I Писмени испит из математике 1 I

20. август 2010.

I група

____ ____________

презиме и име студента **број индекса**

1. Нека је дат систем:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & y & - & z & = & 1 \\ -x & + & ay & - & 4z & = & b. \end{array}$$

а) У зависности од реалних параметара a и b одредити ранг матрице система A и проширене матрице система B.

б) У зависности од реалних параметара a и b решити систем.

2. Дата је тачка $T(1,3,4)$ и праве $p\colon \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-5}{0} = \dfrac{z}{-2}$ и $q\colon \begin{cases} x+y-2z=0 \\ 3x-2y-z=0 \end{cases}$ у простору.

Нека је π раван коју одређују тачка T и права p.

а) Одредити векторе праваца, $\vec{v}_p$ и $\vec{v}_q$, ових правих, као и координате по једне тачке са ових правих ($P \in p$ и $Q \in q$).

б) Одредити једначину равни π, вектор нормале $\vec{n}_\pi$ равни π, као и координате произвољне тачке $M \in \pi$.

в) Одредити међусобни положај равни π и праве q.

г) Уколико се раван π и права q секу одредити њихову пресечну тачку S, а уколико се не секу одредити растојање између њих.

д) Одредити праву s која пролази кроз тачку T и сече и праву p и праву q.

3. Одредити асимптоте функције

$$f(x) = 2x + 2 - \sqrt{4x^2 - 4x}\,.$$

4. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{\ln x}{3\ln x - 1}\,.$$

II Писмени испит из математике 1 II

20. август 2010.

II група

презиме и име студента **број индекса**

1. Нека је дат систем:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ -x & + & ay & + & 2z & = & b. \end{array}$$

а) У зависности од реалних параметара a и b одредити ранг матрице система A и проширене матрице система B.

б) У зависности од реалних параметара a и b решити систем.

2. Дата је тачка $T(3,1,0)$ и праве $p\colon \left\{ \begin{array}{r} 2x - y + z = 1 \\ 4x - 3y + 2z = -3 \end{array} \right.$ и $q\colon \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z+1}{1}$ у простору.

Нека је π раван коју одређују тачка T и права p.

а) Одредити векторе праваца, $\vec{v}_p$ и $\vec{v}_q$, ових правих, као и координате по једне тачке са ових правих ($P \in p$ и $Q \in q$).

б) Одредити једначину равни π, вектор нормале $\vec{n}_\pi$ равни π, као и координате произвољне тачке $M \in \pi$.

в) Одредити међусобни положај равни π и праве q.

г) Уколико се раван π и права q секу одредити њихову пресечну тачку S, а уколико се не секу одредити растојање између њих.

д) Одредити праву s која пролази кроз тачку T и сече и праву p и праву q.

3. Одредити асимптоте функције

$$f(x) = \ln \frac{(x-1)^2}{x^2}\,.$$

4. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = x - 2 - \sqrt{x^2 - 3x + 3}\,.$$

Решења II групе

1. а, б) Степенаст облик је

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ & - & y & - & 3z & = & 1 \\ & & & & (-3-3a)z & = & 2+a+b. \end{array}$$

Одавде се добија да:

1° $\underline{\text{за } a=-1 \text{ и } b\neq -1}$ систем нема решења; $r(A)=2$, $r(B)=3$;

2° $\underline{\text{за } a=-1 \text{ и } b\neq -1}$ систем има бесконачно много решења: $(x,y,z)=(2+5t,-1-3t,t)$, $t\in\mathbb{R}$; $r(A)=2$, $r(B)=2$;

3° $\underline{\text{за } a\neq -1}$ систем има јединствено решење: $(x,y,z)=\left(\dfrac{a-5b-4}{3(a+1)},\dfrac{b+1}{a+1},-\dfrac{a+b+2}{3(a+1)}\right)$; $r(A)=3$, $r(B)=3$.

Напомена. Систем се може одрадити и коришћењем детерминанти. Детерминанте су:

$$\Delta=3a+3=3(a+1),\quad \Delta_x=a-5b-4,\quad \Delta_y=3b+3,\quad \Delta_z=-a-b-2.$$

2. а) $p\colon \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-5}{0}=\dfrac{z}{-2}$: $\vec{v}_p=(1,0,-2)$, $P(3,5,0)$. $\vec{v}_q=(1,1,1)$, $Q(-1,-1,-1)$.

б) Како је $\vec{v}_p\times\overrightarrow{PT}=(8,0,4)$ узећемо $\vec{n}_\pi=\frac{1}{4}\vec{v}_p\times\overrightarrow{PT}=(2,0,1)$. За тачку узећемо баш $T(3,1,0)$ јер је $T\in\pi$. На основу тога добијамо једначину равни: $\pi\colon 2\cdot(x-3)+0\cdot(y-1)+1\cdot(z-0)=0$, што кад се среди даје $2x+z-6=0$.

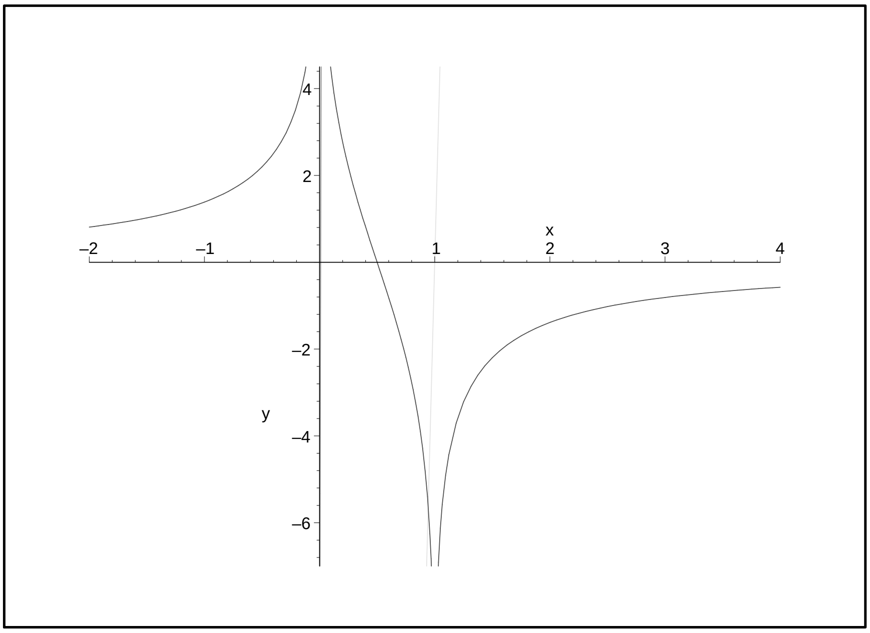
в) Како је $\vec{v}_q\cdot\vec{n}_\pi=(1,1,1)\cdot(2,0,1)=3\neq 0$, раван π и права q се секу у тачки.

г) Пресечна тачка је $S(2,2,2)$.

д) Тражена права је $s\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-2}{-2}$.

3. Функција $f(x)=\ln\dfrac{(x-1)^2}{x^2}$ има домен $D_f=(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$.

Има обостране вертикалне асимптоте $x=0$ и $x=1$ и обострану хоризонталну асимптоту $y=0$.



4. Функција

$$f(x) = x - 2 - \sqrt{x^2 - 3x + 3}\,.$$

1° Домен је $D_f = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

2° Нула нема. Знак: увек негативна. Пресек са y-осом је $Y(0, -2-\sqrt{3})$.

3° Није ни парна ни непарна (јер је $f(-1) = -3 - \sqrt{7}$, а $f(1) = -2$), ни периодична.

4° $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\Rightarrow$ нема леву хоризонталну асимптоту.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$ има десну хоризонталну асимптоту $y = -\frac{1}{2}$.

$k = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$ и $n = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - k\cdot x = -\dfrac{7}{2}$ $\Rightarrow$ има леву косу асимптоту $y = 2x - \frac{7}{2}$.

5° $f' = 1 - \dfrac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+3}} = \dfrac{2\sqrt{x^2-3x+3} - 2x + 3}{2\sqrt{x^2-3x+3}}$. Монотоност: $\nearrow$. Нема локалних екстрема.

6° $f'' = \dfrac{-3}{4(x^2-3x+3)^{3/2}}$. Конвексност: $\cap$. Нема превојних тачака.