

Глава 3

Матрице и детерминанте

У многим проблемима и теоријске и примењене математике појављују се величине које могу да се опишу правоугаоном шемом бројева или елемената неког скупа. Теорија матрица омогућава једноставан рад и анализу таквих података, а детерминанте представљају једну специјалну функцију свих података из квадратне шеме.

3.1 Матрице - појам и основне операције

Матрице спадају међу кључне појмове у линеарној алгебри. У општем случају користе се за запис података који зависе од више параметара. Један од таквих примера је запис система линеарних једначина. Сви програмски језици подржавају рад са матрицама. Софтверски пакет за симболичка и нумеричка израчунавања MATLAB је концепцијски заснован на матрицама као базичним објектима.

Појам матрице

Нека је K неко поље (на пример, \mathbb{R} или \mathbb{C}) и нека $a_{ij} \in K$ за $i = 1, \dots, m$ и $j = 1, \dots, n$.

Дефиниција 3.1. *Правоугаона шема (таблица) A од $m \cdot n$ елемената a_{ij} распоређених у облику*

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}$$

је матрица типа $m \times n$ над пољем K . Ако је $K = \mathbb{R}$ матрица је реална, а ако је $K = \mathbb{C}$, матрица је комплексна. За a_{ij} кажемо да су елементи матрице. Пише се и $a_{ij} = (A)_{ij}$.

Матрице се означавају заградама (обичним или угластим) или вертикалним цртама,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или

$$A = \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right]$$

или

$$A = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right\|.$$

Краће ознаке за матрице су

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, \quad A = [a_{ij}]_{m \times n}, \quad A = \|a_{ij}\|_{m \times n}.$$

Елементи $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ чине i -ту врсту (ред), а елементи $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}$ чине j -ту колону (стубац) матрице A . Матрица типа $m \times n$ има m врста и n колона.

ПРИМЕР 3.1. Цена транспорта јединице производа из било које од три фабрике F_1, F_2 и F_3 до било ког од четири складишта S_1, S_2, S_3 и S_4 може прегледно да се представи матрицом типа 3×4 . На пример,

$$\begin{array}{c} S_1 \quad S_2 \quad S_3 \quad S_4 \\ \begin{pmatrix} F_1 & 13 & 12 & 16 & 15 \\ F_2 & 22 & 26 & 12 & 19 \\ F_3 & 17 & 16 & 15 & 11 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Специјални случајеви матрица имају посебна имена. Матрица чији су сви елементи једнаки нули назива се *нула матрица* и означава се $O_{m \times n}$ или само са O ако је јасно које су димензије те матрице. Матрица типа $1 \times n$ назива се *матрица врста*, а матрица типа $m \times 1$ назива се *матрица колона* или вектор. Ако је $m = n$, тј.

$$A = \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right],$$

матрица A је *квадратна матрица* реда n и краће се означава са $A = (a_{ij})_n$. Елементи $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ чине *главну дијагоналу*, а елементи $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$ *споредну дијагоналу* квадратне матрице A . Елементи главне дијагонале називају се *дијагоналним*. Њихов збир зове се *траг матрице* и означава се са $\text{tr} A$. Дакле,

$$\text{tr} A = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Дијагоналну матрицу формирану од елемената дијагонале матрице A означавамо са $\text{diag } A$. Квадратна матрица чији су сви елементи ван главне дијагонале једнаки нули, а бар један дијагонални је различит од нуле, назива се *дијагонална матрица*. Дијагонална матрица чији су сви дијагонални елементи међусобно једнаки зове се *скаларна матрица*. Од посебног интереса је скаларна матрица чији су сви дијагонални елементи једнаки јединици у пољу K . Таква матрица се назива *јединична матрица* и означава са I_n или E_n или само са I , односно E ако је јасно ког је реда. У општем случају пише се

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Ако је δ_{ij} Кронекеров симбол, дефинисан са

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (3.1)$$

тада је $E_n = I_n = [\delta_{ij}]_n$.

Постоје и друге врсте квадратних матрица као што су *горња троугаона* код које су сви елементи испод главне дијагонале једнаки нули и *доња троугаона* чији су сви елементи изнад главне дијагонале једнаки нули. Дакле, ако је

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

тада је A горња, а B доња троугаона матрица.

За елемент a_{ij} матрице A кажемо да је на месту (i, j) . За матрице истог типа елементи су *одговарајући* ако су на истом месту.

Дефиниција 3.2. Две матрице су једнаке ако су истог типа и ако су им одговарајући елементи једнаки.

Дефиниција 3.3. Подматрица или субматрица матрице A је матрица која се добија изостављањем неких врста и/или неких колона матрице A .

Матрица типа $m \times n$ има $\binom{m}{p} \cdot \binom{n}{q}$ подматрица типа $p \times q$ за $p \leq m$ и $q \leq n$.

Сабирање и одузимање матрица

Операције сабирања и одузимања матрица дефинишу се за матрице истог типа.

Дефиниција 3.4. Нека је $A = (a_{ij})_{m \times n}$ и $B = (b_{ij})_{m \times n}$. Збир матрица A и B је матрица $C = (c_{ij})_{m \times n}$, где је

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

за $i = 1, \dots, m$ и $j = 1, \dots, n$.

ПРИМЕР 3.2. Количине продатих артикала A_1, A_2 и A_3 на продајним местима P_1, P_2, P_3 и P_4 у једном дану дате су матрицом A , а у наредном дану матрицом B :

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 25 & 14 & 13 & 17 \\ 20 & 12 & 15 & 11 \\ 18 & 14 & 16 & 13 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad B = \begin{matrix} & \begin{matrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 21 & 17 & 14 & 16 \\ 19 & 16 & 14 & 12 \\ 23 & 18 & 10 & 15 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Количина продатих артикала у оба дана одговара матрици

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 46 & 31 & 27 & 33 \\ 39 & 28 & 29 & 23 \\ 41 & 32 & 26 & 28 \end{pmatrix}.$$

Из дефиниције сабирања матрица директно следи да у скупу S свих матрица типа $m \times n$ важе следећа својства:

1. $A + B = B + A$ (комутативност),
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (асоцијативност),
3. $A + O = O + A = A$,
4. $A + (-A) = (-A) + A = O$, где је $-A = (-a_{ij})$.

Теорема 3.1. *Ако је S скуп свих матрица истог типа, тада је структура $(S, +)$ Абелова група.*

Доказ. Збир две матрице је матрица истог типа, сабирање је асоцијативно и комутативно, нула матрица је неутрални елемент, а за матрицу $A \in S$ инверзни елемент је *супротна матрица* $-A$. Према томе, испуњени су сви услови за Абелову групу. ■

Егзистенција супротног елемента у односу на сабирање омогућава увођење операције одузимања матрица у скупу S .

Дефиниција 3.5. *Нека је $A = (a_{ij})_{m \times n}$ и $B = (b_{ij})_{m \times n}$. Разлика матрица A и B , у ознаци $A - B$, је матрица C дата са*

$$C = A + (-B).$$

Множење матрице скаларом

Елементе λ, μ, \dots поља K зовео *скалари*.

Дефиниција 3.6. *Производ матрице $A = (a_{ij})_{m \times n}$ и скалара λ је матрица $B = (b_{ij})_{m \times n}$, где је $b_{ij} = \lambda a_{ij}$ за $i = 1, \dots, m$ и $j = 1, \dots, n$.*

За производ скалара λ и матрице A користимо ознаку $\lambda \cdot A$ или λA . Очигледно да је $0 \cdot A = O$ и $(-1) \cdot A = -A$.

Теорема 3.2. *Ако су A и B матрице истог типа, а λ и μ скалари, тада важи:*

1. $1 \cdot A = A$,
2. $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$,
3. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$,
4. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.

Доказ. Све наведене особине непосредно произилазе из одговарајућих особина операција сабирања и множења у пољу K . ■

Множење матрица

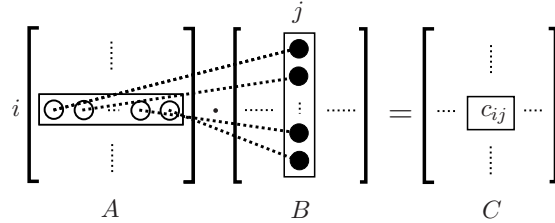
Производ матрица A и B дефинише се само ако су оне *сагласне*, односно ако је број колона матрице A једнак броју врста матрице B .

Дефиниција 3.7. *За сагласне матрице $A = (a_{ij})_{l \times m}$ и $B = (b_{ij})_{m \times n}$ производ $A \cdot B$ је матрица $C = (c_{ij})_{l \times n}$, где је*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}$$

за $i = 1, \dots, l$ и $j = 1, \dots, n$.

Елемент c_{ij} је збир производа елемената i -те врсте матрице A и одговарајућих елемената j -те колоне матрице B . Због тога се каже да је он добијен множењем i -те врсте матрице A са j -том колоном матрице B . На Слици 3.1 приказана је шема рачунања елемента c_{ij} .



Слика 3.1. $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{im}b_{mj}$

ПРИМЕР 3.3.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix},$$

где је

$$\begin{aligned} c_{11} &= 2 \cdot 4 + (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) = 7 \\ c_{12} &= 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 0 \cdot 1 = 1 \\ c_{21} &= 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) = 1 \\ c_{22} &= 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 6 \\ c_{31} &= 0 \cdot 4 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) = 4 \\ c_{32} &= 0 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 = 20. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 3.4. У складишту S_1 налази се 10 комада артикла A_1 , 7 комада артикла A_2 и 5 комада артикла A_3 , док складишта S_2 и S_3 садрже редом 6, 8 и 10, односно 4, 7 и 9 комада тих артикала. Ако је цена првог артикла 120 динара, другог 80, а трећег 180, колика је укупна вредност ускладиштених артикала у односу на свако складиште појединачно?

Решење. Стање залиха можемо приказати матрицом A , а цене артикала матрицом B , где је

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 5 \\ 6 & 8 & 10 \\ 4 & 7 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 120 \\ 80 \\ 180 \end{bmatrix}.$$

Укупна вредност ускладиштених производа по складиштима S_1 , S_2 и S_3 одређена је елементима матрице

$$C = AB = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 5 \\ 6 & 8 & 10 \\ 4 & 7 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 120 \\ 80 \\ 180 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2660 \\ 3160 \\ 2660 \end{bmatrix}.$$

Матрицу A типа $m \times n$ је могуће помножити матрицом B са леве и са десне стране само ако је B матрица типа $n \times m$. У том случају дефинисани су производи AB и BA . Ови производи су увек дефинисани за квадратне матрице истог типа.

ПРИМЕР 3.5. Ако је $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, тада је

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix},$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Претходни пример указује да операција множења матрица није комутативна. Уколико за неке матрице A и B важи $AB = BA$, тада кажемо да оне *комутирају*, односно да су *комутативне*.

Својства операције множења матрица дата су у наредној теореме.

Теорема 3.3. Ако је A матрица типа $m \times n$, тада уз претпоставку сагласности матрица важи:

1. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (асоцијативност),
2. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (дистрибутивност),
3. $A \cdot E_n = E_m \cdot A = A$.

Доказ. Доказ особине 1. дат је у Додатку, особина 2. једноставно следи из дистрибутивности множења у односу на сабирање реалних бројева, док особина 3. следи директно из дефиниције множења матрица. ■

Из ове теореме и својстава сабирања матрица следи тврђење.

Теорема 3.4. Скуп свих квадратних матрица истог реда са операцијама сабирања и множења матрица је прстен са јединицом.

Степен матрице

У скупу квадратних матрица дефинише се и степен матрице.

Дефиниција 3.8. Ако је A квадратна матрица, тада је

$$A^0 = E, \quad A^1 = A, \quad A^n = A^{n-1} \cdot A$$

за $n = 2, 3, \dots$

Теорема 3.5. *Ако је A квадратна матрица, а m и n природни бројеви, тада је*

1. $A^m \cdot A^n = A^{m+n}$,
2. $(A^m)^n = A^{mn}$.

Доказ. Доказ својства 1. се изводи методом математичке индукције по, на пример, n . Из дефиниције степена следи да је

$$A^m \cdot A^1 = A^m \cdot A = A^{m+1},$$

па тврђење важи за $n = 1$. Из претпоставке да тврђење важи за n , односно да је

$$A^m \cdot A^n = A^{m+n}$$

следи да је

$$\begin{aligned} A^m \cdot A^{n+1} &= A^m \cdot (A^n \cdot A) \\ &= (A^m \cdot A^n) \cdot A \\ &= A^{m+n} \cdot A \\ &= A^{m+n+1}, \end{aligned}$$

па тврђење важи и за $n + 1$. Слично се доказује и својство 2. ■

ПРИМЕР 3.6. *За матрицу $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ је $A^2 = O$, иако је $A \neq O$. Наравно, аналоган пример не постоји у скупу \mathbb{R} .*

ПРИМЕР 3.7. *Доказати да је $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, где је a реалан број, а n природан број.*

Решење. *За $n = 1$ тврђење је очигледно тачно. Из претпоставке да је тврђење тачно за неко $n \in \mathbb{N}$ следи*

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n \cdot \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & (n+1)a \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

што значи да је тачно и за $n + 1$. На основу принципа математичке индукције тврђење је тачно за свако $n \in \mathbb{N}$.

Транспоноване матрице

Операција транспонованја је пример унарне операције у скупу матрица.

Дефиниција 3.9. Матрицу A^T добијену из матрице A заменом врста одговарајућим колонама називамо транспонованом матрицом дате матрице A .

За $A = (a_{ij})_{m \times n}$ имамо да је $A^T = (a_{ji})_{n \times m}$.

Теорема 3.6. Операција транспонованја матрица има следећа својства:

1. $(A^T)^T = A$;
2. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$;
3. $(A + B)^T = A^T + B^T$;
4. $(AB)^T = B^T A^T$.

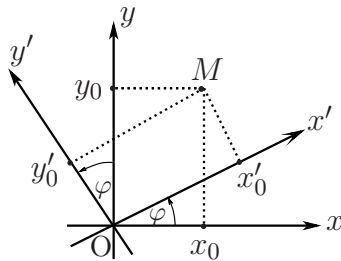
Доказ. Сва тврђења теореме следе из дефиниције транспоноване матрице и својстава одговарајућих операција. ■

У разним применама матричног рачуна сусрећу се квадратне матрице које имају посебна својства у односу на степеновање и транспоноване.

Дефиниција 3.10. Квадратна матрица A је симетрична ако је $A^T = A$, косиметрична ако је $A^T = -A$, ортогонална ако је $A^T A = E$, нилпотентна ако је $A^m = O$ за неко $m \in \mathbb{N}$, идемпотентна ако је $A^2 = A$, а инволутивна ако је $A^2 = E$.

ПРИМЕР 3.8. Матрица $A = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$ је ортогонална јер је $A^T A = E$.

Нека су x_0 и y_0 координате тачке M у правоуглом координатном систему xOy , а x'_0 и y'_0 координате те исте тачке у координатном систему $x'Oy'$ који је добијен ротацијом координатног система xOy за угао φ (Слика 3.2). Може се доказати да је $\begin{bmatrix} x'_0 \\ y'_0 \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$.



Слика 3.2. Ротација координатног система

3.2 Детерминанте

За дефинисање детерминанте произвољног реда користићемо појам пермутације скупа $\{1, 2, \dots, n\}$ који је уведен у Глави 2. Овде ћемо указати на још нека својства пермутација, будући да се на њима заснивају докази основних својстава детерминанти.

Пермутације скупа $\{1, 2, \dots, n\}$

Наредна дефиниција пермутације сагласна је појму пермутације који смо користили у Глави 2 (Одељак 2.4).

Дефиниција 3.11. *Пермутацијом σ скупа $S = \{1, 2, \dots, n\}$ називамо било коју уређену n -торку $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ у којој се сваки елемент скупа S појављује тачно једном.*

Нека је P_n скуп свих пермутација скупа $\{1, 2, \dots, n\}$, при чему је пермутација $(1, 2, \dots, n)$ основна и нека је $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ нека друга пермутација тог скупа.

Дефиниција 3.12. *Ако у пермутацији σ важи $\sigma_i > \sigma_j$ за $i < j$, онда елементи σ_i и σ_j образују једну инверзију.*

На пример, у пермутацији $(2, 3, 1)$ скупа $\{1, 2, 3\}$ елементи 2 и 1, као и елементи 3 и 1 чине инверзије. У пермутацији $(n, n-1, \dots, 1)$ скупа $\{1, 2, \dots, n\}$ свака два елемента су у инверзији.

Дефиниција 3.13. *Пермутација σ је парна ако је укупан број инверзија $\text{Inv}(\sigma)$ у њој паран, а непарна ако је $\text{Inv}(\sigma)$ непаран број.*

На пример, број инверзија у пермутацији $(3, 4, 1, 2)$ скупа $\{1, 2, 3, 4\}$ је $2 + 2$, па је она парна. Број инверзија у пермутацији $(n, n-1, \dots, 1)$ скупа $\{1, 2, \dots, n\}$ је

$$n-1 + n-2 + \dots + 1 = \frac{n(n-1)}{2},$$

па парност пермутације зависи од парности броја $n(n-1)/2$.

Теорема 3.7. *Ако у датој пермутацији два елемента замене места (изврше транспозицију), пермутација мења парност.*

Доказ. Ако два суседна елемента замене места, број инверзија се мења за 1 (умањује се за 1 ако су били, а увећава се за 1 ако нису били у инверзији), па се мења и парност.

Ако између елемената који мењају места има k других елемената, они могу да замене места са $2k+1$ транспозиција скупа $\{1, 2, \dots, n\}$. ■

Теорема 3.8. Нека је $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_n)$ дата пермутација скупа S и нека је $\sigma' = (\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n)$ пермутација скупа $S \setminus \{\sigma_i\}$ добијена из дате изостављањем елемента $\sigma_i = j$. Тада је

$$(-1)^{\text{Inv}(\sigma) + \text{Inv}(\sigma')} = (-1)^{i+j}.$$

Доказ. Ако је $\sigma'' = (\sigma_i, \sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n)$ пермутација добијена из пермутације σ тако што је елемент σ_i мењао места са сваким који му претходи, онда се број $\text{Inv}(\sigma)$ мењао $i-1$ пута. То значи да су бројеви $\text{Inv}(\sigma)$ и $\text{Inv}(\sigma'')$ исте парности ако је $i-1$ паран број и да су различите парности ако је $i-1$ непаран број. Према томе, важи

$$(-1)^{\text{Inv}(\sigma) + \text{Inv}(\sigma'')} = (-1)^{i-1}. \quad (3.2)$$

Ако сада у пермутацији σ'' изоставимо први члан, добијамо пермутацију σ' за коју је

$$\text{Inv}(\sigma') = \text{Inv}(\sigma'') - j + 1 \quad (3.3)$$

(број инверзија се умањило за онолико колико има бројева мањих од j , односно за $j-1$). Из једнакости (3.2) и (3.3), имајући у виду да је $(-1)^{i-j} = (-1)^{i+j}$, добијамо тврђење теореме. ■

Тврђење наредне теореме односи се на инверзне пермутације (видети Одељак 2.4 на страни 19).

Теорема 3.9. Међусобно инверзне пермутације имају једнак број инверзија.

Доказ ове теореме се може наћи у [15].

Појам детерминанте

Нека је M_n скуп свих квадратних матрица реда n са елементима из скупа \mathbb{R} .

Дефиниција 3.14. Пресликавање $\det : M_n \rightarrow \mathbb{R}$ дато са

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in P_n} (-1)^{\text{Inv}(\sigma)} a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \cdots a_{n\sigma_n}, \quad (3.4)$$

где је $A = (a_{ij})_n \in M_n$, назива се детерминанта. Слика матрице A при том пресликавању је детерминанта матрице A и означава се са $\det(A)$ или са $|A|$.

Детерминанту квадратне матрице реда n називамо детерминантом n -ог реда и записујемо са

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Појмови *елемент, врсте, колоне, дијагонала детерминанте* дефинишу се исто као за квадратну матрицу A . Матрица A је *регуларна* ако је $|A| \neq 0$, а у противном је *сингуларна*.

Непосредно из дефиниције детерминанте следе изрази за рачунање детерминанти првог и другог реда. За матрицу A првог реда имамо да је $|A| = |a_{11}| = a_{11}$. Ако је матрица A другог реда, онда у једнакости (3.4) збир на десној страни има два сабирка (постоје само две пермутације скупа $\{1, 2\}$), па је

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

У случају матрице A трећег реда имамо збир од шест сабирака јер толико има пермутација скупа $\{1, 2, 3\}$. Водећи рачуна о броју инверзија у свакој од тих пермутација, из једнакости (3.4) добијамо да је

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

ПРИМЕР 3.9.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 4 + 36 - 6 - 4 - 1 = 15.$$

Сабирци у изразу за детерминанту трећег реда могу се добити и помоћу *Сарусовог правила*. Оно се састоји у следећем. Детерминанти се са десне стране допишу њене прве две колоне.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Затим се израчунају производи елемената на главној дијагонали и две дијагонале њој паралелне. Такође се израчунају и производи елемената на споредној дијагонали и њој паралелне две дијагонале, али са предзнаком минус. Вредност детерминанте једнака је збиру израчунатих производа. Применом Сарусовог правила за детерминанту из Примера 3.9 добијамо исти резултат (сабирци су у другом редоследу)

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -6 - 6 - 4 - 1 - 4 + 36 = 15.$$

Према Дефиницији 3.14 $\det(A)$ је збир од $n!$ сабирака, при чему сваки сабирак садржи производ n елемената детерминанте (из сваке врсте и сваке колоне тачно по један). Сабирак $a_{1\sigma_1}a_{2\sigma_2} \cdots a_{n\sigma_n}$ можемо

преуредити у облик $a_{\tau_1 1} a_{\tau_2 2} \cdots a_{\tau_n n}$ (комутативност множења). При томе је пермутација τ инверзна пермутацији σ , па је $\text{Inv}(\tau) = \text{Inv}(\sigma)$. Према томе, важи

$$|A| = \sum_{\tau \in P_n} (-1)^{\text{Inv}(\tau)} a_{\tau_1 1} a_{\tau_2 2} \cdots a_{\tau_n n}.$$

Основна својства детерминанти

Теорема 3.10. *Вредност детерминанте се не мења транспоновањем матрице, $|A^T| = |A|$.*

Доказ. За $A = (a_{ij})$ и $A^T = (b_{ij})$ је $b_{ij} = a_{ji}$, па је

$$\begin{aligned} |A^T| &= \sum_{\tau \in P_n} (-1)^{\text{Inv}(\tau)} b_{\tau_1 1} b_{\tau_2 2} \cdots b_{\tau_n n} \\ &= \sum_{\tau \in P_n} (-1)^{\text{Inv}(\tau)} a_{1\tau_1} a_{2\tau_2} \cdots a_{n\tau_n} \\ &= |A|. \blacksquare \end{aligned}$$

Према томе, све што важи за врсте, важи и за колоне детерминанте. Због тога су наредна својства исказана само за врсте.

Теорема 3.11. *Ако се једна врста матрице A помножи бројем λ , добија се матрица B за коју је $|B| = \lambda|A|$.*

Доказ. Ако је i -та врста помножена са λ , тада је

$$\begin{aligned} |B| &= \sum_{\sigma \in P_n} (-1)^{\text{Inv}(\sigma)} a_{1\sigma_1} \cdots (\lambda a_{i\sigma_i}) \cdots a_{n\sigma_n} \\ &= \lambda |A|. \blacksquare \end{aligned}$$

Претходно својство може да се запише као

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Специјално, ако су сви елементи i -те врсте једнаки нули, вредност детерминанте је такође једнака нули.

Теорема 3.12. *Ако у детерминанти две врсте замене места, детерминанта мења знак задржавајући апсолутну вредност.*

Доказ. Нека је B матрица добијена заменом i -те и j -те врсте матрице A . У сваком сабирку за $|B|$ елементи $a_{i\sigma_i}$ и $a_{j\sigma_j}$ су заменили места, што значи да број инверзија мења парност. Према томе, сви сабирци су променили знак, па је $|B| = -|A|$. ■

Теорема 3.13. *Ако су елементи i -те врсте матрице A дати у облику збира*

$$a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

и ако су A' и A'' матрице које се добијају из A тако што се у i -тој врсти елементи a_{ij} замене редом са a'_{ij} и a''_{ij} , тада је

$$|A| = |A'| + |A''|.$$

Доказ. На основу дефиниције детерминанте је

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{\sigma \in P_n} (-1)^{\text{Inv}(\sigma)} a_{1\sigma_1} \cdots (a'_{i\sigma_i} + a''_{i\sigma_i}) \cdots a_{n\sigma_n} \\ &= \sum_{\sigma \in P_n} (-1)^{\text{Inv}(\sigma)} a_{1\sigma_1} \cdots a'_{i\sigma_i} \cdots a_{n\sigma_n} + \\ &\quad \sum_{\sigma \in P_n} (-1)^{\text{Inv}(\sigma)} a_{1\sigma_1} \cdots a''_{i\sigma_i} \cdots a_{n\sigma_n} \\ &= |A'| + |A''|. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Последице ових тврђења су и следећа својства.

Теорема 3.14. *Вредност детерминанте матрице A једнака је нули ако:*

1. *матрица има две једнаке врсте;*
2. *матрица има две пропорционалне врсте;*
3. *једна врста матрице је линеарна комбинација осталих врста.*

Доказ. 1. Заменом истих врста добијамо једнакост $|A| = -|A|$ из које следи $|A| = 0$.

2. Ако је λ коефицијент пропорционалности две врсте матрице A , онда је $|A| = \lambda|B|$, где матрица B има две исте врсте. Обзиром да је $|B| = 0$, то је и $|A| = 0$.

3. Нека је, одређености ради, у матрици A прва врста линеарна комбинација осталих,

$$a_{11} = \sum_{k=2}^n \lambda_k a_{k1}, \quad a_{12} = \sum_{k=2}^n \lambda_k a_{k2}, \quad \dots, \quad a_{1n} = \sum_{k=2}^n \lambda_k a_{kn}.$$

Тада је

$$|A| = \lambda_2 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{vmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Како свака од детерминанти у последњем збиру има по две једнаке врсте, то је $|A| = 0$. ■

Теорема 3.15. Вредност детерминанте матрице A се не мења ако се некој врсти матрице дода линеарна комбинација осталих врста.

Доказ. Нека је, на пример, првој врсти матрице A додата линеарна комбинација осталих врста и нека је тако добијена матрица B . Тада је

$$\begin{aligned} |B| &= \begin{vmatrix} a_{11} + \sum_{k=2}^n \lambda_k a_{k1} & a_{12} + \sum_{k=2}^n \lambda_k a_{k2} & \dots & a_{1n} + \sum_{k=2}^n \lambda_k a_{kn} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= |A| + \begin{vmatrix} \sum_{k=2}^n \lambda_k a_{k1} & \sum_{k=2}^n \lambda_k a_{k2} & \dots & \sum_{k=2}^n \lambda_k a_{kn} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Како је, према претходном својству, друга детерминанта у овом збиру једнака нули, то је $|B| = |A|$. ■

Следећа теорема даје још једно важно својство детерминанти.

Теорема 3.16. Ако су A и B квадратне матрице истог реда, тада је

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|.$$

Доказ ове теореме може се наћи у [13].

Разлагање детерминанте

Нека је $A = (a_{ij})$ квадратна матрица реда n .

Дефиниција 3.15. Минор M_{ij} елемента a_{ij} матрице A је детерминанта матрице која се добија изостављањем i -те врсте и j -те колоне матрице A . Кофактор или алгебарски комплемент A_{ij} елемента a_{ij} матрице A је број A_{ij} дат са

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Сагласно дефиницији детерминанте је

$$\begin{aligned}
 M_{ij} &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
 &= \sum_{\sigma' \in P_{n-1}} (-1)^{\text{Inv}(\sigma')} a_{1\sigma'_1} \cdots a_{i-1\sigma'_{i-1}} a_{i+1\sigma'_{i+1}} \cdots a_{n\sigma'_n},
 \end{aligned}$$

где је P_{n-1} скуп свих пермутација скупа $\{1, \dots, j-1, j+1, \dots, n\}$.

Помоћу минора, односно кофактора, рачунање детерминанте n -тог реда може се свести на рачунање n детерминанти $(n-1)$ -вог реда.

Теорема 3.17 (Лапласов развој детерминанте). *За свако $i = 1, 2, \dots, n$ важи*

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij}. \quad (3.5)$$

За доказ теореме видети Додатак.

Формулом (3.5) дат је развој детерминанте по i -тој врсти. Потпуно аналогно може се добити развој детерминанте по j -тој колони,

$$|A| = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij} \quad (3.6)$$

за било које $j = 1, 2, \dots, n$.

ПРИМЕР 3.10.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3 + 12 - 9 = 0.$$

У претходном примеру је развојем по првој врсти рачунање детерминанте трећег реда сведено на рачунање три детерминанте другог реда. Јасно је да је избор врсте (колоне) по којој се развија детерминанта ирелевантан (за саму вредност детерминанте). Ипак, избором врсте (колоне) која садржи извештајан број нула, у развоју детерминанте избегава се рачунање неких детерминанти нижег реда.

ПРИМЕР 3.11.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & -2 \\ 6 & 0 & 9 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -2 \\ 6 & 9 & 3 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 6 & 9 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 15 + 1 \cdot 12 = 57.$$

Коришћењем Лапласовог развоја и особина детерминанти, рачунање детерминанте n -тог реда може се свести на рачунање једне детерминанте $(n-1)$ -вог реда. На пример, ако се у претходном примеру елементима друге, треће и четврте врсте детерминанте додају одговарајући елементи прве врсте претходно помножени редом са -2 , -3 и -6 , а затим се детерминанта развије по првој колони, добија се

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & -2 \\ 6 & 0 & 9 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 57.$$

Овај поступак је нарочито погодан за рачунање детерминанти вишег реда. За рачунање детерминанти трећег реда може се користити и Сарусово правило.

У Лапласовом развоју детерминанте сваки елемент a_{ij} помножен је кофактором A_{ij} . У применама детерминанти од интереса су и изрази у којима је кофактор A_{ij} замењен кофактором одговарајућег елемента неке друге врсте (колоне). О томе говори наредна теорема.

Теорема 3.18. *Збир производа елемената неке врсте детерминанте $D = \det(A)$ и кофактора одговарајућих елемената неке друге врсте једнак је нули,*

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} = 0, \quad k \neq i.$$

Доказ. Нека је D_1 детерминанта добијена из детерминанте D заменом k -те врсте ($k \neq i$) елементима c_1, c_2, \dots, c_n ,

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Тада је $D_1 = \sum_{j=1}^n c_j A_{kj}$ јер су кофактори елемената k -те врсте детерминанти D и D_1 једнаки. Специјално, ако је $c_j = a_{ij}$ за $j = 1, \dots, n$, детерминанта D_1 имаће једнаке две врсте, што значи да је њена вредност једнака нули. ■

Јасно је да аналогна особина важи и за колоне,

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ik} = 0, \quad k \neq j.$$

Резултати Теореме 3.17 и Теореме 3.18 могу се, на пример за врсте детерминанти, објединити у облику

$$a_{i1} A_{k1} + a_{i2} A_{k2} + \cdots + a_{in} A_{kn} = \begin{cases} D, & k = i \\ 0, & k \neq i \end{cases},$$

односно

$$a_{i1} A_{k1} + a_{i2} A_{k2} + \cdots + a_{in} A_{kn} = \delta_{ik} D$$

или краће

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = \delta_{ij} |A|,$$

где је δ_{ik} Кронекеров симбол (видети (3.1)).

Напоменимо да постоје и алтернативни приступи дефинисању појма детерминанте. На пример, у [16] детерминанта се дефинише рекурзивно помоћу Лапласовог развоја по првој врсти. За матрицу $A = (a_{ij})$ реда $n = 1$ је $\det(A) = a_{11}$, док је за $n > 1$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{1j} A_{1j},$$

при чему је $A_{1j} = (-1)^{1+j} \det(K_{1j})$, где је K_{1j} квадратна матрица реда $n - 1$ која се добије изостављањем прве врсте и j -те колоне матрице A .

3.3 Инверзна матрица

Пре дефиниције инверзне матрице дајемо дефиницију адјунговане матрице.

Адјунгована матрица

Нека је A квадратна матрица и нека су A_{ij} њени кофактори.

Дефиниција 3.16. Матрица $\text{cof } A = (A_{ij})$ се назива кофактор матрице A , а матрица $\text{adj } A$ дефинисана са

$$\text{adj } A = (\text{cof } A)^T$$

назива се адјунгована матрица матрице A .

Према томе,

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Теорема 3.19. *Ако је A квадратна матрица реда n , тада је*

$$A \cdot (\operatorname{adj} A) = (\operatorname{adj} A) \cdot A = |A|E. \quad (3.7)$$

Доказ. Ако је $C = A \cdot (\operatorname{adj} A)$ и $C = (c_{ij})_n$, тада из

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = |A| \delta_{ij}$$

слиди да је $C = |A|E$. Слично је и за другу једнакост. ■

Дефиниција инверзне матрице

За квадратне матрице се уводи појам инверзне матрице.

Дефиниција 3.17. *Ако за квадратну матрицу A постоји матрица X таква да је*

$$AX = XA = E,$$

за матрицу X кажемо да је инверзна матрица матрице A . Уобичајена ознака за инверзну матрицу је A^{-1} .

Из Дефиниције 3.17 и Теореме 3.16 слиди да је $|A||A^{-1}| = 1$, што значи да је $|A| \neq 0$, $|A^{-1}| \neq 0$ и $|A^{-1}| = 1/|A|$. Према томе, матрица која има инверзну је регуларна. Дакле, регуларност матрице је потребан услов за постојање њене инверзне матрице. Следеће тврђење показује да је тај услов и довољан.

Теорема 3.20. *Регуларна матрица има јединствену инверзну матрицу, при чему је*

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{adj} A}{|A|}.$$

Доказ. Из једнакости (Теорема 3.19)

$$A \cdot (\operatorname{adj} A) = (\operatorname{adj} A) \cdot A = |A|E$$

слиди

$$A \cdot \frac{\operatorname{adj} A}{|A|} = \frac{\operatorname{adj} A}{|A|} \cdot A = E,$$

што значи да је у дефиницији инверзне матрице

$$X = \frac{\text{adj } A}{|A|}.$$

Ако претпоставимо да постоје две инверзне матрице, X и Y , тада из једнакости $AX = E$ и $YA = E$ следи да је $YAX = Y$ и $YAX = X$, па је $X = Y$. ■

ПРИМЕР 3.12. Нека је

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Тада је $|A| = -1 \neq 0$,

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = 8 & A_{12} &= -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5 & A_{13} &= \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -1 \\ A_{21} &= -\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -29 & A_{22} &= \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -18 & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 3 \\ A_{31} &= \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 11 & A_{12} &= -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 & A_{13} &= \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1. \end{aligned}$$

Према томе,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj } A = \begin{bmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Својства инверзне матрице

Теорема 3.21. Ако су A и B регуларне матрице, тада је:

1. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$;
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
3. $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ за $n \in \mathbb{N}$.

Доказ. 1. Следи из $(AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T$ и $AA^{-1} = E$.

2. $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AE A^{-1} = AA^{-1} = E$. Слично је и $(B^{-1}A^{-1})(AB) = E$.

3. Следи из 2. ■

За регуларну матрицу A може да се дефинише и степен A^{-n} за природан број n на следећи начин:

$$A^{-n} = (A^{-1})^n.$$

Матричне једначине

Једначине у којима се у улози непознате појављују матрице називају се *матричне једначине*. Овде ће бити разматрана два основна типа матричних једначина, $AX = B$ и $XA = B$, где су A и B дате, а X непозната матрица.

Ако је A регуларна матрица, онда је

$$X = A^{-1}B$$

решење матричне једначине типа $AX = B$. Заиста,

$$AX = A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = EB = B.$$

На сличан начин може се проверити да је $X = BA^{-1}$ решење матричне једначине $XA = B$.

ПРИМЕР 3.13. Дата је матрична једначина $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$. Овде је

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решење дате матричне једначине је

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Напоменимо да се решавање матричне једначине облика $XA = B$ може свести на решавање једначине облика $AX = B$. Наиме, једначина $XA = B$ је еквивалентна 'транспонованој' једначини

$$A^T Y = B^T,$$

где је $Y = X^T$. Такође, неки сложенији типови матричних једначина се могу свести на једначине облика $AX = B$ или $XA = B$.

ПРИМЕР 3.14. Дата је матрична једначина $XA - 2B = 2XC + D$, где је

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 6 & 9 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 10 & 6 & -5 \\ 13 & 7 & -2 \\ 9 & 13 & -7 \end{bmatrix}.$$

Дата једначина еквивалентна је једначини $X \cdot (A - 2C) = 2B + D$ (али не и једначини $(A - 2C) \cdot X = 2B + D$), одакле се добија

$$X = (2B + D) \cdot (A - 2C)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Овај резултат се може проверити следећом MATLAB процедуром.

```
>> A = [4 1 4; 1 -2 1; 6 9 5]; B = [2 1 -1; 1 1 -3; 2 -3 -1];
>> C = [1 0 3; -1 -2 1; 2 4 3]; D = [10 6 -5; 13 7 -2; 9 13 -7];
>> E = 2*B + D; F = A - 2*C;
>> X = E*inv(F);
```

3.4 Ранг матрице

Појам ранга

Нека је дата матрица $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

Дефиниција 3.18. Минор реда r матрице A је детерминанта неке њене подматрице реда r .

Другим речима, минор реда r матрице A је детерминанта која садржи оне елементе матрице A који се налазе у пресеку произвољно одабраних r врста и r колона, са очувањем поретка тих врста, односно колона. Ако су индекси одабраних врста i_1, \dots, i_r ($i_1 < \dots < i_r$), а колона j_1, \dots, j_r ($j_1 < \dots < j_r$), онда тај минор означавамо са $M_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_r}$. На пример, за матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

је

$$M_{1,3}^{2,4} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}, \quad M_{2,3,4}^{1,2,3} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 5 & 1 & -1 \\ 7 & 7 & 9 \end{vmatrix}, \quad M_{1,2,3,4}^{1,2,3,4} = |A|.$$

Скуп свих минора дате матрице састоји се од два дисјунктна подскупа - минора који су једнаки нули и минора који су различити од нуле.

Дефиниција 3.19. Број r је ранг матрице $A \neq O$ ако међу минорима различитим од нуле постоји минор реда r , док су сви минори реда већег од r (ако постоје) једнаки нули. Ранг нула матрице је нула.

Ранг матрице A означавамо са $r(A)$ или $r A$. Јасно је да је $r(A) \leq \min\{m, n\}$ за матрицу A типа $m \times n$.

Ако је $r(A) = r$, тада постоји минор реда r који је различит од нуле, а може постојати и више таквих минора. Сваки минор реда r дате матрице који је различит од нуле је *базисни минор*, а врсте и колоне матрице A које он одређује су *базисне врсте* и *базисне колоне*.

У претходном примеру је $r(A) = 3$ јер је $|A| = 0$, док је

$$M_{2,3,4}^{1,2,3} = 21 \neq 0.$$

Одређивање ранга матрице на основу дефиниције може бити захтеван посао, посебно када су у питању матрице већих димензија. Тако су свих пет минора четвртог реда матрице

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

једнаки нули. То значи да је $r(A) \leq 3$. За одређивање ранга матрице A је неопходно, поред рачунања тих пет детерминанти четвртог реда, израчунати и бар једну детерминанту трећег реда. Обзиром да је

$$M_{1,2,3}^{12,3} = 1 \neq 0,$$

то је $r(A) = 3$.

Елементарне трансформације матрица

У циљу превазилажења наведених проблема при израчунавању ранга матрице, дефинисаћемо елементарне трансформације матрица.

Дефиниција 3.20. *Елементарне трансформације матрице су:*

1. замена места две врсте (колоне);
2. множење једне врсте (колоне) бројем различитим од нуле;
3. додавање неке врсте (колоне) другој врсти (колони).

Замену i -те и k -те врсте означаћемо са $(i) \leftrightarrow (k)$, множење i -те врсте бројем $\lambda \neq 0$ означаћемо са $(i) \rightarrow \lambda \cdot (i)$, а додавање i -тој врсти k -те врсте претходно помножене бројем λ означаћемо са $(i) \rightarrow (i) + \lambda \cdot (k)$.

Теорема 3.22. *Елементарне трансформације не мењају ранг матрице.*

Доказ теореме може се наћи у [7].

За матрице A и B које имају исти ранг кажемо да су *еквивалентне* и пишемо $A \sim B$. Елементарном трансформацијом се матрица A трансформише у матрицу $A' \sim A$. Ознаке за елементарне трансформације записиваћемо изнад знака \sim ако се односе на врсте, а испод тог знака ако се односе на колоне матрице. Узастопним применама елементарних трансформација дата матрица A се може трансформисати у матрицу A' која има такозвану *степенасту форму*, погодну за непосредно одређивање ранга матрице.

ПРИМЕР 3.15.

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[(1) \leftrightarrow (2)]{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[(4) \rightarrow (4) - 4 \cdot (1)]{(2) \rightarrow (2) - 2 \cdot (1)} \\
 &\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[(2) \leftrightarrow (3)]{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3) \rightarrow (3) + (2)} \\
 &\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[(4) \leftrightarrow (4) - (3)]{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A'
 \end{aligned}$$

Сви минори четвртог реда матрице A' су очигледно једнаки нули, док је минор трећег реда $M_{1,2,3}^{1,2,3} = 1 \neq 0$ (једнак је производу својих дијагоналних елемената). Дакле, $r(A') = r(A) = 3$.

Из Теореме 3.22 следи да две матрице истог типа имају исти ранг ако се могу еквивалентним трансформацијама свести једна на другу. Међутим, важи и обротно. Ако две матрице истог типа имају исти ранг, онда се применом елементарних трансформација на једну од њих може добити друга. Осим тога, ако је ранг матрице једнак r , онда се она еквивалентним трансформацијама може свести на облик у којем је базни минор дијагонала, а сви остали елементи су нуле.

У наредној теореме наведена је још једна трансформација којом се не мења ранг матрице. Доказ теореме је илустрација једноставности и досетљивости у математичком закључивању.

Теорема 3.23. *Транспонованом матрице не мења се њен ранг.*

Доказ. Нека је $r(A) = r$. Докажимо прво да је $r(A) \leq r(A^T)$. Заиста, ако је $M_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_r}$ минор реда r матрице A различит од нуле, онда је $N_{j_1, \dots, j_r}^{i_1, \dots, i_r}$ минор реда r матрице A^T и такође је различит од нуле (настао је

транспонованем минора $M_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_r}$. Дакле, $r = r(A) \leq r(A^T)$. Из истих разлога је и $r(A^T) \leq r(A^T)^T = r(A) = r$. Из $r \leq r(A^T) \leq r$ следи да је $r(A^T) = r$.

3.5 Питања и задаци за проверу знања

Појмови. У овој глави су дефинисани појмови: матрица типа $m \times n$, елемент матрице, врста матрице, колона матрице, нула матрица, дијагонала матрице, траг матрице, јединична матрица, горња троугаона матрица, доња троугаона матрица, подматрица, збир две матрице, множење матрице скаларом, множење две матрице, транспонована матрица, симетрична матрица, ортогонална матрица, пермутација скупа $S = \{1, 2, \dots, n\}$, парна пермутација скупа S , непарна пермутација скупа S , детерминанта матрице, минор матрице, кофактор матрице, Лапласов развој детерминанте, адјунгована матрица, инверзна матрица, регуларна матрица, сингуларна матрица, матрична једначина, ранг матрице, базисни минор матрице, базисне врсте (колоне) матрице, елементарне трансформације матрице.

1. Дефинишите или објасните сваки од наведених појмова и за сваки од њих смислите бар по један пример.

Сабирање и множење матрица. У 3.1 дефинисане су операције сабирања матрица, множења матрице скаларом, множења матрице сагласном матрицом и транспоновања матрице. Док за сабирање матрица важи комутативност, за множење матрица не важи, а асоцијативност важи за обе операције.

2. Израчунати $2A + 3B$ ако је

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Израчунати

$$(1) \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}; \quad (2) \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

4. Нека је

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Израчунати

$$(1) A^T AB; \quad (2) (AC)^T A; \quad (3) A(B + B^T); \quad (4) C^T BA^T + 2C^T A^T.$$

5. Израчунати

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3.$$

6. За $n \in \mathbb{N}$ израчунати

$$(1) \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^n; \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n.$$

7. Израчунати $f(A)$ ако је $f(X) = X^3 - 3X + E$, где је E јединична матрица и где је $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$.

8. Одредити све матрице X другог реда за које је

$$(1) X^2 = O, \quad (2) X^2 = E, \quad (3) X^3 = X, \quad (4) X^T X = -E.$$

9. Навести примере ненултих квадратних матрица A и B трећег реда за које је $AB = O$.

10. Израчунати $AB - BA$ ако је

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

11. Одредити све матрице комутативне датој матрици A

$$(1) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; \quad (2) A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

12. Доказати да је $AB = BA$ ако је

$$(1) (A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2; \quad (2) (A + B)(A - B) = A^2 - B^2.$$

Израчунавање детерминанти. Израчунавање детерминанте на основу дефиниције је компликовано за детерминанте вишег реда. Због тога су наведена и доказана разна својства детерминанти која дају могућност за њихово једноставније израчунавање. Једно од најважнијих својстава чине Лапласове формуле за развој детерминанте по некој врсти или колони.

13. Одредити парност пермутације

- (1) $(1, 4, 3, 2, 5, 6)$ скупа $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
 (2) $(2n - 1, 2n, \dots, 3, 4, 1, 2)$ скупа $\{1, 2, \dots, n\}$.

14. Израчунати детерминанту дате матрице

$$(1) \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}; \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

15. Доказати да су решења једначине

$$\begin{vmatrix} a - x & c + di \\ c - di & b - x \end{vmatrix} = 0$$

реална ако су a, b, d реални бројеви и ако је i имагинарна јединица.

16. Нацртати график функције $x \mapsto f(x)$ ако је

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \end{vmatrix}, \quad a \neq b.$$

17. Користећи Лапласов развој доказати да је

$$\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = abcd.$$

18. Доказати да је

$$(1) \begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1 - b_1x & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2 - b_2x & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3 - b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x + b_1y + c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x + b_2y + c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x + b_3y + c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

19. Коришћењем особина детерминанти израчунати

$$(1) \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}; \quad (2) \begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix}; \quad (3) \begin{vmatrix} 0 & b & c & d \\ b & 0 & d & c \\ c & d & 0 & b \\ d & c & b & 0 \end{vmatrix}.$$

20. Израчунати вредност дате детерминанте n -тог реда

$$(1) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 3 \end{vmatrix}; \quad (2) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Инверзна матрица. У 3.3 је за квадратну матрицу дефинисана инверзна матрица, доказано је да свака регуларна матрица има јединствену инверзну матрицу и дата су и нека својства инверзне матрице. Користећи та својства, као и својства основних операција са матрицама, могу се решавати неке једноставније матричне једначине.

21. Испитати да ли за дате матрице постоје инверзне и ако постоје, одредити их

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}; \quad (2) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad (3) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 4 \end{bmatrix}; \quad (4) \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

22. Одредити све вредности $a \in \mathbb{R}$ за које дата матрица има инверзну

$$(1) \begin{bmatrix} 4+a & -1 \\ 3 & -1+a \end{bmatrix}; \quad (2) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a \\ 4 & 9 & a^2 \end{bmatrix}.$$

23. Нека је A регуларна матрица. Шта се може рећи о облику матрице A^{-1} и о њеним елементима ако је A : (1) дијагонална, (2) симетрична, (3) троугаона матрица? Навести примере.

24. Доказати да матрична једначина $XA = B$, са несингуларном матрицом A , има јединствено решење.

25. Решити дату матричну једначину

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{bmatrix};$$

$$(2) X \cdot \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{bmatrix};$$

$$(3) \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}.$$

26. Решити дату матричну једначину по непознатој матрици X

$$(1) A^T(X - B^{-1})A^{-1} = (AB)^{-2};$$

$$(2) BA(3X + 2B^T)^{-1}A^{-1} = AB^{-1}A.$$

27. За дате матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$$

решити матричну једначину

$$(1) 2AX + 4B - 3BX = DC,$$

$$(2) ABXC = D.$$

28. Показати да је матрица $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ решење матричне једначине $A^2 - 8A + 7E = O$ и на основу тога израчунати A^{-1} .

29. Ако је матрица A решење матричне једначине $A^3 - A^2 + A + E = O$, доказати да је A несингуларна матрица. Израчунати затим A^{-1} помоћу матричног полинома другог степена матрице A .

Ранг матрице. У 3.4 је дефинисан ранг матрице. Применом елементарних трансформација (које не мењају ранг матрице) дата матрица може да се трансформише у степенасту форму из које се једноставно одређује њен ранг.

30. Одредити ранг дате матрице

$$(1) \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix}; \quad (2) \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & 5 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}; \quad (3) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

31. Одредити ранг дате матрице у зависности од вредности реалног параметра a

$$(1) \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 2a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}; \quad (2) \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ a & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}; \quad (3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & -1 \\ 1 & a & a-1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & a^2 \end{bmatrix}.$$

32. Ако су A и B матрице истог реда, тада је $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$. Навести примере матрица A и B за које је

$$(1) r(A+B) = r(A) + r(B); \quad (2) r(A+B) < r(A) + r(B).$$

33. Ако су A и B сагласне матрице, тада је $r(AB) \leq \max\{r(A), r(B)\}$. Навести примере матрица A и B за које је

$$(1) r(AB) = \max\{r(A), r(B)\}; \quad (2) r(AB) < \max\{r(A), r(B)\}.$$

3.6 Додатак

Доказ тврђења 1. из Теореме 3.3

ДОКАЗ. Нека су $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ и $C = (c_{ij})$ матрице редом типа $m \times n$, $n \times p$ и $p \times q$. Приметимо, најпре, да су тада сви производи AB , $(AB)C$, BC , $A(BC)$ дефинисани и да су матрице $(AB)C$ и $A(BC)$ обе типа $m \times q$ (ради једноставнијег записа, овде уместо $A \cdot B$ пишемо AB). На основу дефиниције множења матрица имамо

$$\begin{aligned} ((AB)C)_{ij} &= \sum_{k=1}^p (AB)_{ik} c_{kj} = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{r=1}^n a_{ir} b_{rk} \right) c_{kj} = \sum_{k=1}^p \sum_{r=1}^n (a_{ir} b_{rk}) c_{kj} \\ (A(BC))_{ij} &= \sum_{r=1}^n a_{ir} (BC)_{rj} = \sum_{r=1}^n a_{ir} \left(\sum_{k=1}^p b_{rk} c_{kj} \right) = \sum_{k=1}^p \sum_{r=1}^n a_{ir} (b_{rk} c_{kj}). \end{aligned}$$

Из ових једнакости следи да је $((AB)C)_{ij} = (A(BC))_{ij}$ за свако $i \in 1, \dots, m$ и свако $j \in 1, \dots, q$. Према томе, важи и једнакост $(AB)C = A(BC)$. ■

Доказ Теореме 3.17

ДОКАЗ. За дато i нека $\sigma(i, j)$ означава пермутацију скупа $\{1, \dots, n\}$ која на i -том месту има елемент j , а $\sigma'(i, j)$ одговарајућу пермутацију скупа $\{1, \dots, j-1, j+1, \dots, n\}$ добијену из пермутације $\sigma(i, j)$ изостављањем елемента j . Тада је

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{\sigma \in P_n} (-1)^{\text{Inv}(\sigma)} a_{1\sigma_1} \cdots a_{i\sigma_i} \cdots a_{n\sigma_n} \\ &= a_{i1} \sum_{\sigma'(i,1)} (-1)^{\text{Inv}(\sigma(i,1))} a_{1\sigma'_1} \cdots a_{i-1\sigma'_{i-1}} a_{i+1\sigma'_{i+1}} \cdots a_{n\sigma'_n} + \\ &\quad a_{i2} \sum_{\sigma'(i,2)} (-1)^{\text{Inv}(\sigma(i,2))} a_{1\sigma'_1} \cdots a_{i-1\sigma'_{i-1}} a_{i+1\sigma'_{i+1}} \cdots a_{n\sigma'_n} + \quad (3.8) \\ &\quad \vdots \\ &\quad a_{in} \sum_{\sigma'(i,n)} (-1)^{\text{Inv}(\sigma(i,n))} a_{1\sigma'_1} \cdots a_{i-1\sigma'_{i-1}} a_{i+1\sigma'_{i+1}} \cdots a_{n\sigma'_n}. \end{aligned}$$

Обзиром да је $(-1)^k \cdot (-1)^k = 1$ за сваки цео број k , то је

$$(-1)^{\text{Inv}(\sigma(i,1))} = (-1)^{\text{Inv}(\sigma(i,1)) + \text{Inv}(\sigma'(i,1))} \cdot (-1)^{\text{Inv}(\sigma'(i,1))}.$$

Међутим, на основу Теореме 3.8 је

$$(-1)^{\text{Inv}(\sigma(i,1)) + \text{Inv}(\sigma'(i,1))} = (-1)^{i+1},$$

па за први сабирак S_1 у једнакости (3.8) важи

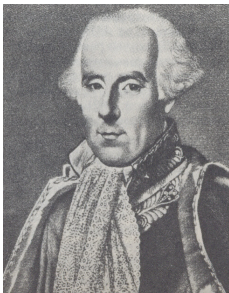
$$\begin{aligned}
 S_1 &= a_{i1} \sum_{\sigma'(i,1)} (-1)^{\text{Inv}(\sigma(i,1))} a_{1\sigma'_1} \cdots a_{i-1\sigma'_{i-1}} a_{i+1\sigma'_{i+1}} \cdots a_{n\sigma'_n} \\
 &= (-1)^{i+1} a_{i1} \sum_{\sigma'(i,1)} (-1)^{\text{Inv}(\sigma'(i,1))} a_{1\sigma'_1} \cdots a_{i-1\sigma'_{i-1}} a_{i+1\sigma'_{i+1}} \cdots a_{n\sigma'_n} \\
 &= (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} \\
 &= a_{i1} A_{i1}.
 \end{aligned}$$

Аналогно важи и за остале сабирке, што значи да је једнакост (3.5) у Теорему 3.8 тачна за свако $i = 1, 2, \dots, n$. ■

Историјске напомене

1. Идеја *детерминанте* се први пут појавила у Јапану 1683. године када је познати јапански математичар Секи решавајући систем једначина практично употребио детерминанту матрице димензије 5×5 . У том периоду је и Лајбниц (1646-1716) користио детерминанте, а Коши (1789-1857) је први доказао да је $|AB| = |A| \cdot |B|$. Бавећи се теоријом детерминанти немачки математичар Јакоби (1804-1851) је увео појам који је данас познат као *јакобијан*. Књигу о детерминантама је написао и Додџсон (1832-1898), познатији под псеудонимом Lewis Carrol (аутор књиге *Алиса у земљи чуда*).

2. Назив *матрица* се приписује енглеском математичару Силвестеру (1814-1897), а алгебру матрица је развио енглески математичар Кејли (1821-1895).



3. Лаплас (Pierre Simon de Laplace, 1749-1827) је велики француски математичар и један од најзначајних математичара у 18. веку. Засновао је теорију вероватноће, а оставио је и доста резултата у тој теорији. Тако је, разматрајући расподеле случајних променљивих, дошао до интеграла $\int_0^x e^{-t^2} dt$ који је данас познат као *Лапласов интеграл*. Познат је и по радовима у теорији диференцијалних једначина, математичкој анализи и небеској механици. Данас се у разним областима примењене математике користи такозвана *Лапласова трансформација* коју је он увео. Био је и велики популаризатор науке.