

1. Marina je predložila Veljku da odigraju partiju šaha. Da bi partija bila što zanimljivija, uveli su sledeće pravilo: pre početka partije, Marina baca kockicu. Ako dobije 1, 2 ili 3, Veljko uklanja jednu svoju figuru sa table; ako padne 4 ili 5, Veljko uklanja dve svoje figure sa table; ako padne 6, Veljko uklanja 3 svoje figure. Verovatnoća da Marina pobedi u partiji ako je na početku imala figuru prednosti je 0.1; ako je imala 2 figure prednosti Marina će pobediti sa verovatnoćom 0.15; ako je imala 3 figure prednosti sa verovatnoćom 0.4. Naposljetku, Marina je pobedila. Koja je verovatnoća da je na početku partije Marina imala 2 figure prednosti?

Rešenje:

Hipoteze

H_1 : "Marina je na početku partije imala 1 figuru prednosti"

H_2 : "Marina je na početku partije imala 2 figure prednosti"

H_3 : "Marina je na početku partije imala 3 figure prednosti"

A: "Marina je pobedila"

$$P(H_1) = 3/6 \quad P(A/H_1) = 0.1$$

$$P(H_2) = 2/6 \quad P(A/H_2) = 0.15$$

$$P(H_3) = 1/6 \quad P(A/H_3) = 0.4$$

$$P(H_2/A) = P(H_2) * P(A/H_2) / P(A)$$

$$P(H_2/A) = 2/6 * 0.15 / (3/6 * 0.1 + 2/6 * 0.15 + 1/6 * 0.4)$$

$$\mathbf{P(H_2/A) = 0.3}$$

Napomena: Zadatak sa Novakom Đokovićem i Jelenom Janković se radi na identičan način; jedina razlika je u korišćenju suprotnog događaja (pošto je data verovatnoća da Jelena pobedi ako je imala gemove prednosti na početku, a na kraju ipak pobeđuje Novak).

2. Date su dve urne: u prvoj se nalazi a belih i b crnih kuglica, a u drugoj c belih i d crnih. Na slučajan način se bira jedna od urni i iz nje se uzima jedna kuglica. Dobijena je bela kuglica. Naći verovatnoću da sledeća kuglica, koju uzimamo iz iste urne, bude takođe bela.

Rešenje:

Hipoteze:

H_1 : "Izabrana prva urna"

H_2 : "Izabrana druga urna"

Neka A označava pojavu bele kuglice pri prvom izvlačenju

$$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2};$$

$$P(H_1 / A) = \frac{\frac{a}{a+b}}{\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d}};$$

$$P(H_2 / A) = \frac{\frac{c}{c+d}}{\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d}};$$

Neka B označava pojavu bele kuglice pri drugom izvlačenju

$$P(B / A) = P(H_1 / A) * P(B / H_1 A) + P(H_2 / A) * P(B / H_2 A)$$

Uslovna verovatnoća pojave druge bele kuglice, pod uslovom da je izabrana prva urna, i iz nje izvučena bela kuglica, jednaka je

$$P(B / H_1 A) = \frac{a-1}{a+b-1}$$

Analogno je

$$P(B / H_2 A) = \frac{c-1}{c+d-1}$$

I sledi

$$P(B / A) = \frac{1}{\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d}} \left[\frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)} + \frac{c(c-1)}{(c+d)(c+d-1)} \right]$$

3. Mašina se sastoji iz dva dela: rad svakog dela je neophodan za rad mašine. Pouzdanost (verovatnoća neprekidnog rada u toku vremena t) prvog dela jednaka je p_1 a drugog p_2 . Mašina je ispitivana u toku vremena t kada je došlo do prekida u radu. Naći verovatnoću da je otkazao prvi deo, a da je drugi ispravan.

Rešenje:

Hipoteze su:

H_0 : "Oba dela su ispravna"

H_1 – "Prvi deo otkazao, a drugi je ispravan"

H_2 – "Prvi deo je ispravan, a drugi je otkazao"

H_3 : "Oba dela su otkazala"

$$P(H_0) = p_1 p_2; P(H_1) = (1 - p_1) p_2;$$

$$P(H_2) = p_1 (1 - p_2); P(H_3) = (1 - p_1) (1 - p_2).$$

Neka A označava događaj da je mašina otkazala.

$$P(A / H_0) = 0; P(A / H_1) = P(A / H_2) = P(A / H_3) = 1.$$

Prema Bajesovoj formuli imamo:

$$P(H_1 / A) = \frac{(1 - p_1) p_2}{(1 - p_1) p_2 + p_1 (1 - p_2) + (1 - p_1) (1 - p_2)} = \frac{(1 - p_1) p_2}{1 - p_1 p_2}$$

4. Poznato je da se u jednoj od dveju urni nalaze samo bele kuglice, a u drugoj je $\frac{1}{4}$ kuglica crne boje. Neka smo na slučajan način izabrali jednu urnu i iz nje izvukli jednu belu kuglicu. Odrediti verovatnoću da je kuglica uzeta iz urne u kojoj se nalaze i crne kuglice. Zatim, vratimo ovu kuglicu u istu urnu iz koje smo je i izvukli, pa iz nje izvucimo opet jednu kuglicu. Koja je verovatnoća da sada ova druga kuglica bude crna?

Rešenje: Označimo sa B_1 da je odabrana urna sa crnim kuglicama, sa B_2 da je odabrana urna sa belim kuglicama i sa A da je prva izvučena kuglica bela, sledi:

$$P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}; P(A/B_1) = \frac{3}{4}; P(A/B_2) = 1,$$

i

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1)P(A/B_1)}{P(A)} = \frac{3}{7}; P(B_2/A) = \frac{4}{7}$$

Neka se događaj B sastoji u tome da se pri drugom izvlačenju dobije crna kuglica, tada je

$$P(B/B_1) = \frac{1}{4}, P(B/B_2) = 0$$

i

$$P(B/A) = P(B_1/A)P(B/B_1/A) + P(B_2/A)P(B/B_2/A) = \frac{3}{28}$$