Numerička analiza

- skripta za usmeni deo ispita (Tema 4. - Sistemi nelinearnih jednačina, by Stepke, školska 2011-12) -

T4. Sistemi nelinearnih jednačina

1. Skalarni i vektorski zapis sistema nelinearnih jednačina

Skalarni zapis sistema nelinearnih jednačina glasi:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x_1,\dots,x_n)=0 \\ \vdots \\ f_n(x_1,\dots,x_n)=0 \end{array}\right\}$$

ako se uvedu oznake:

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathsf{O}=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

dobija se **Vektorski zapis** sistema nelinearnih jednačina koji glasi:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$$

2. Transformacija sistema F(x) = 0 u oblik x = G(x) - vektorski i skalarni zapis

Sistem od **n** nelinearnih jednačina sa **n** nepoznatih:

$$\begin{array}{c} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ . \\ . \\ . \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{array}$$

se transformacijama svodi na **Skalarni zapis** sistema od **n** nelinearnih jednačina sa **n** nepoznatih:

$$\begin{array}{c} x_1 = g_1(x_1, \dots, x_n) \\ x_2 = g_2(x_1, \dots, x_n) \\ . \\ . \\ . \\ x_n = g_n(x_1, \dots, x_n) \end{array}$$

a ako se uvedu oznake:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \mathrm{G}\ (\mathrm{x}) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ g_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix}$$

tada dobijamo **Vektorski zapis**:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})$$

3. Jakobijan preslikavanja. Određivanje Jakobijana za konkretna preslikavanja, npr. za $G(x,y) = \begin{bmatrix} x^2 + xy^3 - 1 \\ x \sin^2 y \end{bmatrix}$

Jakobijan ("*Jakobijeva matrica*") se obeležava sa **J**(**x**) i definiše se kao izvod funkcije **G**(**x**) u **x** :

$$J(x) = G'(x) = \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)$$

Ako znamo da je:

$$\mathrm{G}(\mathrm{x}) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ g_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix}$$

gde funkcije $\mathbf{g}_\mathbf{i}$ moraju biti neprekidno diferencijabilne, onda **Jakobijan preslikavanja J**(**x**) iznosi:

$$J(x) = G'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

4. **Ako je G : D → D neprekidno preskikavanje, obrazložiti nejednakost**

$$\|G(x) - G(y)\| \leq L_p \|x - y\|, \quad \forall x, y \in D, \ \forall p \in \{1, \infty, F\}$$

Kako se uvode L_{ij} i šta su L_1, L_∞ i L_F ?

Jakobijevu matricu **J**(**x**) možemo napisati u obliku:

$$J(x) = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & \cdots & L_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ L_{n1} & L_{n2} & \cdots & L_{nn} \end{bmatrix}$$

Ako uvedemo oznake:

Apsolutne matrične norme L_1 (suma po <u>kolonama</u> Jakobijana):

$$L_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} L_{ij}$$

Uniformne matrične norme L_∞ (suma po <u>vrstama</u> Jakobijana):

$$L_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} L_{ij}$$

Frobenijusove matrične norme L_F (<u>kvadratni koren</u> iz <u>sume kvadrata</u> svih članova Jakobijana):

$$L_F = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} L_{ij}^2 \right)^{1/2}$$

tada važi tražena početna nejednakost:

$$\|G(x) - G(y)\| \leq L_p \|x - y\|, \quad (\forall x, y \in D; \forall p \in \{1, \infty, F\})$$

5. Teorema o dovoljnom uslovu konvergencije i oceni greške metode iteracije. Iskaz.

Neka je **G**: **D → D** i neka je **0** < **Lp** < **1** za bar jedno **p** ∊ {**1**, **∞**, **F**}.
Tada je:

1. Jednačina **x** = **G**(**x**) ima jedinstveno rešenje **s** ∊ **D**
2. Niz definisan sa $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{G}(\mathbf{x}^{(k)})$ za (**k** = 0,1,...) konvergira ka **s**
3. Ocena greške se računa kao:

$$\left\| \boldsymbol{x}^{(n)} - \boldsymbol{s} \right\|_p \leq \frac{L_p^n}{1 - L_p} \left\| \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0 \right\|_p$$

a može se dobiti i preko poslednje iteracije:

$$\left\| x^{(n)} - s \right\|_p \leq \frac{L_p}{1 - L_p} \left\| x^{(n)} - x^{(n-1)} \right\|_p$$

6. Navesti formule za dve ocene greške metode iteracije

Apriorna ocena greške (poslednja i 1. iteracija):

$$\left\| \boldsymbol{x}^{(n)} - \boldsymbol{s} \right\|_p \leq \frac{L_p^n}{1 - L_p} \left\| \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0 \right\|_p$$

Aposteriorna ocena greške (poslednja i pretposlednja iteracija):

$$\left\| x^{(n)} - s \right\|_p \leq \frac{L_p}{1 - L_p} \left\| x^{(n)} - x^{(n-1)} \right\|_p$$

7. Napisati sistem od dve nelinearne jednačine sa dve nepoznate. Uvesti veličine $\mathbf{h_n}$ i $\mathbf{k_n}$ i formirati sistem jednačina za određivanje $\mathbf{h_n}$ i $\mathbf{k_n}$ u skalarnom, a zatim i u matričnom obliku.

Neka je dat nelinearni sistem od 2 jednačine sa 2 nepoznate:

$$f(x,y) = 0$$
$$g(x,y) = 0$$

gde su **f** i **g** neprekidno diferencijabilne funkcije. Ako je (**x**,**y**) tačno rešenje datog sistema, a ($\mathbf{x_n}$, $\mathbf{y_n}$) **n**-ta aproksimacija datog rešenja, tada možemo uvesti veličine $\mathbf{h_n}$ i $\mathbf{k_n}$, takve da važi da je:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x_n} + \mathbf{h_n}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{y_n} + \mathbf{k_n}$$

i dati sistem bi tada glasio:

$$f(\mathbf{x_n} + \mathbf{h_n}, \mathbf{y_n} + \mathbf{k_n}) = 0 \qquad (1)$$
$$g(\mathbf{x_n} + \mathbf{h_n}, \mathbf{y_n} + \mathbf{k_n}) = 0 \qquad (2)$$

Primenom Tejlorove formule na jednačinu (1) dobijamo da je:

$$f(\mathbf{x_n}, \mathbf{y_n}) + \frac{1}{1!}\left[f'_x(\mathbf{x_n}, \mathbf{y_n})\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{x_n}) + f'_y(\mathbf{x_n}, \mathbf{y_n})\cdot(\mathbf{y} - \mathbf{y_n}) \right] +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(\mathbf{x_n}, \mathbf{y_n})\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{x_n})^2 + 2 \cdot f''_{xy}(\mathbf{x_n}, \mathbf{y_n})\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{x_n})\cdot\ )\cdot(\mathbf{y} - \mathbf{y_n}) + f''_{yy}(\mathbf{x_n}, \mathbf{y_n})\cdot(\mathbf{y} - \mathbf{y_n})^2\right] + \mathbf{O}_1 (\mathbf{h_n}, \mathbf{k_n}) = 0$$

kako je:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x_n} + \mathbf{h_n} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{h_n} = \mathbf{x} - \mathbf{x_n}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{y_n} + \mathbf{k_n} \qquad\qquad \mathbf{k_n} = \mathbf{y} - \mathbf{y_n}$$

iz dobijene jednačine sledi:

$$f(\mathbf{x_n}, \mathbf{y_n}) + f'_x(\mathbf{x_n}, \mathbf{y_n})\cdot\mathbf{h_n} + f'_y(\mathbf{x_n}, \mathbf{y_n})\cdot\mathbf{k_n} +$$
$$+ \frac{1}{2}\left[f''_{xx}(\mathbf{x_n}, \mathbf{y_n})\cdot\mathbf{h_n}^2 + 2 \cdot f''_{xy}(\mathbf{x_n}, \mathbf{y_n})\cdot\mathbf{h_n}\cdot\mathbf{k_n} + f''_{yy}(\mathbf{x_n}, \mathbf{y_n})\cdot\mathbf{k_n}^2\right] + \mathbf{O}_1 (\mathbf{h_n}, \mathbf{k_n}) = 0$$

Ako zanemarimo članove:

$$\mathbf{h_n}^2 \approx 0$$
$$\mathbf{h_n}\cdot\mathbf{k_n} \approx 0$$
$$\mathbf{k_n}^2 \approx 0$$
$$\mathbf{O}_1 (\mathbf{h_n}, \mathbf{k_n}) \approx 0$$

tada dobijamo jednačinu:

$$f(\mathbf{x_n}, \mathbf{y_n}) + f'_x(\mathbf{x_n}, \mathbf{y_n})\cdot\mathbf{h_n} + f'_y(\mathbf{x_n}, \mathbf{y_n})\cdot\mathbf{k_n} = 0$$

odnosno:

$$f'_x(\mathbf{x_n}, \mathbf{y_n})\cdot\mathbf{h_n} + f'_y(\mathbf{x_n}, \mathbf{y_n})\cdot\mathbf{k_n} = - f(\mathbf{x_n}, \mathbf{y_n})$$

Ako ovo isto primenimo in a jednačinu (2), dobijamo da je:

$$g'_x(\mathbf{x_n}, \mathbf{y_n})\cdot\mathbf{h_n} + g'_y(\mathbf{x_n}, \mathbf{y_n})\cdot\mathbf{k_n} = - g(\mathbf{x_n}, \mathbf{y_n})$$

i dati sistem jednačina za određivanje $\mathbf{h_n}$ i $\mathbf{k_n}$ u **Skalarnom obliku** sada glasi:

$$f'_x(\mathbf{x_n}, \mathbf{y_n})\cdot\mathbf{h_n} + f'_y(\mathbf{x_n}, \mathbf{y_n})\cdot\mathbf{k_n} = - f(\mathbf{x_n}, \mathbf{y_n})$$
$$g'_x(\mathbf{x_n}, \mathbf{y_n})\cdot\mathbf{h_n} + g'_y(\mathbf{x_n}, \mathbf{y_n})\cdot\mathbf{k_n} = - g(\mathbf{x_n}, \mathbf{y_n})$$

a u **Matričnom obliku** se dobija kao:

$$\begin{bmatrix} f'_x(x_n, y_n) & f'_y(x_n, y_n) \\ g'_x(x_n, y_n) & g'_y(x_n, y_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_n \\ k_n \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} f(x_n, y_n) \\ g(x_n, y_n) \end{bmatrix}$$

Jakobijeva matrica $J(x_n, y_n)$

$$J(x_n, y_n) \begin{bmatrix} h_n \\ k_n \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} f(x_n, y_n) \\ g(x_n, y_n) \end{bmatrix} \qquad J^{-1}(x_n, y_n) \cdot /$$

$$\underbrace{J^{-1}(x_n, y_n) \cdot J(x_n, y_n)}_{\text{Jedinična matrica I}} \cdot \begin{bmatrix} h_n \\ k_n \end{bmatrix} = -J^{-1}(x_n, y_n) \begin{bmatrix} f(x_n, y_n) \\ g(x_n, y_n) \end{bmatrix}$$

pa je:

$$\begin{bmatrix} h_n \\ k_n \end{bmatrix} = -J^{-1}(x_n, y_n) \begin{bmatrix} f(x_n, y_n) \\ g(x_n, y_n) \end{bmatrix}$$

S obzirom da smo zanemarili nelinearne članove u Tejlorovoj formuli, možemo pisati:

$$\mathbf{x_{n+1} = x_n + h_n}$$
$$\mathbf{y_{n+1} = y_n + k_n}$$

8. **Definisati red konvergencije iterativnog procesa**

$$x^{(n+1)} = G(x^{(n)}), \quad n = 0, 1, \ldots.$$

Navesti uslov za Jakobijan preslikavanja pod kojim je konvergencija linearna, odnosno kvadratna.

Definicija reda konvergencije iterativnog procesa glasi:

Neka je $\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = s$. Red konvergencije je **k** ako postoji takva konstanta C_k takva da važi:

$$\frac{\left\| x^{(n+1)} - s \right\|}{\left\| x^{(n)} - s \right\|^{k}} \leq C_k, \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

za **k = 1** se radi o lineranoj konvergenciji iterativnog procesa

za **k = 2** se radi o kvadratnoj konvergenciji iterativnog procesa

Teorema: Uslovi Jakobijan preslikavanja pod kojim je **konvergencija linearna**, odnosno **kvadratna** su:

Ako je:

1) $J = G'(s) \neq 0$, konvergencija je linearna
2) $J = G'(s) = 0$, konvergencija je kvadratna

Neka je:

$$G(x) = X + \Lambda(x) F(x)$$

Tada tražimo prvi izvod od gore navedene jednačine:

$$G'(x) = I + \Lambda'(x) F(x) + \Lambda(x) F'(x)$$

ili možemo pisati:

$$G'(s) = I + \Lambda'(s) F(s) + \Lambda(s) F'(s)$$

Za $G'(s) = 0$ sledi da je:

$$I + \Lambda'(s) F(s) + \Lambda(s) F'(s) = 0$$

Za $F(s) = 0$ jednačina dobija oblik:

$$\Lambda(s) F'(s) = -I \qquad / \cdot [F'(s)]^{-1}$$

$$\underbrace{\Lambda(s) F'(s) [F'(s)]^{-1}}_{\text{ovo je jedinična matrica } \mathbf{I}} = -I [F'(s)]^{-1}$$

pa sledi da je:

$$\Lambda(s) = -\left[F'(s)\right]^{-1}$$

$$\Lambda(\boldsymbol{x}) = -\left[F'(\boldsymbol{x})\right]^{-1} = -\left[J(\boldsymbol{x})\right]^{-1}$$

odakle je:

$$x = x - \left[J(\boldsymbol{x})\right]^{-1} F(\boldsymbol{x})$$

pa niz:

$$\boldsymbol{x}^{(n+1)} = \boldsymbol{x}^{(n)} - \left[J\left(\boldsymbol{x}^{(n)}\right)\right]^{-1} F\left(\boldsymbol{x}^{(n)}\right), \quad \left(n = 0, 1, \ldots, \quad x^{(0)} \in D\right)$$

konvergira rešenju sistema $F(\boldsymbol{x}) = 0$ i ima najmanje kvadratnu konvergenciju.

9. Ideja i realizacija metode Njutn-Kantorovića u opštem slučaju

Zadat je sistem od **n** nelinearnih jednačina:

$$\left.\begin{aligned} &f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ &\vdots \\ &f_n(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{aligned}\right\}$$

i neka su $\mathbf{x_1^{(0)}}, \ldots, \mathbf{x_n^{(0)}}$ aproksimacije rešenja sistema, a $\mathbf{x_1^0 + \Delta\, x_1^0}, \ldots, \mathbf{x_n^0 + \Delta\, x_n^0}$ tačna rešenja sistema.

Formira se novi sistem:

$$\mathbf{f_i}\, (\mathbf{x_1^0 + \Delta\, x_1^0}; \ldots; \mathbf{x_n^0 + \Delta\, x_n^0}) = 0 \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

Neka su funkcije $\mathbf{f_i}$ diferencijabilne barem 2 puta (tj. do drugog izvoda).

Primenimo sada Tejlorovu formulu:

$$\mathbf{f_i(x_1,\ldots,x_n) = f_i\, (x_1^0, \ldots, x_n^0)} + \frac{\partial fi}{\partial x1}\, \mathbf{(x_1^0, \ldots, x_n^0) \cdot (x - x_1^0)} + \frac{\partial fi}{\partial x2}\, \mathbf{(x_1^0, \ldots, x_n^0) \cdot (x - x_2^0)} + \ldots + \frac{\partial fi}{\partial xn}\, \mathbf{(x_1^0, \ldots, x_n^0) \cdot (x - x_n^0) + R_{1i}}$$

ovo je = 0

Ako znamo da je:

$$\begin{aligned} \mathbf{x - x_1^0} &= \mathbf{\Delta\, x_1^0} \\ \mathbf{x - x_2^0} &= \mathbf{\Delta\, x_2^0} \\ &. \\ &. \\ \mathbf{x - x_n^0} &= \mathbf{\Delta\, x_n^0} \end{aligned}$$

i $(\mathbf{\Delta\, x_1^0}) \approx 0, \ldots, (\mathbf{\Delta\, x_n^0}) \approx 0$ (zadržimo samo linearne članove), tada Tejlorovu formulu možemo napisati kao:

$$- f_i (x_1^0, \dots, x_n^0) = \frac{\partial fi}{\partial x1} (x_1^0, \dots, x_n^0) \cdot \Delta x_1^0 + \frac{\partial fi}{\partial x2} (x_1^0, \dots, x_n^0) \cdot \Delta x_2^0 + \dots + \frac{\partial fi}{\partial xn} (x_1^0, \dots, x_n^0) \cdot \Delta x_n^0$$

ili u **Matričnom obliku**:

$$J(x) \cdot \Delta x^{(0)} = - F(x^{(0)})$$

gde je:

$$\Delta x^{(0)} = \begin{bmatrix} \Delta x_1^{(0)} \\ \vdots \\ \Delta x_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

daljim množenjem jednačine u matričnom obliku sa $[J(x)]^{-1}$:

$$[J(x)]^{-1} \cdot / \qquad J(x) \cdot \Delta x^{(0)} = - F(x^{(0)})$$

$$[J(x)]^{-1} \cdot J(x) \cdot \Delta x^{(0)} = - [J(x)]^{-1} \cdot F(x^{(0)})$$

ovo je jedinična matrica **I**

$$\Delta x^{(0)} = - [J(x)]^{-1} \cdot F(x^{(0)})$$

Odakle dobijamo formulu za **iterativni proces Njutn-Kantorovič**:

$$\boldsymbol{x}^{(n+1)} = \boldsymbol{x}^{(n)} - \left[J\left(\boldsymbol{x}^{(n)}\right) \right]^{-1} F\left(\boldsymbol{x}^{(n)}\right), \quad \left(n = 0, 1, \dots, \quad x^{(0)} \in D\right)$$

10. Navesti formulu za računanje $x^{(n+1)}$ u metodi Njutn-Kantorovića. Na koje preslikavanje se odnosi Jakobijan u toj formuli ?

Formula za računanje $x^{(n+1)}$ u metodi **Njutn-Kantorovića** galsi:

$$\boldsymbol{x}^{(n+1)} = \boldsymbol{x}^{(n)} - \left[J\left(\boldsymbol{x}^{(n)}\right) \right]^{-1} F\left(\boldsymbol{x}^{(n)}\right), \quad \left(n = 0, 1, \dots, \quad x^{(0)} \in D\right)$$

ili po modifikovanoj metodi **Njutn-Kantorovića**:

$$\boldsymbol{x}^{(n+1)} = \boldsymbol{x}^{(n)} - \left[J\left(\boldsymbol{x}^{(0)}\right) \right]^{-1} F\left(\boldsymbol{x}^{(n)}\right), \quad \left(n = 0, 1, \dots, \quad x^{(0)} \in D\right)$$

Modifikovana metoda sporije konvergira od osnovne, ali se samo jednom traži **inverzna Jakobijeva matrica** $[J(x^{(0)})]^{-1}$. Osnovna metoda traži **inverznu Jakobijevu matricu** $[J(x^{(n)})]^{-1}$ u svakoj iteraciji.