непрекидност

ПОЈАМ НЕПРЕКИДНОСТИ ФУНКЦИЈЕ

Појмом непрекидности уводи се класа *непрекидних* функција.

- Дефиниције и примери
- Операције са непрекидним функцијама
- Непрекидност елементарних функција

1 Дефиниције и примери

Претпоставимо да је функција f дефинисана у околини $U(a)$ тачке a .

Дефиниција 1 Функција $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ је непрекидна у тачки $a \in D$ ако за сваку околину V тачке $f(a)$ постоји околина U тачке a таква да је $f(U) \subset V$.

- Ако узмемо ε околине, услов непрекидности гласи:

За свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ такво да за свако $x \in D$ важи

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

- Ако је функција f дефинисана само у десној околини $U(a_+)$ (или само у левој околини $U(a_-)$), а испуњени су услови из дефиниције непрекидности, кажемо да је f у тачки a непрекидна са десне стране (непрекидна са леве стране).
- Ако је f непрекидна у тачки a , тада су испуњени услови за постојање граничне вредности функције f у тачки a и важи

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

- Ако f има граничну вредност у тачки a , не мора бити непрекидна у a (не мора бити ни дефинисана у a). Међутим, ако има граничну вредност и ако је

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

тада је f непрекидна у a .

- Ако је

$$\lim_{x \rightarrow a_+} f(x) = f(a),$$

функција је непрекидна са десне стране, а ако је

$$\lim_{x \rightarrow a_-} f(x) = f(a),$$

функција је непрекидна са леве стране.

- Ако је $\Delta f = f(x) - f(a)$ (прираштај функције у тачки a), тада важи:

Функција f је непрекидна у тачки a ако и само ако $\Delta f \rightarrow 0$ ($x \rightarrow a$).

Постоје функције које су непрекидне у свим тачкама неког скупа или на целој области дефинисаности.

Дефиниција 2 Функција $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ је непрекидна на скупу D ако је непрекидна у свакој тачки тог скупа.

Скуп свих функција непрекидних на D означава се са $C(D)$. На пример, $C[a, b]$ је скуп свих функција непрекидних на $[a, b]$, при чему се подразумева да је у тачки a функција непрекидна са десне стране, а у тачки b непрекидна са леве стране.

2 Операције са непрекидним функцијама

Из својстава граничних вредности збира и производа двеју функција следи да слична својства важе и за непрекидност.

Теорема 1 Ако су функције f и g непрекидне у тачки a , тада су и функције $f + g$ и $f \cdot g$ непрекидне у тачки a .

Следеће својство омогућава да слично важи и за количник.

Теорема 2 Ако је f непрекидна у тачки a и ако је $f(a) \neq 0$, тада постоји околина $U(a)$ у којој је функција истог знака као $f(a)$.

Доказ. Нека је, на пример, $f(a) > 0$ и $\varepsilon = \frac{f(a)}{2}$. Како је функција непрекидна у тачки a , за околину V_ε тачке $f(a)$ постоји околина $U(a)$ која се цела пресликава у V . За $x \in U$ важи $f(x) > 0$.

Слично је и у случају $f(a) < 0$. ■

Из ове теореме следи да је функција f/g дефинисана у некој околини $U(a)$ ако је $g(a) \neq 0$ и ако су f и g непрекидне, па непрекидност важи и за количник.

Теорема 3 Ако су f и g непрекидне у тачки a и ако је $g(a) \neq 0$, тада је и функција f/g непрекидна у тачки a .

Из наведених својстава непосредно следи да она важе и на скупу.

1. $f, g \in C[a, b] \Rightarrow f + g, f \cdot g \in C[a, b]$,
2. $f, g \in C[a, b], g(x) \neq 0 (x \in [a, b]) \Rightarrow f/g \in C[a, b]$.

Важно је и следеће својство непрекидних функција.

Теорема 4 Ако је функција $f : A \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ непрекидна у тачки $a \in A$ и ако је функција $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна у тачки $f(a)$, тада је функција $g \circ f$ непрекидна у тачки a .

Доказ. Нека је $h = g \circ f$ и нека је W околина тачке $h(a)$. Како је $h = g(f(a))$ и како је g непрекидна у тачки $f(a)$, постоји околина $V(f(a))$ таква да је $g(V) \subset W$. Из непрекидности функције f следи да за V постоји околина $U(a)$ за коју важи $f(U) \subset V$. Тада је

$$h(U) = g(f(U)) \subset g(V) \subset W,$$

па је h непрекидна у a .

3 Непрекидност елементарних функција

Дефиниција 3 Основне елементарне функције су:

1. константа $x \mapsto c \in \mathbb{R}$
2. степена функција $x \mapsto x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)
3. експоненцијална функција $x \mapsto a^x$ ($a > 0$)
4. логаритамска функција $x \mapsto \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$)
5. тригонометријске функције \sin , \cos , \tan и \cot
6. инверзне тригонометријске функције \arcsin , \arccos , \arctan и arccot

Дефиниција 4 Елементарна функција је свака функција која се добија коначном применом аритметичких операција и композиција над основним елементарним функцијама.

Теорема 5 Све елементарне функције су непрекидне.

ВРСТЕ ПРЕКИДА

Постоје и функције које нису непрекидне (у тачки или на скупу).

- Прекид прве врсте
- Прекид друге врсте

4 Прекид прве врсте

Дефиниција 5 Тачка $a \in D$ је тачка прекида функције $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ако f није непрекидна у a . Каже се, такође, да је f прекидна у тачки a .

Дефиниција 6 1. Ако је a тачка прекида функције f и ако у тој тачки постоје једностране граничне вредности, тада је a тачка прекида прве врсте.

2. Величина $s_f(a)$ дефинисана са

$$s_f(a) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x) - \lim_{x \rightarrow a-} f(x)$$

је скок функције f у тачки a .

3. Ако је a тачка прекида прве врсте и ако је $s_f(a) = 0$, тада за прекид кажемо да може да се отклони или одстрани. Другим речима, прекид у тачки a може да се отклони ако у тој тачки постоји гранична вредност коју узимамо за $f(a)$.

5 Прекид друге врсте

Дефиниција 7 Ако за функцију f тачка прекида није прве врсте, онда за прекид кажемо да је друге врсте.

Дакле, за прекид друге врсте бар једна од једностраних граничних вредности не постоји или је бесконачна.

ПРИМЕРИ

1. Функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана са

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

има у нули прекид друге врсте јер $f(x) \rightarrow +\infty$ када $x \rightarrow 0$.

2. Функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана са

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

има у нули прекид друге врсте јер у нули не постоје ни једностране граничне вредности.

СВОЈСТВА НЕПРЕКИДНИХ ФУНКЦИЈА

Овде се разматрају својства непрекидних функција на одсечку (сегменту, затвореном интервалу) $[a, b]$. То су глобална својства за разлику од оних која важе само у околини неке тачке (локална).

- Вајерштрасове теореме
- Прва Коши Болцанова теорема
- Друга Коши Болцанова теорема

6 Вајерштрасове теореме

Теорема 6 (*Прва Вајерштрасова*) Ако је функција f непрекидна на $[a, b]$, онда је и ограничена на $[a, b]$.

Услов 'непрекидна на сегменту' не може да се ослаби. На пример, функција $f : x \mapsto 1/x$ је непрекидна на $(0, 1)$, али није на том скупу ограничена.

Теорема 7 (*Друга Вајерштрасова*) Ако је функција f непрекидна на $[a, b]$, тада она на том одсечку достиже и најмању и највећу вредност.

Доказ. Из претходне теореме следи да постоје *инфимум* и *супремум* функције f на $[a, b]$ (јер је ограничена). Нека је

$$l = \inf_{a \leq x \leq b} f(x), \quad L = \sup_{a \leq x \leq b} f(x).$$

Треба доказати да постоје бар једна тачка $\xi \in [a, b]$ за коју важи $f(\xi) = l$ и бар једна тачка $\nu \in [a, b]$ за коју важи $f(\nu) = L$.

Докажимо да постоји ξ , а слично је и за ν .

Претпоставимо супротно, да је $l < f(x)$ за свако $x \in [a, b]$. Тада је $f(x) - l > 0$, па је функција φ дата са

$$\varphi(x) = \frac{1}{f(x) - l}$$

непрекидна и такође ограничена на $[a, b]$ (претходна теорема). Дакле, постоји m такво да је

$$0 < \varphi(x) \leq m, \quad 0 < \frac{1}{f(x) - l} \leq m, \quad f \geq l + \frac{1}{m}.$$

Из последње неједнакости следи да l није највеће доње ограничење, што је контрадикција. Према томе, није добра претпоставка да је $l < f(x)$ за свако $x \in [a, b]$, већ постоји неко $\xi \in [a, b]$ за које је $f(\xi) = l$. ■

Претпоставка 'функција је непрекидна на $[a, b]$ ' не може да се ослаби. На пример, функција $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана са

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in (-1, 1) \\ 0 & x \in \{-1, 1\} \end{cases}$$

нема ни најмању ни највећу вредност на $[-1, 1]$. Функција је ограничена, има инфимум и супремум,

$$\sup_{x \in [-1, 1]} f(x) = 1, \quad \inf_{x \in [-1, 1]} f(x) = -1,$$

али није непрекидна на $[-1, 1]$.

7 Прва Коши Болцанова теорема

Теорема 8 Ако је функција f непрекидна на $[a, b]$ и ако су $f(a)$ и $f(b)$ различитог знака, тада у интервалу (a, b) постоји бар једна тачка c за коју је $f(c) = 0$.

Доказ. Нека је $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$. Тачка $\frac{a+b}{2}$ дели одсечак $[a, b]$ на два дела. Ако је вредност функције у тој тачки једнака нули, онда њу можемо узети за c . Ако то није случај, онда за један од одсека $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ и $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ важи да функција на крајевима има вредности различитог знака. Ако тај одсечак означимо са $[a_1, b_1]$ и ако описани поступак понављамо, добићемо или тачку из (a, b) у којој је функција једнака нули или низ уметнутих одсека

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$$

чија дужина тежи нули ($b_n - a_n = (b - a)/2^n$). У другом случају постоји јединствена тачка c која припада свим одсечцима (Канторов принцип), при чему је

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Како је

$$f(a_n) < 0, \quad f(b_n) > 0$$

следи да је (због непрекидности)

$$f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq 0, \quad f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \geq 0,$$

па је $f(c) = 0$. Према томе, у оба случаја важи тврђење теореме. ■

Теорема тврди да постоји бар једна тачка у којој је функција једнака нули, али функција може имати и више таквих тачака.

Услов 'непрекидна на сегменту $[a, b]$ ' је битан и не може се ослабити. Наведите пример који то показује.

8 Друга Коши Болцанова теорема

Теорема 9 Ако је функција f непрекидна на $[a, b]$ и ако је $f(a) < f(b)$, тада за свако C за које је $f(a) < C < f(b)$ постоји бар једна тачка $c \in (a, b)$ таква да је $f(c) = C$.

Доказ. Функција $g : x \mapsto f(x) - C$ је непрекидна на $[a, b]$, при чему је

$$g(a) = f(a) - C < 0, \quad g(b) = f(b) - C > 0.$$

Како постоји $c \in (a, b)$ такво да је $g(c) = 0$ (Прва Коши Болцанова теорема), то је $f(c) = C$. ■

Из ове теореме следи да непрекидна функција на $[a, b]$ узима све вредности из одсечка $[f(a), f(b)]$.

РАВНОМЕРНА НЕПРЕКИДНОСТ

Уводи се још један (строжији) појам непрекидности функције на скупу.

- Дефиниција и примери
- Веза непрекидности и равномерне непрекидности

9 Дефиниција и примери

У дефиницији непрекидности функције на скупу D околина U тачке $a \in D$ је зависила од околине V тачке $f(a)$ и од саме тачке a , односно δ је зависило од ε и од a . Међутим, постоје функције код којих U (односно δ) не зависе од тачке, већ само од V (односно ε).

Дефиниција 8 Функција f је равномерно (униформно) непрекидна на D ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ такво да за свако $x, y \in D$ важи

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

10 Веза непрекидности и равномерне непрекидности

Из примера се види да непрекидна функција на скупу D не мора бити и равномерно непрекидна на том скупу.

Да ли важи обрнуто? Ако у дефиницији равномерне непрекидности узмемо $y = a$, добијамо дефиницију непрекидности функције f у тачки a . Према томе, равномерно непрекидна функција на D је и непрекидна на D .

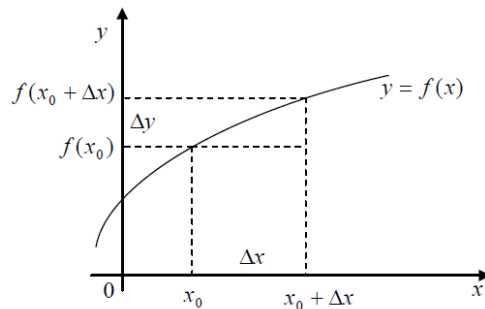
Следећа теорема издваја скупове на којима су појмови *непрекидна функција* и *равномерно непрекидна функција* еквивалентни.

Теорема 10 (Канторова) Ако $f \in C[a, b]$, тада је f и равномерно непрекидна на $[a, b]$.

ИЗВОДИ ФУНКЦИЈЕ

1. Дефиниција извода

Нека је функција $f(x)$ дефинисана у некој околини тачке x_0 .



Деф. 1.1. Ако постоји коначна гранична вредност

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

онда се та гранична вредност назива (први) извод функције у тачки x_0 и означава са $f'(x_0)$.

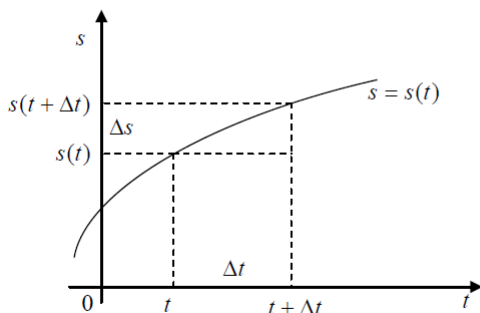
Дакле,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Деф. 1.2. Функција $f(x)$ је диференцијабилна у тачки x ако постоји $f'(x)$.

Деф. 1.3. Функција $f(x)$ је диференцијабилна на интервалу (a, b) ако је диференцијабилна у свакој тачки тог интервала.

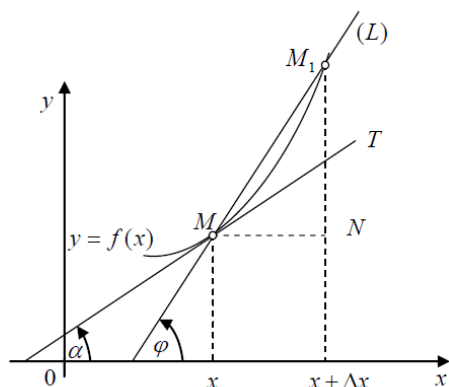
2. Механичка и геометријска интерпретација извода



$s = s(t)$ - закон кретања

$\frac{\Delta s}{\Delta t}$ - средња брзина промене на интервалу $[t, t + \Delta t]$

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$



$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{M_1 N}{MN} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$$

3. Изводи елементарних функција

1) $f(x) = C$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0 \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0, \quad (\Delta x \neq 0)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0$$

2) $f(x) = x^n, \quad (n \in \mathbf{N})$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x - x) \left[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} x + \dots + (x + \Delta x) x^{n-2} + x^{n-1} \right]}{\Delta x} =$$

$$= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + \dots + x^{n-1}}_n = nx^{n-1}$$

Напомена: Може се доказати да је $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad (\alpha \in \mathbf{R}).$

3) $f(x) = \sin x$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos x$$

$$4) f(x) = \log_a x$$

$$\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right) = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \cdot \log_a e = \frac{1}{x \ln a}, \quad \text{јер је}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e.$$

$$\text{Напомена: } (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

4. Однос диференцијабилности и непрекидности функције

Претпоставимо да је функција диференцијабилна у тачки x_0 , тј.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Тада је

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x), \quad (\alpha(\Delta x) \rightarrow 0 \text{ кад } \Delta x \rightarrow 0),$$

па се прираштај диференцијабилне функције може представити у облику

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \quad (\alpha(\Delta x) \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0).$$

Теорема 4.1. Ако је функција $f(x)$ диференцијабилна у тачки x_0 , тада је она непрекидна у тачки x_0 .

Доказ: Из диференцијабилности функције у тачки x_0 следи да је

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

па је $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$.

То значи да је функција непрекидна у тачки x_0 .

Напомена: Обратно тврђење не важи, тј. непрекидна функција у тачки x_0 не мора бити диференцијабилна у тачки x_0 .

Напомена: Ако постоји $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, онда се та гранична вредност назива **десни извод**

функције у тачки x_0 и означава са $f'_+(x_0)$. Слично се дефинише **леви извод**

функције у тачки x_0 : $f'_-(x_0) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

5. Основна правила извода

Теорема 5.1. Ако су $f(x)$ и $g(x)$ диференцијабилне функције у тачки x , онда су диференцијабилне и функције $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$, ($g(x) \neq 0$) и при томе је:

$$1) (f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$2) (fg)' = f'g + fg'$$

$$3) \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Доказ:

1) Нека је $y = f(x) + g(x)$. Тада је

$$\Delta y = f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) - (f(x) + g(x)) = \Delta f + \Delta g \text{ па је}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f + \Delta g}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = f' + g'.$$

Слично: $(f - g)' = f' - g'$.

$$2) \Delta y = f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x) = f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x + \Delta x) + f(x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f(x + \Delta x) - f(x))g(x + \Delta x) + f(x)(g(x + \Delta x) - g(x))}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x + \Delta x) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} f(x). \end{aligned}$$

Пошто је $g(x)$ диференцијабилна функција у тачки x , она је и непрекидна у тачки x , па је $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x + \Delta x) = g(x)$. То

значи да је

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

3) *Математика 1*, стр. 213.

ТЕОРЕМЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНОГ РАЧУНА

- Локални екстремум
- Теореме о средњим вредностима
- Лопиталова правила

ЛОКАЛНИ ЕКСТРЕМУМ

- Дефиниција и примери
- Неопходан услов локалног екстремума

1 Дефиниција и примери

Претпоставимо да је функција f дефинисана у околини тачке c .

Дефиниција 1 Ако постоји околина U тачке c за коју је

$$f(x) \leq f(c)$$

за свако $x \in U$, функција f у тачки c има локални максимум.

– Ако је

$$f(x) \geq f(c)$$

за свако $x \in U$, функција f у тачки c има локални минимум.

– Локални максимум и локални минимум су локални екстремуми функције f .

– Ако уместо \leq и \geq ставимо $<$ и $>$, онда су то строги локални екстремуми (строги максимум и строги минимум).

2 Неопходан услов локалног екстремума

Теорема 1 Ако функција f има у тачки c локални екстремум и ако је у тој тачки диференцијабилна, тада је $f'(c) = 0$.

Доказ. Претпоставимо супротно, да је $f'(c) \neq 0$. Како је у тачки c локални екстремум, постоји околина тачке c у којој прираштај $\Delta f(c)$ не мења знак. Из претпоставке да је f диференцијабилна следи да је

$$\frac{\Delta f(c)}{\Delta x} = f'(c) + \alpha(\Delta x),$$

при чему $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$ када $\Delta x \rightarrow 0$. Међутим, ова једнакост није могућа јер десна страна има сталан знак за довољно мало Δx , а на левој страни се знак мења у зависности од знака за Δx . Према томе, претпоставка није добра, па је $f'(c) = 0$.

Теорема је позната и као Фермаова теорема. Наравно, функција може имати локални екстремум и у тачки у којој није диференцијабилна.

ТЕОРЕМЕ О СРЕДЊИМ ВРЕДНОСТИМА

- Ролова теорема
- Лагранжова теорема
- Кошијева теорема

3 Ролова теорема

3.1 Формулација и доказ

Теорема 2 Ако је функција $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

1. непрекидна на $[a, b]$,
2. диференцијабилна на (a, b)

и ако је

$$f(a) = f(b),$$

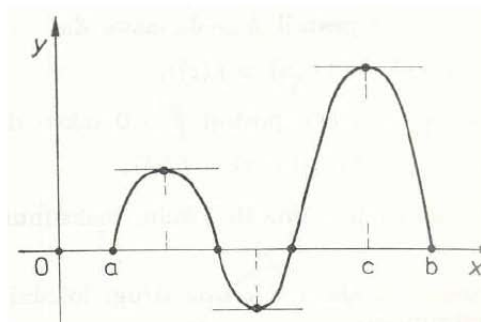
тада постоји тачка $c \in (a, b)$ таква да је

$$f'(c) = 0.$$

Доказ. Ако је f константна, онда је $f'(x) = 0$ за свако $x \in (a, b)$. Ако је $f(x) > f(a)$ за неко $x \in (a, b)$, тада f има максимум у некој тачки c (због непрекидности), па је $f'(c) = 0$. Ако је $f(x) < f(a)$ за свако $x \in (a, b)$, тада постоји x за које је $f(x) < f(a)$. У том случају f има минимум у некој тачки $c \in (a, b)$, па је опет $f'(c) = 0$.

Свака од претпоставки наведених у теорему је битна.

3.2 Геометријска интерпретација



4 Лагранжова теорема

4.1 Формулација и доказ

Теорема 3 Ако је функција $f : [a, b] \rightarrow R$

1. непрекидна на $[a, b]$,
2. диференцијабилна на (a, b) ,

тада постоји тачка $c \in (a, b)$ таква да је

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Доказ. Нека је

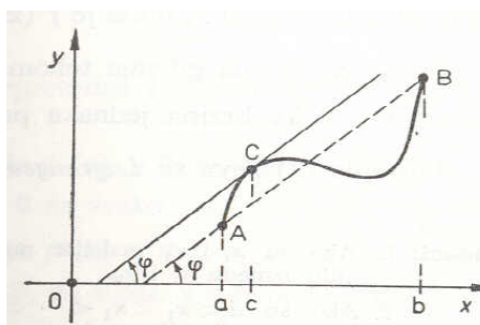
$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

и нека је функција $\varphi : [a, b] \rightarrow R$ дефинисана са

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \lambda(x - a).$$

Како је $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, функција φ испуњава услове Ролове теореме. Према томе, постоји $c \in (a, b)$ тако да је $\varphi'(c) = 0$, односно $f'(c) = \lambda$.

4.2 Геометријска интерпретација



4.3 Примена Лагранжове теореме

1. Ако је $f : (a, b) \rightarrow R$ диференцијабилна и ако је $f'(x) = 0$ за $x \in (a, b)$, тада је

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = 0,$$

па је $f(x_2) = f(x_1)$, односно функција f је константна.

2. Ако функције f и g имају једнаке изводе на (a, b) , онда се оне на (a, b) разликују за константу.

3. Како за $x < y$ постоји $c \in (x, y)$ тако да је

$$\sin y - \sin x = \cos c \cdot (y - x),$$

то је

$$|\sin y - \sin x| \leq |y - x|.$$

5 Кошијева теорема

5.1 Формулација и доказ

Теорема 4 Ако су функције $f, g : [a, b] \rightarrow R$

1. непрекидне на $[a, b]$,
2. диференцијабилне на (a, b)

и ако је $g'(x) \neq 0$ за $x \in (a, b)$, тада постоји тачка $c \in (a, b)$ таква да је

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доказ. Нека је

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

и нека је функција $\varphi : [a, b] \rightarrow R$ дефинисана са

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \lambda(g(x) - g(a)).$$

Из услова $g'(x) \neq 0$ за $x \in (a, b)$ следи да је $g(b) \neq g(a)$. Како је $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, функција φ испуњава услове Ролове теореме. Према томе, постоји $c \in (a, b)$ тако да је $\varphi'(c) = 0$, односно $f'(c) = \lambda g'(c)$.

За $g(x) = x$ добија се Лагранжова теорема.

5.2 Једна последица Кошијеве теореме

Применом Кошијеве теореме може да се докаже следеће тврђење.

Теорема 5 Ако су функције $f, g : [a, b] \rightarrow R$

1. непрекидне на $[a, b]$,
2. $(n+1)$ -пута диференцијабилне на (a, b) ,
3. $g^{(k)}(x) \neq 0$ за $x \in (a, b)$ ($k = 0, 1, \dots, n$),
4. $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a) = 0$ ($k = 0, 1, \dots, n$),

тада постоји тачка $c \in (a, b)$ таква да је

$$\frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{g^{(n+1)}(c)}.$$

Доказ. Према Кошијевој теореме постоји $c_1 \in (a, b)$ тако да је

$$\frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c_1)}{g'(c_1)}.$$

Ако сада Кошијеву теорему применимо на интервалу (a, c_1) добијамо да постоји $c_2 \in (a, c_1)$ тако да је

$$\frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f'(c_1)}{g'(c_1)} = \frac{f'(c_1) - f'(a)}{g'(c_1) - g'(a)} = \frac{f''(c_2)}{g''(c_2)}.$$

Понављајући овај поступак n пута добијамо тачку $c \in (a, c_n)$ за коју је

$$\frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f^{(n)}(c_n)}{g^{(n)}(c_n)} = \frac{f^{(n)}(c_n) - f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(c_n) - g^{(n)}(a)} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{g^{(n+1)}(c)}.$$

ЛОПИТАЛОВА ПРАВИЛА

- Неопређеност облика $\frac{0}{0}$
- Неопређеност облика $\frac{\infty}{\infty}$
- Неопређености облика $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , 1^∞ , 0^∞ , ∞^0

6 Неодређеност облика $\frac{0}{0}$

За количник $\frac{f(x)}{g(x)}$ кажемо да је неодређени облик $\frac{0}{0}$ ако је

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0.$$

При томе, гранична вредност тог количника може постојати. На пример

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi x}{2x} = \frac{\pi}{2}.$$

Довољан услов за одређивање граничне вредности $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ даје теорема позната као Лопиталово правило.

Теорема 6 Нека су функције f и g диференцијабилне у пробушеној околи $\overset{\circ}{U}$ тачке a и нека је:

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$,
2. $g'(x) \neq 0$ за $x \in \overset{\circ}{U}$,
3. постоји $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тада је

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказ. Ако функције f и g додефинишемо у тачки a са $f(a) = g(a) = 0$ добићемо непрекидне функције у околини U . На $[a, x]$ (или $[x, a]$) за $x \in \overset{\circ}{U}$ тада може да се примени Кошијева теорема по којој

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

за $c \in (a, x)$, односно

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Како $c \rightarrow a$ када $x \rightarrow a$, то је

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Слично тврђење важи и у случају $a = -\infty$, односно $a = +\infty$.

Теорема 7 Нека су функције f и g диференцијабилне у $(-\infty, b)$ нека је:

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$,
2. $g'(x) \neq 0$ за $x \in (-\infty, b)$,
3. постоји $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тада је

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказ. Нека је $x = -1/t$ и нека је

$$F(t) = f(-1/t), \quad G(t) = g(-1/t).$$

За $x \rightarrow -\infty$ имамо да $t \rightarrow 0_+$. Како

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} F(t) = \lim_{t \rightarrow 0_+} G(t) = 0,$$

из претходне теореме (примењене на F и G) следи

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{f(-1/t)}{g(-1/t)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Из ове једнакости и једнакости

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{f'(-1/t) \cdot t^{-2}}{g'(-1/t) \cdot t^{-2}} = \lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{f'(-1/t)}{g'(-1/t)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

слиеди тврђење теореме. ■

Слично је и у случају $a = +\infty$.

7 Неопређеност облика $\frac{\infty}{\infty}$

За количник $\frac{f(x)}{g(x)}$ кажемо да је неодређени облик $\frac{\infty}{\infty}$ ако је

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty.$$

И у овом случају важи Лопиталово правило.

Теорема 8 Нека су функције f и g диференцијабилне у пробушеној околини $\overset{\circ}{U}$ тачке a и нека је:

1. $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ (или $-\infty$),

2. $g'(x) \neq 0$ за $x \in \overset{\circ}{U}$,

3. постоји $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тада је

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Аналогна тврђења важе и ако је $a = -\infty$ или $a = +\infty$.

8 Неопређености облика $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , 1^∞ , 0^∞ , ∞^0

Неопређености облика $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , 1^∞ , 0^∞ , ∞^0 се свде на неодређености облика $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

АПРОКСИМАЦИЈА ФУНКЦИЈЕ У ОКОЛИНИ ТАЧКЕ

- Тејлорова формула
- Маклоренова формула

ТЕЈЛОРОВА ФОРМУЛА

- Тејлоров полином
- Лагранжов облик остатка
- Пеанов облик остатка
- Локална Тејлорова формула

1 Тејлоров полином

Нека је функција f диференцијабилна у околини U тачке a . Према Лагранжовој теореме за $x \in U$ постоји тачка c која је између x и a таква да је

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x - a).$$

Ако функцију f у околини тачке a апроксимирамо полиномом $P_0(x) = f(a)$, тада полином и функција имају исту вредност у тачки a , а из претходне једнакости видимо да ће грешка $R_0(x)$ у тачки x бити

$$R_0(x) = f(x) - f(a) = f'(c)(x - a).$$

Ако функцију f апроксимирамо полиномом P_n имаћемо грешку R_n ,

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x).$$

За полином P_n можемо поставити услове

$$P_n(a) = f(a), \quad P'_n(a) = f'(a), \quad \dots, \quad P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a).$$

Из ових услова се добија да је

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n,$$

односно

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k.$$

Полином P_n је познат као Тејлоров полином степена n за функцију f у околини тачке a .

2 Лагранжов облик остатка

Лагранж је 1797. године доказао следеће тврђење.

Теорема 1 Ако функција f у околини U тачке a

1. има непрекидан извод реда n ,

2. има извод реда $n + 1$

и ако је

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \quad x \in U$$

где је P_n Тејлоров полином, тада постоји тачка c између a и x таква да је

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Доказ. Нека је

$$F(x) = R_n(x) = f(x) - P_n(x), \quad G(x) = (x-a)^{n+1}.$$

Како је

$$F^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - P_n^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - f^{(k)}(a) = 0$$

и $G^{(k)}(a) = 0$ за $k = 0, 1, \dots, n$, на функције F и G може да се примени последица Кошијеве теореме. Према томе, за $x > a$ постоји $c \in (a, x)$ тако да је

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F^{(n+1)}(c)}{G^{(n+1)}(c)} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},$$

односно

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Наравно, слично је и за $x < a$. ■

Овај облик остатка се зове Лагранжов облик.

Тејлоров полином може да се напише и помоћу диференцијала вишег реда функције f у тачки a ,

$$P_n(x) = f(a) + df(a) + \frac{d^2 f(a)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(a)}{n!}.$$

Ако је у некој околини тачке a остатак R_n довољно мали, možмо рећи да је

$$f(x) \approx P_n(x).$$

3 Пеанов облик остатка

Ако је $f^{(n+1)}(x)$ ограничен у околини тачке a , тада из Лагранжовог облика остатка видимо да је

$$R_n(x) = o((x-a)^n), \quad x \rightarrow a.$$

Овај облик остатка се зове Пеанов облик.

Теорема 2 Ако функција f

1. у околини U тачке a има извод реда $n-1$,
2. има извод реда n у тачки a ,

тада важи

$$R_n(x) = o((x-a)^n), \quad x \rightarrow a.$$

Доказ. Нека је $\alpha(x) = \frac{R_n(x)}{(x-a)^n}$. Ако на α применимо Лопиталово правило $n-1$ пута, добијамо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n! (x-a)} \\ &= \frac{1}{n!} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n-1)}(x) - P_n^{(n-1)}(x)}{x-a} \end{aligned}$$

Како је

$$P_n^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(a) + f^{(n)}(a)(x-a),$$

то је

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n-1)}(x) - P_n^{(n-1)}(x)}{x-a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a} - f^{(n)}(a) \\ &= f^{(n)}(a) - f^{(n)}(a) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Према томе, $\alpha(x) \rightarrow 0$ када $x \rightarrow a$. ■

4 Локална Тејлорова формула

При условима претходне теореме важи

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

када $x \rightarrow a$, што је познато као *локална Тејлорова формула* (ЛТФ).

- У односу на Тејлорову формулу, где се за функцију f тражи постојање извода реда $n+1$ у околини тачке a , за ЛТФ довољно је постојање извода реда $n-1$ (за два мање).
- ЛТФ уопштава појам диференцијабилности функције, јер за $n=1$ она управо даје дефиницију диференцијабилности функције у тачки a .
- На основу ЛТФ имамо

$$\Delta f(a) \approx df(a) + \frac{d^2 f(a)}{2!} + \cdots + \frac{d^n(a)}{n!}$$

у довољно малој околини тачке a .

- ЛТФ изражава и чињеницу да функција f и полином P_n имају у тачки a *додир* вишег реда (реда n).

МАКЛОРЕНОВА ФОРМУЛА

- Специјални случај Тејлорове формуле
- Маклоренови полиноми за неке функције
- Остатак у Пеановом облику

5 Специјални случај Тејлорове формуле

Тејлорова формула за $a=0$ се зове Маклоренова формула. Дакле, у том случају

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

где је остатак у Лагранжовом облику

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

6 Маклоренови полиноми за неке функције

6.1 Маклоренов полином за $f : x \mapsto e^x$

Како је $f^{(n)}(x) = e^x$, то је

$$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 1, \quad f^{(n+1)}(\theta x) = e^{\theta x},$$

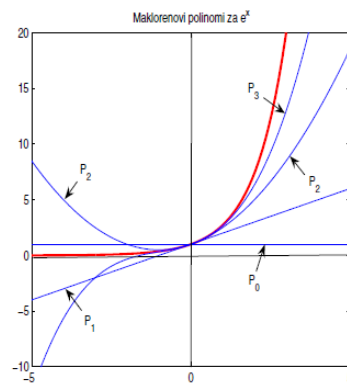
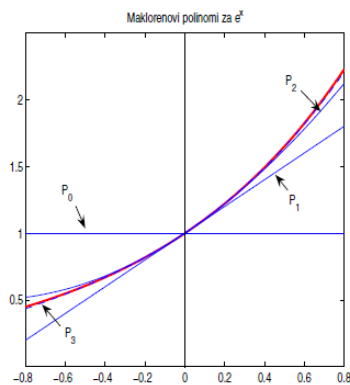
па је

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

и

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}.$$

За фиксирано x остатак тежи нули када $n \rightarrow \infty$.



6.2 Маклоренов полином за $f : x \mapsto \sin x$

Како је

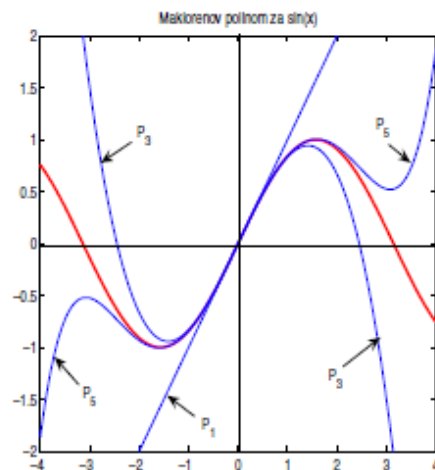
$$f^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin x, \quad f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x,$$

то је

$$f^{(2n)}(0) = 0, \quad f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n,$$

па је

$$P_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$



6.3 Маклоренов полином за $f : x \mapsto \cos x$

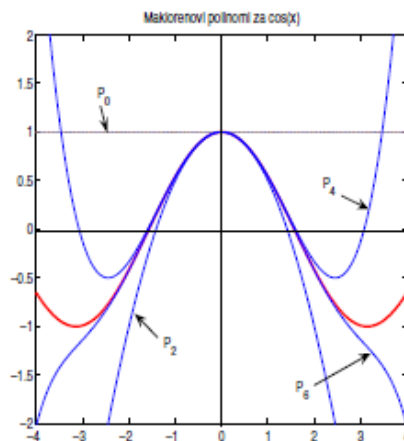
Како је

$$f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos x, \quad f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \sin x,$$

$$f^{(2n)}(0) = (-1)^n, \quad f^{(2n+1)}(0) = 0,$$

па је

$$P_{2n}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$



6.4 Маклоренов полином за $f : x \mapsto \ln(1+x)$

Како је $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$, то је

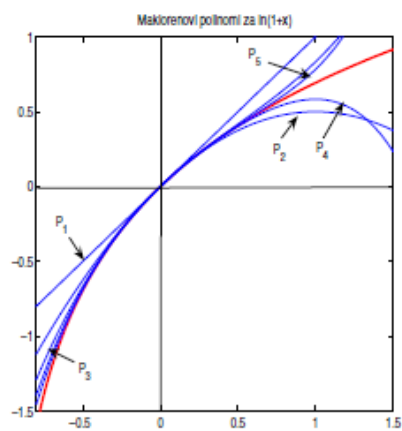
$$P_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

и

$$R_n(x) = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}}.$$

За $|x| < 1$ остатак тежи нули када $n \rightarrow \infty$, а за $0 \leq x < 1$ важи

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}.$$



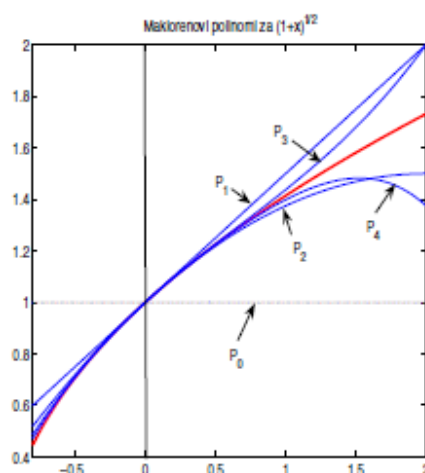
6.5 Маклоренов полином за $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$

Како је $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$, то је

$$\begin{aligned}P_n(x) &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n \\&= 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n.\end{aligned}$$

Специјално, за $\alpha = 1$ имамо

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + R_n(x).$$



7 Остатак у Пеановом облику

Остатак у Пеановом облику је

$$R_n(x) = o(x^n), \quad x \rightarrow 0.$$

Специјално, за наведене функције је (при $x \rightarrow 0$)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n).$$

Маклоренова формула са Пеановим остатком користи се за налажење граничних вредности.

ПРИМЕНЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНОГ РАЧУНА

- Испитивање монотоности функције
- Строги локални екстремуми
- Конвексност и конкавност
- Асимптоте

ИСПИТИВАЊЕ МОНОТОНОСТИ ФУНКЦИЈЕ

- Дефиниције
- Потребан услов за монотоност
- Довољан услов за монотоност

1 Дефиниције

Најчешће се користи појам монотоности функције на интервалу.

Дефиниција 1 Функција $f : A \rightarrow R$ је на интервалу $(a, b) \subset A$

1. неопадајућа ако важи

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2), \quad x_1, x_2 \in (a, b),$$

2. нерастућа ако важи

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2), \quad x_1, x_2 \in (a, b),$$

3. растућа ако важи

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2), \quad x_1, x_2 \in (a, b),$$

4. опадајућа ако важи

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2), \quad x_1, x_2 \in (a, b),$$

5. монотона ако важи неки од услова 1.-4.

Уместо термина неоппадајућа, нерастућа, растућа, опадајућа користе се и термини растућа, опадајућа, строго растућа, строго опадајућа. Исто тако, за функције за које важи 3. или 4. се користи термин строго монотоне.

Слично се може дати и дефиниција монотоности функције f на скупу $B \subset A$. На пример, функција $f : x \mapsto x^2$ је растућа на $(0, +\infty)$, али и на $[0, \infty)$.

2 Довољан услов за монотоност

Довољан услов за монотоност функције може да се исказе преко првог извода.

Теорема 1 Нека је функција $f : A \rightarrow R$ диференцијабилна на интервалу $(a, b) \subset A$.

1. Ако је $f'(x) \geq 0$ за $x \in (a, b)$ функција f је неоппадајућа на (a, b) .
2. Ако је $f'(x) \leq 0$ за $x \in (a, b)$ функција f је нерастућа на (a, b) .
3. Ако је $f'(x) > 0$ за $x \in (a, b)$ функција f је растућа на (a, b) .
4. Ако је $f'(x) < 0$ за $x \in (a, b)$ функција f је опадајућа на (a, b) .

Доказ. За $x_2, x_1 \in (a, b)$ и $x_1 < x_2$ на основу Лагранжеве теореме имамо да је

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \quad c \in (x_1, x_2).$$

Из претпоставке за 1. следи да је $f'(c) \geq 0$, па је $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, односно $f(x_2) \geq f(x_1)$.

Слично и у осталим случајевима. ■

3 Потребан услов за монотоност

У случајевима 3. и 4. из претходне теореме наведени услови нису неопходни за наведену монотоност. Да услов, на пример $f'(x) > 0$, није неопходан за то да функција буде растућа показује функција $f : x \mapsto x^3$ која је растућа иако је $f'(0) = 0$.

Међутим, у случајевима 1. и 2. услови у претходној теорему су и неопходни.

Теорема 2 Нека је функција f диференцијабилна на интервалу (a, b) .

1. Ако је f неоппадајућа на (a, b) , тада је $f'(x) \geq 0$.
2. Ако је f нерастућа на (a, b) , тада је $f'(x) \leq 0$.

Доказ. 1. Како је f неоппадајућа, то је

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0, \quad x + \Delta x \in (a, b),$$

па је

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

Слично се доказује и 2. ■

СТРОГИ ЛОКАЛНИ ЕКСТРЕМУМИ

- Дефиниција
- Довољан услов (помоћу првог извода)
- Довољан услов (помоћу другог извода)
- Довољан услов (општи случај)

4 Дефиниција

Претпоставимо да је функција f дефинисана у околини тачке c .

Дефиниција 2 Ако постоји околина U тачке c за коју је

$$f(x) < f(c)$$

за свако $x \in U \setminus \{c\}$, функција f у тачки c има строги локални максимум. Ако је

$$f(x) > f(c)$$

за свако $x \in U \setminus \{c\}$, функција f у тачки c има строги локални минимум. Строги локални максимум и строги локални минимум су строги локални екстремуми функције f .

Раније је доказано да је $f'(c) = 0$ неопходан услов за локални екстремум у случају диференцијабилне функције у околини тачке $x = c$. Према томе, тачке у којима је први извод једнак нули представљају потенцијалне тачке локалног екстремума.

Како локални екстремум може бити и у тачкама у којима функција није диференцијабилна, строге локалне екстремуме треба тражити у тачкама у којима је извод једнак нули или не постоји. Такве тачке се зову критичне тачке, а оне у којима је извод једнак нули зову се још и стационарне тачке.

5 Довољан услов (помоћу првог извода)

Теорема 3 Нека је f непрекидна у некој околини U тачке c и диференцијабилна у $U \setminus \{c\}$.

1. Ако за $x \in U$ важи $f'(x) < 0$ за $x < c$ и $f'(x) > 0$ за $x > c$, онда f у c има строги локални минимум.
2. Ако за $x \in U$ важи $f'(x) > 0$ за $x < c$ и $f'(x) < 0$ за $x > c$, онда f у c има строги локални максимум.

Доказ. 1. Из довољног услова за монотоност следи да f опада за $x < c$ и расте за $x > c$. Према томе, у тачки c су испуњени услови из дефиниције строгог локалног минимума.

На исти начин се доказује 2. ■

6 Довољан услов (помоћу другог извода)

Теорема 4 Нека је $x = c$ стационарна тачка функције f која има непрекидан први извод у некој околини тачке c и нека постоји $f''(c)$.

1. Ако је $f''(c) > 0$, тада f у c има строги локални минимум.
2. Ако је $f''(c) < 0$, тада f у c има строги локални максимум.

Доказ. Применом Тејлорове формуле имамо да је

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2}(x - c)^2 + o((x - c)^2), \quad x \rightarrow c.$$

Ако је $o((x - c)^2) = \frac{\alpha(x)}{2}(x - c)^2$, где $\alpha(x) \rightarrow 0$ када $x \rightarrow c$, тада је

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{(x - c)^2}{2}(f''(c) + \alpha(x)).$$

1. Постоји околина тачке c у којој је $f''(c) + \alpha(x) > 0$. Како је $f'(c) = 0$, то је $f(x) > f(c)$, па је у $x = c$ строги локални минимум.

2. Постоји околина тачке c у којој је $f''(c) + \alpha(x) < 0$. Како је $f'(c) = 0$, то је $f(x) < f(c)$, па је у $x = c$ строги локални максимум.

7 Довољан услов (општи случај)

Функција f може имати строги локални екстремум у $x = c$ и ако је $f''(c) = 0$. На пример, функција $f : x \mapsto x^4$ има строги локални минимум у $x = 0$ иако је $f''(0) = 0$. У таквим случајевима се могу користити виши изводи.

Теорема 5 Нека је $(n - 1)$ -ви извод функције непрекидан у околини тачке $x = c$ и нека је

$$f'(c) = f''(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0, \quad f^{(n)}(c) \neq 0.$$

1. Ако је n паран број и ако је $f^{(n)}(c) > 0$, тада f у c има строги локални минимум.
2. Ако је n паран број и ако је $f^{(n)}(c) < 0$, тада f у c има строги локални максимум.
3. Ако је n непаран број, тада f у c нема строги локални екстремум.

Теорема се доказује слично као претходна коришћењем Тејлорове формуле са остатком у Пеановом облику.

Постоје и функције које имају строги локални екстремум у тачки у којој су сви изводи једнаки нули. На пример, $f(x) = e^{-1/x^2}$ за $x \neq 0$ и $f(0) = 0$.

КОВЕКСНОСТ И КОНКАВНОСТ

- Дефиниција
- Потребан и довољан услов за конвексност
- Тачка превоја криве $y = f(x)$

8 Дефиниција

Постоји више еквивалентних дефиниција конвексности функције. Овде се даје дефиниција конвексности за диференцијабилне функције.

Нека је дата функција $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ која је диференцијабилна на $(a, b) \subset A$ и нека је

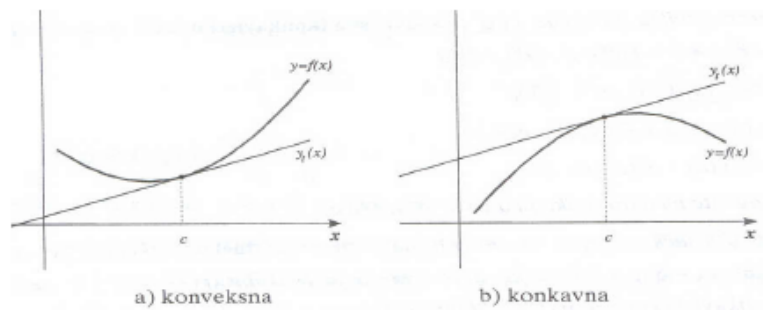
$$y_c(x) = f(c) + f'(c)(x - c)$$

тангента криве $y = f(x)$ у тачки $(c, f(c))$ за $c \in (a, b)$.

Дефиниција 3 Ако за свако $c \in (a, b)$ и свако $x \in (a, b) \setminus \{c\}$ важи

1. $f(x) > y_c(x)$, функција f је конвексна на (a, b) ,
2. $f(x) < y_c(x)$, функција f је конкавна на (a, b) .

Другим речима, у свакој тачки графика конвексне функције тангента је испод графика, док је код конкавне изнад графика.



У смислу ове дефиниције функција $-f$ је конкавна ако је f конвексна.

9 Потребан и довољан услов за конвексност

Уз додатну претпоставку да функција f на (a, b) има и други извод могу се једноставно дати потребни и довољни услови за конвексност, како помоћу првог тако и помоћу другог извода.

Теорема 6 Два пута диференцијабилна функција f је конвексна на (a, b) ако је $f''(x) > 0$ за свако $x \in (a, b)$.

Доказ. Нека је $c, x \in (a, b)$. На основу Тејлорове формуле имамо

$$\begin{aligned} f(x) &= f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - c)^2 \\ &= f_c(x) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - c)^2, \end{aligned}$$

где је ξ тачка између c и x . Како је $f''(\xi) > 0$, то је $f(x) > f_c(x)$, па је f конвексна на (a, b) .

Из ове теореме добијамо следећи довољан услов.

Теорема 7 Два пута диференцијабилна функција f је на (a, b) конвексна ако је функција f' растућа на (a, b) .

Аналогна тврђења важе за конкавне функције.

Теорема 8 Нека је функција f два пута диференцијабилна на (a, b) .

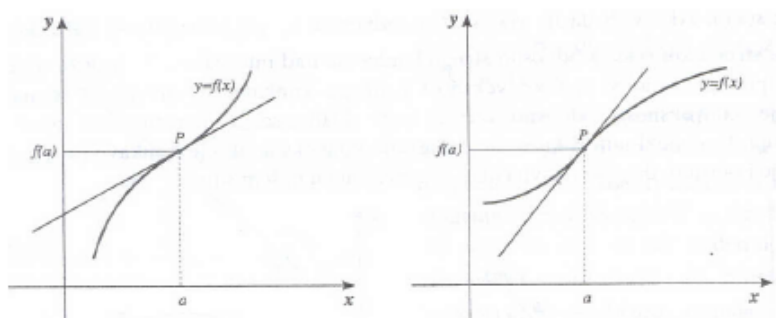
1. Функција f је конкавна ако је $f''(x) < 0$ за $x \in (a, b)$.
2. Функција f је конкавна ако је f' опадајућа функција на (a, b) .

10 Тачка превоја криве $y = f(x)$

Нека је функција f дефинисана у околини тачке a .

Дефиниција 4 Тачка $P(a, f(a))$ је тачка превоја криве $y = f(x)$ ако постоји околина тачке a у којој је функција строго конвексна за $x < a$ и строго конкавна за $x > a$ или обрнуто, строго конкавна за $x < a$ и строго конвексна за $x > a$.

Другим речима превојна тачка раздваја конвексни и конкавни део криве.



Ако је $(a, f(a))$ превојна тачка криве $y = f(x)$ и ако функција f има други извод који је непрекидан у тачки a , тада је $f''(a) = 0$. У противном би постојала околина тачке a у којој је други извод истог знака, па би функција у тој околини била или конвексна или конкавна.

Обрнуто не мора да важи. На пример, за функцију $f : x \mapsto x^4$ тачка $(0, 0)$ није превојна иако је $f''(0) = 0$. Дакле, тачке у којима је други извод једнак нули су само потенцијалне превојне тачке. Осим тога, превојне тачке могу бити и оне у којима други извод не постоји.

Један довољан услов за постојање превојне тачке даје следећа теорема.

Теорема 9 Нека функција f има други извод у некој околини тачке a , осим можда у самој тачки a . Ако $f''(x)$ мења знак у тачки a (без обзира да ли постоји $f''(a)$), тада је $(a, f(a))$ превојна тачка криве $y = f(x)$.

Доказ. Ако је (у околини тачке a) $f''(x) > 0$ за $x < a$ и $f''(x) < 0$ за $x > a$, тада је f конвексна за $x < a$ и конкавна за $x > a$, па је по дефиницији $(a, f(a))$ превојна тачка.

Слично је и у другом случају. ■

АСИМПТОТЕ

- Коса и хоризонтална асимптота функције (криве)
- Вертикална асимптота функције (криве)

11 Коса и хоризонтална асимптота функције (криве)

Нека је функција f дефинисана за $x > A$.

Дефиниција 5 Линеарна функција (права) $y = ax + b$ је асимптота функције f (криве $y = f(x)$) ако је

$$f(x) = ax + b + o(1), \quad x \rightarrow +\infty.$$

За $a \neq 0$ асимптота се назива косом, а за $a = 0$ хоризонталном.

Другим речима, график функције f (крива $y = f(x)$) се приближава асимптоти када $x \rightarrow +\infty$. Каже се и да се функција асимптотски понаша као $ax + b$ када $x \rightarrow +\infty$.

Теорема 10 Права $y = ax + b$ је асимптота криве $y = f(x)$ када $x \rightarrow +\infty$ ако и само ако је

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax).$$

Доказ. Услови у теорему су довољни јер из једнакости $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$ следи

$$f(x) - ax = b + o(1), \quad x \rightarrow +\infty$$

па је (према дефиницији) $ax + b$ асимптота за f .

Ако је $y = ax + b$ асимптота криве $y = f(x)$, тада је

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax - o(1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax),$$

а из

$$\frac{f(x)}{x} = a + \frac{b}{x} + \frac{o(x)}{x}, \quad x \rightarrow +\infty$$

следи

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a.$$

То значи да су услови у теорему и неопходни. ■

Аналогно се дефинише и одређује асимптота у случају $x \rightarrow -\infty$ за функцију која је дефинисана за $x < A$. Неке функције имају исту асимптоту за $x \rightarrow \infty$ и $x \rightarrow -\infty$, неке различите, а неке имају асимптоту за $x \rightarrow \infty$ и немају за $x \rightarrow -\infty$ или обрнуто, а постоје и оне функције које немају ниједну асимптоту.

12 Вертикална асимптота функције (криве)

Нека $f : A \rightarrow R$ и нека је a тачка нагомилавања скупа A .

Дефиниција 6 Права $x = a$ је вертикална асимптота функције f (криве $y = f(x)$) ако важи бар једна од следећих једнакости

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \infty.$$

Често је тачка a гранична тачка области дефинисаности функције. Међутим, функција може бити и дефинисана у тачки a . На пример, $f(x) = 1/x$ за $x \neq 0$ и $f(0) = 0$.