I. DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

(1) POJAM DIFERENCIJALNE JEDNAČINE. REŠENJE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE, OPŠTE, PARTIKULARNO, SINGULARNO REŠENJE.

-***Diferencijalna jednačina*** je ona koja izražava neku vezu između nezavisno promenljive nepoznate funkcije i njenih izvoda: $F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0$. Najviši red izvoda u toj jednačini nazivamo redom te jednačine.

-***Rešenje diferencijalne jednačine*** je svaka funkcija koja identički zadovoljava tu jednačinu.

-***Opšte rešenje*** (prvi integral) jednačine $F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0$ je jednoparametarska porodica f-ja $y = \varphi(x, C)$ koja identički zadovoljava diferencijalnu jednačinu prvog reda.

-Opšte rešenje (prvi integral) jednačine $F(x, y, y') = 0$ je skup f-ja $y = \varphi(x, C, C_1, \dots, C_n)$ koja zavisi od *n* parametara C_n i koji identički zadovoljava diferencijalnu jednačinu n-tog reda.

-***Partikularno rešenje*** (partikularni integral) dif.jedn. je svaka ona f-ja $y = y(x)$ koja se dobija iz opšteg rešenja te jednačine za odgovarajuće posebne vrednosti integracionih konstanata. Ako te vrednosti nisu date mogu se odrediti iz početnih uslova (par datih vrednosti tipa: $y_0 = y(x_0)$).

-***Singularno rešenje*** (singularni integral) je ono rešenje koje identički zadovoljava jednačinu a nije sadržano u njenom opštem rešenju.

(2) JEDNAČINE S RAZDVOJENIM PROMENLJIVIM.

-Dif.jedn. prvog reda čije se promenljive mogu razdvojiti neposredno ili ako se obe njene strane pomnože istim izrazom, zove se dif.jedn sa razdvojenim promenljivim.

-Npr. jednačina $\frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{dy}} = \frac{\boldsymbol{f(x)}}{\boldsymbol{g(y)}}$ je, za $g(y) \neq 0$ jedn. sa razdvojenim promenljivim jer, ako se i leva i desna strana pomnože sa $g(y)dx$ dobija se $g(y)dy = f(x)dx$.

-Npr. jednačina $\boldsymbol{f(x)g(y)dx + p(x)q(y)dy = 0}$ je takođe takva jedn. Ako se jedn. pomnoži sa $\frac{1}{g(y)p(x)}$, dobijamo jedn. sa razd.prom: $\frac{f(x)}{p(x)}dx + \frac{q(y)}{g(y)}pdy = 0$.

-Sledeći korak je integraljenje dobijene jednačine i odatle nalaženje opšteg rešenja.

(3) HOMOGENA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA PRVOG REDA.

-Jednačina: $\boldsymbol{y' = f(x, y)}$ naziva se homogena dif.jedn ako se f-ja $f(x, y)$ može predstaviti u obliku $\boldsymbol{f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)}$.

-Zbog ove svoje osobine, homogene jednačine se smenom $\boldsymbol{z = z(y) = \frac{y}{x}}$ svode na jednačinu sa razdvojenim promenljivama. Naime, kako je: $y' = z + xz'$, jednačina $y = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ se svodi na:

$$z + xz' = \varphi(z) \Rightarrow x\frac{dz}{dx} = \varphi(z) - z \Rightarrow \int \frac{dz}{\varphi(z) - z} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dz}{\varphi(z) - z} = ln|x| + C$$

-Nakon integracije, smenom $y = xz$ se dolazi do opšteg rešenja date jednačine.

(4) *JEDNAČINA PRVOG REDA KOJA SE SVODI NA HOMOGENU JEDNAČINU.*

-Ova jednačina je oblika (F je neprekidna f-ja, $\gamma \neq 0$ ili $c \neq 0$)

$$\boldsymbol{y' = F\left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma}{a x + b y + c}\right)}$$

-Prvi slučaj: $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ a & b \end{vmatrix} = \alpha b - \beta a \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad$ smene: $\begin{matrix} \boldsymbol{x = X + h} & X - \text{nova nezavisno prom.} \\ \boldsymbol{y = Y + k} & Y - \text{nova nepoznata f} - \text{ja} \end{matrix}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX} = F\left(\frac{\alpha(X+h) + \beta(Y+k) + \gamma}{a(X+h) + b(Y+k) + c}\right)$$

$$\begin{matrix} \alpha h + \beta k + \gamma \\ a h + b k + c \end{matrix}, \; det \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dY}{dX} = F\left(\frac{\alpha X + \beta Y}{a X + b Y}\right) = F\left(\frac{\alpha + \beta \frac{Y}{X}}{a + b\frac{Y}{X}}\right)$$

-Drugi slučaj: $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ a & b \end{vmatrix} = \alpha b - \beta a = 0 \quad \Longrightarrow \quad$ smena: $\boldsymbol{z = ax + by}$ (ili $z = \alpha x + \beta y$)

(5) *LINEARNA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA PRVOG REDA.*

-Linearnom diferencijalnom jedn. prvog reda nazivamo jednačinu $\boldsymbol{y' + p(x)y = q(x)}$ koja je linearna u odnosu na traženu f-ju $y(x)$ i njen izvod ($p(x)$ i $q(x)$ su neprekidne f-je nezavisno promenljive x)

-**Izvođenje forumule**. Ako napišemo traženu f-ju u obliku $y = uv$ gde su $u = u(x)$ i $v = v(x)$ f-je od kojih jedna može biti proizvoljna a druga treba da zavisi od prve tako da njihov proizvod zadovoljava datu jednačinu.

-Dakle, ako je $y = uv$, tada je $y' = u'v + v'u$, pa zamenom u $y' + p(x)y = q(x)$ dobijamo:

$$u'v + v'u + p(x)uv = q(x) \;\Rightarrow\; u'v + u(v' + p(x)v) = q(x)$$

-Ako kao $v(x)$ odaberemo neko partikularno rešenje jednačine $v' + p(x)v = 0$; tada treba da $u(x)$ odredimo iz jednačine:

$$u'v = q(x) \;\Rightarrow\; \frac{dv}{v} = -p(x)dx \;\Rightarrow\; ln|v| = -\int p(x)dx + C_1$$

što je opšte rešenje jednačine. Potrebno partikularno rešenje imamo za $C_1 = 0$ i to je funkcija

$v = e^{-\int p(x)dx}$. Uvršćujući v u jednačinu $u'v = q(x)$, dobijamo:

$$\frac{du}{dx} = \frac{q(x)}{v} = q(x)e^{\int p(x)dx}dx \;\Rightarrow\; u = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C$$

-Dakle, opšte rešenje jednačine je:

$$\boldsymbol{y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right)}$$

-***Partikularno rešenje*** se dobija po uslovu $y(x_0) = y_0$:

$$y - y_0 = e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx}\left(\int_{x_0}^{x} q(x)e^{\int_{x_0}^{x} p(x)dx}dx + C\right)$$

(6) *BERNULIJEVA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA. RIKATIJEVA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA.*

-Bernulijeva jednačina $\boldsymbol{y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}}$ je jednačina koja za $\alpha = 0$ predstavlja linearnu jednačinu, a za $\alpha = 1$ jednačinu u kojoj se promenljive mogu razdvojiti.

-**Postupak**. Za proizvoljno $\alpha \notin \{0, 1\}$ obe strane delimo izrazom y^{α}, dakle:

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{-\alpha+1} = q(x)$$

-Uvodimo pomoćnu f-ju $y^{-\alpha+1} = z$; $z' = (-\alpha + 1)y^{-\alpha}y'$, čime se data jedn. svodi na linearnu:

$$z' + (-\alpha + 1)p(x)z = (-\alpha + 1)q(x)$$

-Opšte rešenje ove jednačine je:

$$z = e^{-(-\alpha+1)\int p(x)dx}\left((-\alpha + 1)\int q(x)e^{(-\alpha+1)\int p(x)dx}dx + C\right)$$

-***Opšte rešenje*** Bernulijeve jednačine je:

$$\boldsymbol{y = y^{\alpha}e^{-(-\alpha+1)\int p(x)dx}\left((-\alpha + 1)\int q(x)e^{(-\alpha+1)\int p(x)dx}dx + C\right)}$$

-**Rikatijeva jednačina** je jedn. prvog reda oblika: $\boldsymbol{y' + p(x)y^2 + q(x)y = r(x)}$ u kojoj su p, q, r neprekidne funkcije u intervalu $a \le x \le b$ $(p(x) \neq 0)$. Za $p(x) = 0$ jednačina je linearna, a za $r(x) = 0$ Bernulijeva jednačina.

-**Postupak** (kada je poznato jedno partikularno rešenje y_1). Uvođenjem nepoznate $z = z(x)$ pomoću smene $y = y_1 + z$, polazna jednačina se transformiše u Bernulijevu jednačinu po z:

$$y_1' + z' + p(x)(y_1^2 + 2y_1z + z^2) + q(x)(y_1 + z) = r(x)$$

-Obzirom da je y_1 partikularnu rešenje date jednačine:

$$z' + p(x)(2y_1z + z^2) + q(x)z = 0 \;\;\Rightarrow\;\; z' + p(x)z^2 + z(2p(x)y_1 + q(x)) = 0$$

-Poslednji izraz predstavlja Bernulijevu jednačinu.

(7) *JEDNAČINA S TOTALNIM DIFERENCIJALOM.*

-Jednačina sa totalnim diferencijalom (*egzaktna diferencijalna jednačina*) je jednačina:

$$\boldsymbol{P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0}$$

Ako su $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ neprekidne i diferencijab. f-je koje zadovoljavaju uslov: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, gde su parcijalni izvodi neprekidni u datoj oblasti D.

-**Teorema**: Ako je leva strana jednačine totalni diferencijal tada važi uslov i obrnuto tj jednačina ima oblik: $du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, te je njeno opšte rešenje: $u(x,y) = C$.

-**Dokaz**. Pokažimo da integraljenjem početne jednačine dobijamo:

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = C$$

gde je (x_0, y_0) proizvoljna tačka u oblasti D.

-Pre svega, imamo da je: $du(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

-U tom slučaju je: $P(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}dx$ i $Q(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}dy$. Iz toga se dalje dobija da je

$$\boldsymbol{u} = \int_{\boldsymbol{x_0}}^{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{P(x,y)dx + \varphi(y)}$$

pri tome, s obzirom da integraciju vršio samo po x, smatramo da je $y = const$. Te zbog toga integraciona konstanta zavisi od y. Izaberimo f-ju. $\varphi(y)$ tako da važi $Q(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}dy$. Dalje:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial y}dx + \varphi'(y) = Q(x,y)\,; \qquad \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q}{\partial x}dx + \varphi'(y) = Q(x,y)$$

$$Q(x,y)\Big|_{x_0}^{x} + \varphi'(y) = Q(x,y) \;\; \Rightarrow \;\; Q(x,y) - Q(x_0,y) + \varphi'(y) = Q(x,y)$$

$$\varphi'(y) = Q(x_0,y) \;\; \Rightarrow \;\; \varphi'(y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + C_0$$

$$u = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + C_0$$

-Ako izjednačimo dobijeni izraz sa C, dobijamo upravo traženi tot.difer. $du(x,y)$.

(8) *SVOĐENJE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE OBLIKA F(X,Y',Y'')=0 NA DIFERENCIJALNU JEDNAČINU PRVOG REDA.*

-$\boldsymbol{F(x,y',y'')=0}$ – jednačina koja ne sadrži y. Potrebno je sniziti red.

-Smena: $\boldsymbol{y'=z}\ \Rightarrow\ y''=z'$, dakle snižava se na jedn. prvog reda: $F(x,z,z')=0$, čije je opšte rešenje $z=z(x,C_1)$. Odatle se, vraćanjem smene dobija $y=\int z(x,C_1)dx+C_2$, što predstavlja opšte rešenje polazne jednačine.

(9) *SVOĐENJE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE OBLIKA F(Y,Y',Y'')=0 NA DIFERENCIJALNU JEDNAČINU PRVOG REDA.*

-$\boldsymbol{F(y,y',y'')=0}$ – jednačina koja ne sadrži x. Potrebno je sniziti red.

-Smena: $\boldsymbol{y'=p(y)}\ \Rightarrow\ y''=\frac{d}{dx}p(y)=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}p$, dakle snižava se na jedn. prvog reda: $F\left(x,p,\frac{dp}{dy}p\right)=0$, čije je opšte rešenje $p=p(y,C_1)$. Odatle se, vraćanjem smene pa integraljenjem dobija opšte rešenje polazne jednačine:

$$\frac{dy}{dx}=p(y,C_1)\ \Rightarrow\ \frac{dy}{p(y,C_1)}=dx\ \Rightarrow\ \int\frac{dy}{p(y,C_1)}=x+C_2$$

(10) *DIFERENCIJALNE JEDNAČINE VIŠEG REDA. OPŠTE REŠENJE. SVOĐENJE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE F(X,Y$^{(K)}$,Y$^{(K+1)}$,...,Y$^{(N)}$)=0 NA DIFERENCIJALNU JEDNAČINU NIŽEG REDA (8 i 9 pitanje).*

-***Opšti oblik*** diferencijalne jedn. n-tog reda: $\boldsymbol{F\left(x,y,y',\dots,y^{(n-1)}\right)=0}$

-***Normalni oblik***: $\boldsymbol{y^{(n)}=f\left(x,y,y',\dots,y^{(n-1)}\right)}$

-F-ja $y=y(x,C_1,C_2,\dots,C_n)$ $(\varphi(x,C_1,C_2,\dots,C_n)=0)$ je ***opšte rešenje*** jednačine na (a,b) ako identički zadovoljava jednačinu po x na (a,b).

-***Košijev problem***: Opšte rešenje diferencijalne jednačine n-tog reda jednačine zavisi od n proizvoljnih konstanata: $y=\varphi(x,C_1,C_2,\dots,C_n)$, pa je za rešavanje potrebno dati početne uslove: $y(x_0)=y_0$; $y'(x_0)={y_0}'$; ...; $y^{(n-1)}(x_0)={y_0}^{(n-1)}$. Ako se nađeno opšte rešenje diferencira $n-1$ puta i u dobijeni rezultat unose početni uslovi, dobija se sistem od n jednačina sa n nepoznatih $(C_1,C_2,\dots,C_n)$, pa ove nepoznate određujemo iz tog sistema.

(11) *HOMOGENA LINEARNA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA DRUGOG REDA. LINEARNO NEZAVISNA REŠENJA. DETERMINANTA VRONSKOG. OPŠTE REŠENJE.*

-Linearna dif.jedn. drugog reda je jednačina linearna u odnosu na nepoznatu funkciju i njene prve i druge izvode: $\boldsymbol{y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)}$. Ako je $f(x)\neq 0$ jednačina je nehomogena, dok se u suprotnom jednačina naziva nehomogenom.

-Razmatramo homogenu linearnu dif.jedn: $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Odavde se odmah vidi da je $y = 0$ rešenje bilo koje jednačine ovog tipa, te stoga nije od interesa, pa se naziva i trivijalno rešenje.

-**Teorema**: Ako je $y(x)$ neko rešenje homogene linearne dif.jedn, onda je i $C \cdot y(x)$ takođe rešenje te jednačine. (ne treba dokazivati)

-**Teorema**: Ako su $y_1(x)$ i $y_2(x)$ rešenja homogene linearne dif.jedn, tada je i svaka njihova linearna kombinacija $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ rešenje jednačine.

-**Dokaz**: Ako dva puta diferenciramo f-ju: $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, dobićemo:

$$y' = C_1{y_1}'(x) + C_2{y_2}'(x)$$

$$y'' = C_1{y_1}''(x) + C_2{y_2}''(x)$$

Ako sada zamenimo ove rezultate u $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, dobija se:

$$\begin{aligned} &C_1{y_1}'' + C_2{y_2}'' + p(C_1{y_1}' + C_2{y_2}') + q(C_1y_1 + C_2y_2) \\ &\qquad = C_1({y_1}'' + p{y_1}' + qy_1) + C_2({y_2}'' + p{y_2}' + qy_2) = 0 \end{aligned}$$

jer su, po pretpostavci, $y_1(x)$ i $y_2(x)$ rešenja gornje jednačine, pa su oba izraza u zagradama jednaka nuli. Dakle, i linearna kombinacija je takođe rešenje jednačine.

-Dva rešenja su linearno zavisna ako je $\frac{y_2}{y_1} = const.$ odnosno $\alpha y_1 + \beta y_2 = 0$, a linearno nezavisna u suprotnom slučaju.

-Ako su $y_1(x)$ i $y_2(x)$ dva rešenja homogene jednačine tada se funkcionalna determinanta:

$$\boldsymbol{W(x)} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{y_1} & \boldsymbol{y_2} \\ \boldsymbol{{y_1}'} & \boldsymbol{{y_2}'} \end{vmatrix}$$

zove ***determinanta Vronskog*** odnosne jednačine.

-**Teorema**: Ako su $y_1(x)$ i $y_2(x)$ dva linearno nezavisna rešenja homogene jednačine, tada je odgovarajuća $W \neq 0, \forall x \in (a, b)$, a ako su linearno zavisna, tada je $W = 0$.

-**Teorema**: Ako su $y_1(x)$ i $y_2(x)$ dva linearno nezavisna rešenja homogene jednačine, tada netrivijalna linearna kombinacija tih f-ja: $y = C_1y_1 + C_2y_2$ takođe predstavlja opšte rešenje jednačine. U suprotnom slučaju, linearna kombinacija bi sadržala samo jednu konstantu, pa ne bi mogla predstavljati opšte rešenje jednačine.

-**Dokaz**: Odmah se vidi da f-ja $C_1y_1 + C_2y_2$ identički zadovoljava jednačinu. Dokažimo da se iz opšteg rešenja za date proizvoljne uslove mogu odrediti odgovarajuće vrednosti integracionih konstanata C_1 i C_2. U tom cilju stavimo početne vrednosti u homogeni sistem jednačina:

$$\begin{cases} \alpha y_{10} + \beta y_{20} = 0 \\ \alpha {y_{10}}' + \beta {y_{20}}' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha y_1(x_0) + \beta y_2(x_0) = 0 \\ \alpha {y_1}'(x_0) + \beta {y_2}'(x_0) = 0 \end{cases}$$

Ovaj sistem ima jedinstveno rešenje za proizvoljne početne vrednosti y_0 i ${y_0}'$ akko je njegova determinanta (Vronskog) različita od nule:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ {y_{10}}' & {y_{20}}' \end{vmatrix} \neq 0$$

gde je $y_{10} = y_1(x_0)$ itd. Kako je, po pretpostavci, $y_2 = y_1u(x)$ tada je, na osnovu predhodne teoreme, $W \neq 0$ za svako x a to znači i za naše x_0, što znači da sistem ima jedinstveno odgovarajuće rešenje (C_{10}, C_{20}) i da smo samim tim dobili i odgovarajuće partikularno rešenje.

(12) ***NALAŽENJE OPŠTEG REŠENJA HOMOGENE LINEARNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE DRUGOG REDA, AKO JE POZNATO JEDNO NJENO PARTIKULARNO REŠENJE. STRUKTURA OPŠTEG REŠENJA NEHOMOGENE LINEARNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE.***

-**Teorema**: Ako je $y_1(x)$ jedno partikularno rešenje jedn. drugog reda: $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, onda se drugo, linearno nezavisno rešenje $y_2(x)$ nalazi iz jednačine prvog reda.

-**Dokaz**: Prema pretpostavci je: $y_2 = u \cdot y_1$, pa je:

$$y_2{}' = u \cdot y_1{}' + u' \cdot y_1$$

$$y_2{}'' = u \cdot y_1{}'' + 2u'y_1{}' + u'' \cdot y_1$$

$$y_2{}'' + py_2{}' + qy_2 = u[y_1{}'' + py_1{}' + qy_1] + u'(2y_1{}' + py_1) + u''y_1$$

gde su leva strana i izraz u srednjoj zagradi na desnoj strani identički jednaki 0. Zato ostaje:

$$u''y_1 + u'(2y_1{}' + py_1) = 0$$

$$\frac{du'}{dx} + \left(2\frac{y_1{}'}{y_1} + p\right)u' = 0$$

a to je jednačina prvog reda po u'. Odatle se nalazi (razdvajanjem promenljivih) $u'(x)$, odakle neposredno i $u(x)$, a time je dobijeno i $y_2 = uy_1$.

-Pogledajmo nehomogenu diferencijalnu jednačinu drugog reda:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

Ovoj jednačini odgovara homogena diferencijalna jednačina sa istom levom stranom

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

-**Teorema**: Opšte rešenje nehomogene linearne dif.jedn. je zbir opšteg rešenja odgovarajuće homogene i proizvoljnog partikularnog rešenja $y_p(x)$ date nehomogene jednačine: $y = C_1y_1 + C_2y_2 + y_p(x)$.

-**Dokaz**: Neka je $y_h(x)$ opšte rešenje odgovarajuće homogene jednačine, a $y_p(x)$ proizvoljno malo partikularno rešenje date nehomogene jednačine. Diferenciranjem $y = y_h(x) + y_p(x)$ se dobija:

$$y' = y_h{}'(x) + y_p{}'(x)$$

$$y'' = y_h{}''(x) + y_p{}''(x)$$

pa, s obzirom da leva strana jednačine postaje:

$$[y_h{}'' + p(x)y_h{}' + q(x)y_h] + [y_p{}'' + p(x)y_p{}' + q(x)y_p]$$

gde je izraz u prvoj zagradi jednak nuli jer je $y_h(x)$ rešenje homogene jednačine, a izraz u drugoj zagradi je jednak $f(x)$ jer je $y_p(x)$ rešenje nehomogene jednačine. Dakle, opšte rešenje ima oblik:

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + y_p(x)$$

gde su y_1 i y_2 dva linearno nezavisna partikularna rešenja odgovarajuće homogene jednačine, a $y_p(x)$ je neko partikularno rešenje date nehomogene jednačine.

(13) ***HOMOGENA LINEARNA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA DRUGOG REDA S KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA.***

-Ovo je jednačina oblika: $\boldsymbol{y'' + a_1 y' + a_2 y = 0}$, gde su koeficijenti a_1 i a_2 realni brojevi. Potražimo jedno rešenje te jednačine u obliku $y = e^{kx}$, gde konstantu k treba odrediti tako da f-ja e^{kx} identički zadovoljava tu jednačinu. Kako je $y' = ke^{kx}$ i $y'' = k^2 e^{kx}$, znači da treba da bude zadovoljeno:

$$e^{kx}(k^2 + a_1 k + a_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 + a_1 k + a_2 = 0$$

Dakle, može se zaključiti da će f-ja e^{kx} biti rešenje homogene jednačine akko je k koren kvadratne jednačine tzv. ***karakteristične jednačine*** date homogene jednačine.

-**Teorema**: Ako homogenu diferencijalnu jedn. sa realnim konstantnim koeficijentima zadovoljava kompleksna f-ja: $u(x) + iv(x)$, tada i svaka od f-ja $u(x)$ i $v(x)$ takođe zadovoljava tu jednačinu.

-**Dokaz**: iz uslova da data f-ja zadovoljava tu jednačinu sledi:

$$(u'' + a_1 u' + a_2 u) + i(v'' + a_1 v' + a_2 v) = 0$$

odakle, na osnovu: $a + ib = 0,\ a = 0,\ b = 0$, sledi i da je:

$$u'' + a_1 u' + a_2 u = 0 \quad \text{i} \quad v'' + a_1 v' + a_2 v = 0$$

što znači da su zaista i $u(x)$ i $v(x)$ rešenja date jednačine.

-Razlikujemo tri moguća slučaja za korene karakteristične jednačine:

(1) $\boldsymbol{k_1 \neq k_2}$; $\boldsymbol{k_1, k_2 \in R}$ – odmah dobijamo dva rešenja: $e^{k_1 x}$ i $e^{k_2 x}$. Očigledno je da je njihov količnik: $e^{(k_1 - k_2)x} \neq const.$ što znači da su ta rešenja linearno nezavisna. Opšte rešenje ima oblik:

$$\boldsymbol{y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}}$$

(2) $\boldsymbol{k_1 = k_2 = k}$; $\boldsymbol{k \in R}$ – u ovom slučaju imamo samo jedno rešenje $y_1 = e^{kx}$. Na osnovu teoreme (sa početka 12-og pitanja) nalazimo drugo, linearno nezavisno partikularno rešenje. Imamo:

$$\frac{du'}{dx} = \left(2\frac{y_1'}{y_1} + p\right)u' = 0; \qquad y_1 = e^{kx}, y_1' = ke^{kx}, k = \frac{-a_1}{2}\ (iz\ karak.jedn)$$

$$\frac{du'}{dx} = 0 \ \Rightarrow\ u' = C \ \Rightarrow\ u = xC \ \Rightarrow\ u = x\ \ (za\ C = 1)$$

Sada je $y_2 = xy_1 = xe^{kx}$, pa je: $C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}$. Dakle, opšte rešenje je:

$$\boldsymbol{y = (C_1 + C_2 x)e^{kx}}$$

(3) $\boldsymbol{k_{1,2} = a \pm bi,\ b \neq 0}$ – imamo dva rešenja: $y_1 = e^{(a+bi)x}$ i $y_2 = e^{(a-bi)x}$ gde je:

$$e^{(a\pm bi)x} = e^{ax}e^{\pm ibx} = e^{ax}(cosbx \pm isinbx) = e^{ax}cosbx \pm e^{ax}\ isinbx$$

Na osnovu predhodne teoreme: f-ja $e^{ax}cosbx$ i $e^{ax}\ sinbx$, predstavljaju dva partikularna rešenja date jednačine i čine fundamentalni sistem rešenja te jednačine: dakle ovde je opšte rešenje:

$$\boldsymbol{y = e^{ax}(C_1 cosbx + C_2 sinbx)}$$

(14) ***METODA NEODREĐENIH KOEFICIJENATA ZA REŠAVANJE NEHOMOGENE LINEARNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE DRUGOG REDA SA KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA.***

-Razmatramo nehomogenu jednačinu $y'' + a_1y' + a_2y = f(x)$ sa konstantnim koeficijentima a_1 i a_2, čije je opšte rešenje zbir opšteg rešenja odgovarajuće homogene jednačine i nekog partikularnog rešenja. Cilj nam je da nađemo to partikularno rešenje, pa razmatramo specijalne slučajeve:

(1) Ako je $\boldsymbol{f(x) = P(x)e^{mx}}$, gde je $P(x)$ polinom, tada jednačina ima partikularno rešenje oblika:

$$y_p = x^nQ(x)e^{mx}$$

gde je $Q(x)$ polinom istog stepena kao i $P(x)$ i uz to, ako m nije koren karakteristične jednačine:

$$k^2 + a_1k + a_2 = 0$$

tada je $n = 0$, a ako je m koren kar.jedn. tada n označava višestrukost tog korena. Kada se ovo rešenje unese u polaznu jednačinu, koeficijenti polinoma $Q(x)$ se određuju po principu neodređenih koeficijenata.

(2) Neka je u polaznoj jednačini $\boldsymbol{f(x) = acos\,\beta x + bsin\beta x}$. Ako brojevi $\pm i\beta$ nisu koreni odgovarajuće kar.jedn. tada jednačina ima partikularno rešenje oblika:

$$y_p = Acos\beta x + Bsin\beta x$$

sa zasad neodređenim konstantama A i B; a ako su brojevi $\pm i\beta$ rešenja kar.jedn. tada je rešenje oblika:

$$y_p = x(Acos\beta x + Bsin\beta x)$$

(3) Neka je u polaznoj jednačini $\boldsymbol{f(x) = e^{\alpha x}(P(x)cos\beta x + Q(x)sin\beta x)}$, gde su $P(x)$ i $Q(x)$ polinomi. Ako $\alpha \pm i\beta$ nisu koreni kar.jedn, tada partikularno rešenje ima oblik:

$$y = e^{\alpha x}(R(x)cos\beta x + S(x)sin\beta x)$$

gde su $R(x)$ i $S(x)$ polinomi, sa zasad neodređenim koeficijentima, istog stepena sa onim od polinoma $P(x)$ i $Q(x)$ čiji je stepen veći. Ako brojevi $\alpha \pm i\beta$ jesu rešenja kar.jedn. tada je rešenje oblika:

$$y = xe^{\alpha x}(R(x)cos\beta x + S(x)sin\beta x)$$

(15) ***METODA VARIJACIJE KONSTANTI ZA REŠAVANJE NEHOMOGENE LINEARNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE DRUGOG REDA SA KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA.***

-Takođe omogućuje nalaženje partikularnog rešenja nehomogene diferencijalne jednačine, uz činjenicu da je neophodno znati rešenje odgovarajuće homogene. Ova metoda se koristi i pri rešavanju nehomogenih jednačina sa konstantnim koeficijentima kada je $f(x)$ proizvoljna f-ja.

-Pretpostavimo da smo za odgovarajuću homogenu jednačinu našli opšte rešenje: $y = C_1y_1 + C_2y_2$. Partikularno rešenje ćemo tražiti u obliku: $\boldsymbol{y_p = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2}$, tj. variraćemo konstante. $C_1(x)$ i $C_2(x)$ su zasad nepoznate f-je, koje ćemo odrediti iz uslova da $y_p(x)$ zadovoljava polaznu jednačinu, a y_1 i y_2 su poznata linearno nezavisna partikularna rešenja homogene jedn. Diferenciranjem dobijamo:

$$y_p' = C_1'(x)y_1 + C_1(x)y_2' + C_2'(x)y_2 + C_2(x)y_2'$$

Ako su $C_1(x)$ i $C_2(x)$ tako odabrane f-je da ovaj izraz ima isti oblik kao i kad zavisi od običnih konstanata C_1 i C_2, tj. ako je $C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0$, tada se dobija:

$$\begin{cases} y_p' = C_1'(x)y_1 + C_1(x)y_2' \\ y_p'' = C_1(x)y_1'' + C_2(x)y_2'' + C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' \end{cases}$$

Ako pomnožimo y_p sa $q(x)$, y_p' sa $p(x)$ i unesemo zajedno sa y_p'' u polaznu jednačinu dobijamo:

$$C_1(x)(y_1'' + py_1' + qy_1) + C_1(x)(y_2'' + py_2' + qy_2) + C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x)$$

gde su izrazi u zagradama jednaki nuli, jer su y_1 i y_2 po pretpostavci rešenja homogene jednačine.

-Dakle, da bi f-ja $y_p = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$ predstavljala partikularno rešenje polazne jednačine, mora biti zadovoljen i uslov $C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x)$. Uslovi daju sistem jednačina:

$$\begin{cases} \boldsymbol{C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 = 0} \\ \boldsymbol{C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x)} \end{cases}$$

čija je determinanta, kako je i dokazano $W(x) \neq 0$, što znači da prvo možemo iz predhodnog sistema naći $C_1'(x)$ i $C_2'(x)$, a zatim integracijom i $C_1(x)$ i $C_2(x)$.

(16) ***HOMOGENE LINEARNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE VIŠEG REDA. FUNDAMENTALNI SISTEM REŠENJA. DETERMINANTA VRONSKOG.***

-Homogena linearna diferencijalna jednačina n-tog reda ima oblik:

$$\boldsymbol{y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0}$$

gde su p_i u opštem slučaju neprekidne f-je nad istim intervalom. Ako su svi $p_i=const.$ imamo homogenu jednačinu sa konstantnim koeficijentima.

-Važe sve teoreme kao i za linearne jednačine drugog reda:

-**Teorema**: Ako je $y_1(x)$ jedno rešenje homogene jednačine tada je i $C_1y_1(x)$ takođe rešenje.

-**Teorema**: Ako su $y_1(x),y_2(x),\dots,y_n(x)$ tada je i svaka njihova netrivijalna linearna kombinacija: $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x)$ rešenje te jednačine.

-Sistem n f-ja $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\dots,\varphi_n(x)$ je linearno zavistan ako se bilo koja od tih f-ja može prestaviti kao netrivijalna linearna kombinacija ostalih, a linearno nezavisan u nijedna od njih ne može predstaviti na taj način.

-Sistem od n međusovno nezavisnih partikularnih rešenja homogene linearne dif.jedn. n-tog reda zove se ***fundamentalni sistem rešenja*** te jednačine.

-**Teorema**: Opšte rešenje homogene jednačine n-tog reda ima oblik:

$$\boldsymbol{y_h=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n}$$

gde je: $y_1(x),y_2(x),\dots,y_n(x)$ fundamentalni sistem rešenja te jednačine.

-Teorema: Ako se zna jedno partikularno rešenje homogene jednačine n-tog reda, tada se red te jednačine može sniziti za jedan.

-Ako su $y_1(x),y_2(x),\dots,y_n(x)$ partikularna rešenja homogene jednačine onda odgovarajuća determinanta Vronskog glasi:

$$W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ {y_1}' & {y_2}' & \cdots & {y_n}' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {y_1}^{(n-1)} & {y_2}^{(n-1)} & \cdots & {y_n}^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

-**Teorema**: Da bi sistem od n partikularnih rešenja $y_1(x),y_2(x),\dots,y_n(x)$ bio linearno nezavisan (fundamentalan), neophodno je i dovoljno da determinanta vronskog bude $W\neq 0$.

-Determinantu Vronskog koristimo i kad tražimo partikularno rešenje homogene jednačine za date početne uslove: $y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)={y_0}',\dots,\ y^{(n-1)}(x_0)={y_0}^{(n-1)}$. Tada u opštem rešenju te jednačine: $y=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n$, treba odrediti odgovarajuće vrednosti konstanata za koje imamo sistem linearnih algebarskih jednačina:

$$\begin{cases} C_1y_{10}+C_2y_{20}+\cdots+C_ny_{n0}=y_0 \\ C_1y_{10}'+C_2{y_{20}}'+\cdots+C_ny_{n0}'=y_0' \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ C_1y_{10}^{(n-1)}+C_2{y_{20}}^{(n-1)}+\cdots+C_ny_{n0}^{(n-1)}=y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Kako je determinanta tog sistema $W(x_0)\neq 0$, dobićemo jedinstveno rešenje $(C_{10},C_{20},\dots,C_{n0})$ i odgovarajuće partikularno rešenje: $y_0=C_{10}y_1+C_{20}y_2+\cdots+C_{n0}y_n$.

(17) *OPŠTE REŠENJE NEHOMOGENE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE N-TOG REDA. METODA VARIJACIJE KONSTANATA.*

-Opšte rešenje nehomogene jednačine n-tog reda:

$$\boldsymbol{y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x)}$$

je zbir opšteg rešenja $y_h(x)$ odgovarajuće homogene jednačine i jednog, bilo kojeg partikularnog rešenja $y_p(x)$ te homogene jednačine: $y = y_h + y_p$, tj: $\boldsymbol{y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n + y_p}$

-I za nehomogene jednačine višeg reda je opšta metoda nalaženja partikularnog rešenja metoda varijacije konstanata. Kao i u slučaju nehom.jedn. drugog reda, polazi se od pretpostavke da, ako su u opštem rešenju odgovarajuće umesto integracionih konstanata $C_1, C_2, \dots, C_n$ funkcije: $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$. tada partikularno rešenje tražimo u obliku:

$$y_p = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + \cdots + C_n(x) y_n$$

gde f-je $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ zadovoljavaju uslove:

$$\begin{cases} C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n = 0 \\ {C_1}' y_1' + {C_2}' {y_2}' + \cdots + {C_n}' y_n' = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ {C_1}' y_1^{(n-1)} + {C_2}' {y_2}^{(n-1)} + \cdots + {C_n}' y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

-Zapaža se da leve strane ovih jednačina imaju isti oblik kao i kada bi ${C_i}'$ bile konstante, a ne f-je od x. Sve jednačine osim poslednje predstavljaju $n-1$ uslov koji smo imali pravo da uvedemo za ne nepoznatih f-ja $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$, a poslednja jednačina je rezultat smene $y, y', \dots, y^{(n-2)}$, zajedno sa tim uslovima u izvodu $y^{(n-1)}$.

-Ovaj sistem ima determinantu $W(x) \neq 0$ za sve dospustive x, tako da odatle nalazimo ${C_1}'(x), {C_2}'(x), \dots, {C_n}'(x)$, pa dalje integraljenjem i $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ i traženo partikularno rešenje $y_p(x)$

(18) ***LINEARNA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA N-TOG REDA S KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA.***

-Neka je data homogena diferencijalna jednačina n-tog reda:

$$\boldsymbol{y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0}$$

sa konstantnim koeficijentima a_i. U tom slučaju će njena karakteristična jednačina biti:

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} k + a_n = 0$$

-**Teorema**: Svakom m-tostrukom realnom korenu k karakteristične jednačine odgovara m partikularnih rešenja: e^{kx}, $xe^{kx}, \dots, x^{m-1}e^{kx}$.

-Svakom paru r-tostrukih konjugovano kompleksnih korena $k = \alpha \pm i\beta$ karakteristične jednačine odgovara $2r$ partikularnih rešenja oblika:

$$e^{\alpha x} cos\, \beta x,\ xe^{\alpha x} cos\, \beta x, \dots, x^{r-1} e^{\alpha x} cos\, \beta x$$

$$e^{\alpha x} sin\, \beta x,\ xe^{\alpha x} sin\, \beta x, \dots, x^{r-1} e^{\alpha x} sin\, \beta x$$

Pri tom opšti zbir reda višestrukosti svih koreni treba da bude jednak stepenu n karakteristične jednačine, tj. $m + 2r = n$.

-Ako je data nehomogena jednačina n-tog reda:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

sa konstantnim koeficijentima, tada se, po analogiji sa jednačinom drugog reda, u nekim slučajevima može koristiti metoda neodređenih koeficijenata.

-Ako je desna strana jednačine oblika: $f(x) = e^{\alpha x}(P(x)cos\beta x + Q(x)sin\beta x)$, može se pokazati da partikularno rešenje nehomogene jednačine ima oblik kao i kod nehomogene jedn. drugog reda:

$$y = x^r e^{\alpha x}(R(x)cos\beta x + S(x)sin\beta x)$$

gde je r red višestrukosti korena $\alpha \pm i\beta$ karakteristične jednačine, a R i S su polinomi istog stepena čije koeficijente treba odrediti.

(19) ***PIKAROVA TEOREMA O EGZISTENCIJI I JEDINOSTI PARTIKULARNOG REŠENJA DIFERENCIJALNE JEDNAČINE PRVOG REDA.***

-Ako na $P_{a,b}$ postoji $\frac{\partial f}{\partial y}$ i važi $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq L$, tada važi ***Lipšicov uslov***:

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi)(y_1 - y_2)\right| \leq L|y_1 - y_2|$$

-**Pikarova teorema**: Neka je $P_{a,b} = \{(x,y) \colon |x - x_0| \leq a;\ |y - y_0| \leq b\}$. Ako je $f(x,y)$ na $P_{a,b}$:

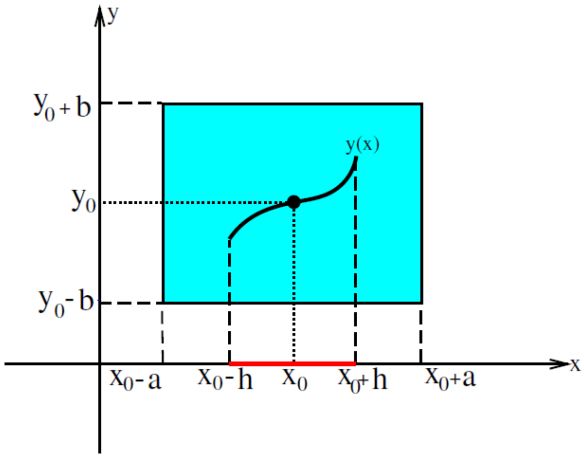
(1) ***neprekidna***;

(2) ***ograničena***, tj. $|f(x,y)| \leq M,\ \forall (x,y) \in P_{a,b}$

(3) ***zadovoljava Lipšicov uslov***:

$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|,\ \ (x,y_1),(x,y_2) \in P_{a,b}$

tada na $(x_0 - h, x_0 + h)$, $h = min\{a, b/M\}$, postoji jedinstveno rešenje Košijevog problema.



-**Skica dokaza**: metoda sukcesivnih aproksimacija:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y),\ \ y(x_0) = y_0 \quad \Rightarrow \quad dy(x) = f\big(x, y(x)\big)dx \quad \Rightarrow \quad \int_{x_0}^{x} dy(x) = \int_{x_0}^{x} f\big(x, y(x)\big)dx$$

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f\big(x, y(x)\big)dx \quad \Rightarrow \quad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(x, y(x)\big)dx$$

Sukcesivne aproksimacije:

$$y_0(x) = y_0$$
$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(x, y_0(x)\big)dx$$
$$\vdots$$
$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(x, y_n(x)\big)dx$$
$$\vdots$$

Rezultat: $y_n(x) \to y(x);\ \ x \in (x_0 - h, x_0 + h)$, gde je $y(x)$ jedinstveno rešenje.

II. SISTEMI DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

(1) *POJAM SISTEMA DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA. RAZNI ZAPISI SISTEMA. REŠENJE, OPŠTE REŠENJE I PROBLEM S POČETNIM USLOVOM.*

-Neka su $x_1, x_2, \dots, x_n$ nepoznate f-je nezavisno promenljive t. Sistem od n jednačina koje uspostavljaju vezu između nezavisno promenljive, nepoznatih f-ja i njihovih prvih izvoda:

$$\boldsymbol{F_1(t, x_1, x_1', \dots, x_n, x_n') = 0}$$
$$\vdots$$
$$\boldsymbol{F_n(t, x_1, x_1', \dots, x_n, x_n') = 0}$$

naziva se sistem diferencijalnih jednačina prvog reda. Ako se ovaj sistem može rešiti po izvodima nepoznatih f-ja dobija se sistem diferencijalnih jednačina:

$$\boldsymbol{x_1' = f_1(t, x_1, \dots, x_n)}$$
$$\vdots$$
$$\boldsymbol{x_n' = f_n(t, x_1, \dots, x_n)}$$

-Za ovakav oblik sistema kaže se da je u ***normalnom obliku***. S obzirom da je $x_i' = \frac{dx_i}{dt}$, poslednji sistem se može pisati i kao produžena proporcija:

$$\boldsymbol{\frac{dx_1}{f_1(t, x_1, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{f_n(t, x_1, \dots, x_n)} = \frac{dt}{1}}$$

što predstavlja tzv. ***simetrični oblik*** sistema.

-F-je $x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t)$ definisane i diferencijalne na intervalu (a, b) nazivaju se rešenje sistema na tom intervalu akko identički zadovoljavaju taj sistem tj. ako je, za svako t iz intervala (a, b):

$$x_1'(t) = f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t))$$
$$\vdots$$
$$x_n'(t) = f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t))$$

-Opšte rešenje sistema je n-parametarska familija f-ja oblika:

$$\begin{matrix} x_1 = f_1(t, C_1, \dots, C_n) & & \varphi_1(t, x_1, \dots, x_n, C_1, \dots, C_n) = 0 \\ \vdots & \Leftrightarrow & \vdots \\ x_n = f_n(t, C_1, \dots, C_n) & & \varphi_n(t, x_1, \dots, x_n, C_1, \dots, C_n) = 0 \end{matrix}$$

-Partikularno rešenje se dobija za konkretne vrednosti $C_1, \dots, C_n$.

-Problem sa početnim uslovom: Da li postoji rešenje Košijevog problema, i ako da, da li je jedinstveno.

(2) *EGZISTENCIJA I JEDINSTVENOST REŠENJA PROBLEMA S POČETNIM USLOVOM ZA SISTEM DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA.*

-Neka je dat sistem diferencijalnih jednačina prvog reda u normalnom obliku:

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ x_n' &= f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

i neka tačka $(t_0, x_1{}^0, \dots, x_n{}^0)$ pripada oblasti definisanosti f-ja $f_1, \dots, f_n$. Osnovni problem u teoriji sistema dif.jedn. se može formulisati na sledeći način: Da li postoji rešenje sistema:

$$x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t)$$

koje zadovoljava uslov: $\boldsymbol{x_1(t_0) = x_1{}^0, \dots, x_n(t_0) = x_n{}^0}$. Ako postoji, da li je takvo rešenje jedinstveno ili ih ima više.

-Pomenuti uslov se naziva ***početni uslov***, a problem nalaženja rešenja sistema koje zadovoljava dati početni uslov naziva Košijev problem. Košijev problem se geometrijski može interpretirati na sledeći način: između svih integralnih krivih koje odgovaraju sistemu naći onu koja prolazi kroz tačku $(t_0, x_1{}^0, \dots, x_n{}^0)$.

-**Peanova teorema**: Neka su f-je $f_1, \dots, f_n$ definisane i neprekidne na (n+1)-dimenzionalnom paralelepipedu: $P = \{(t, x_1, \dots, x_n) |\, |t - t_0| < a,\ |x_i - x_i{}^0| \leq b,\ i = 1, \dots, n\}$, gde su a i b pozitivni brojevi. Neka je $M > 0$ takvo da je $|f_i(t, x_1, \dots, x_n)| \leq M,\ (t, x_1, \dots, x_n) \in P$. Neka je, najzad, $h = min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$. Tada sistem na intervalu $(t_0 - h,\ t_0 + h)$ ima bar jedno rešenje koje zadovoljava uslov.

-Iz Peanove teoreme zaključujemo da ne neprekidnost f-ja $f_1, \dots, f_n$ u okolini tačke $(t_0, x_1{}^0, \dots, x_n{}^0)$ dovoljna za postojanje rešenja Košijevog problema. Ali, ovo nije dovoljno za jedinstvenost.

-**Pikarova teorema**: Isti uslovi kao i gore. Pretpostavimo da na P postoje parcijalni izvodi: $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right| \leq K$. Tada sistem na intervalu $(t_0 - h,\ t_0 + h)$ ima jedno i samo jedno rešenje.

-**Skica dokaza**: formira se niz uzastopnih aproksimacija rešenja, tj. n nizova f-ja: $\begin{aligned} x_{1,0}(t) &= x_1{}^0 \\ &\vdots \\ x_{n,0}(t) &= x_n{}^0 \end{aligned}$, za $k = 0$ i t iz intervala. Dalje, za $k \geq 1$ i t iz intervala:

$$x_{1,k}(t) = x_1{}^0 + \int_{t_0}^{t} f_1\big(t, x_{1,k-1}(t), \dots, x_{n,k-1}(t)\big) dt$$

$$\vdots$$

$$x_{n,k}(t) = x_n{}^0 + \int_{t_0}^{t} f_n\big(t, x_{1,k-1}(t), \dots, x_{n,k-1}(t)\big) dt$$

Pokazuje se da nizovi ovih f-ja konvergiraju ka neprekidnim f-jama $x_1(t), \dots, x_n(t)$, za koja se dalje pokazuje da su rešenja sistema na intervalu. Najzad se pokazuje i da su f-je $x_1(t), \dots, x_n(t)$ jedina rešenja koja zadovoljavaju početni uslov.

-Ovi stavovi su ***lokalnog*** karaktera (zbog ograničenog intervala), ali se, pod određenim uslovima mogu i proširiti van intervala.

(3) ***VEZA SISTEMA N DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA PRVOG REDA SA DIFERENCIJALNOM JEDNAČINOM N-TOG REDA.***

-Neka je data diferencijalna jednačina n-tog reda rešena po najvišem izvodu:

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$$

Uvedimo nove nepoznate f-je na sledeći način:

$$x_1 = x\,,\ x_2 = x',\ x_3 = x'', \dots,\ x_{n-1} = x^{(n-2)},\ x_n = x^{(n-1)}$$

S obzirom na način uvođenja f-ja $x_1, \dots, x_n$ imamo da je:

$$x_1{}' = x' = x_2,\ \ x_2{}' = x'' = x_3, \dots,\ x_{n-1}{}' = x^{(n-1)} = x_n$$

$$x_n{}' = x^{(n)} = f\big(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}\big) = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Prema tome dobijen je sledeći sistem jednačina u normalnom obliku:

$$\begin{aligned} x_1{}' &= x_2 \\ x_2{}' &= x_3 \\ &\vdots \\ x_{n-1}{}' &= x_n \\ x_n{}' &= f(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

odakle se vidi da je $x = x(t)$ jedno rešenje polazne jednačine akko je

$$x_1 = x(t), x_2 = x'(t), \dots, x_n = x^{(n-1)}(t)$$

rešenje poslednjeg sistema. Dakle, rešavanje jednačine možemo zameniti rešavanjem sistema i obratno.

-Pod određenim predpostavkama sistem diferencijalnih jednačina prvog reda oblika:

$$\begin{aligned} x_1{}' &= f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ x_n{}' &= f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

može se takođe svesti na jednačinu n-tog reda. Postupak je sledeći: prva jednačina se diferencira $n-1$ puta po t, a pritom se posle svakog diferenciranja izvodi $x_1{}', \dots, x_n{}'$ zamenjuju sa $f_1, \dots, f_n$. Dobija se sledeći sistem jednačina:

$$x_1{}'' = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} x_1{}' + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} x_n{}' = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} f_1 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} f_n = \varphi_2(t, x_1, \dots, x_n)$$
$$x_1{}''' = \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} x_1{}' + \cdots + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} x_n{}' = \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} f_1 + \cdots + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} f_n = \varphi_3(t, x_1, \dots, x_n)$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$x_1{}^{(n-1)} = \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial x_1} x_1{}' + \cdots + \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial x_n} x_n{}' = \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial x_1} f_1 + \cdots + \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial x_n} f_n = \varphi_{n-1}(t, x_1, \dots, x_n)$$
$$x_1{}^{(n)} = \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_1} x_1{}' + \cdots + \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_n} x_n{}' = \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_1} f_1 + \cdots + \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_n} f_n = \varphi_n(t, x_1, \dots, x_n)$$

-Prva jednačina polaznog sistema i prvih $n-2$ jednačina poslednjeg sistema čine sistem od $n-1$ nepoznatih $x_2, \dots, x_n$:

$$\begin{gathered} x_1{}' = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ x_1{}'' = \varphi_2(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x_1{}^{(n-1)} = \varphi_{n-1}(t, x_1, \dots, x_n) \end{gathered}$$

Pretpostavimo da je $W \neq 0$ na nekoj $(n+1)$-dimenzionalnoj oblasti D i neka je:

$$\begin{gathered} x_2 = \lambda_2\left(t, x_1, x_1{}', \dots, x_1{}^{(n-1)}\right) \\ \vdots \\ x_n = \lambda_n\left(t, x_1, x_1{}', \dots, x_1{}^{(n-1)}\right) \end{gathered}$$

rešenje sistema (sa parcijalnim izvodima). Smenom ovih f-ja u poslednju jednačinu tog sistema dobijamo vezu:

$$x_1{}^{(n)} = \varphi_n(t, x_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \varphi\left(t, x_1, x_1{}', \dots, x_1{}^{(n-1)}\right)$$

koja predstavlja diferencijalnu jednačinu n-tog reda po x_1.

(4) *PRVI INTEGRALI SISTEMA DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA. NEZAVISNOST PRVIH INTEGRALA, POTREBAN I DOVOLJAN USLOV.*

-Neka je dat sistem diferencijalnih jednačina prvog reda u normalnom obliku:

$$x_1' = f_1(t, x_1, \dots, x_n)$$
$$\vdots$$
$$x_n' = f_n(t, x_1, \dots, x_n)$$

-F-ja $\varphi(t, x_1, \dots, x_n)$, neprekidno diferencijabilna i različita od konstante na oblasti D naziva se integral sistema na oblasti D akko je: $\varphi(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) = C$, gde je: $x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t)$ ma koje rešenje polaznog sistema takvo da je $(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \in D$, a C je konstanta.

-**Teorema**: Neka je f-ja $\varphi(t, x_1, \dots, x_n)$ neprekidno diferencijabilna i različita od konstante na oblasti D. Potreban i dovoljan uslov da φ redstavlja integral sistema na oblasti D dat je sa:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} f_1 + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} f_n = 0, \quad (t, x_1, \dots, x_n) \in D$$

-**Dokaz**:

-Prvo da je ***potreban*** – neka je $(t, x_1{}^0, \dots, x_n{}^0) \in D$ proizvoljna tačka. Prema predpostavci o oblasti D postoji tačno jedno rešenje polaznog sistema $x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t)$, definisano za $t \in (t_0 - h, t_0 + h) = I$, koje zadovoljava uslove. Kako je φ integral sistema biće:

$$\varphi(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) = C \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\varphi(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) = C, \quad t \in I$$

Po pravilu diferenciranja složene f-je imamo da je:

$$\frac{d}{dt}\varphi(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} x_1' + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} x_n' \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} x_1' + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} x_n' = 0$$

Kako je $x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t)$ rešenje sistema, dobijamo konačno da je:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} f_1 + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} f_n = 0$$

-Pokažimo da je uslov ***dovoljan*** – kako $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} f_1 + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} f_n = 0$ važi za $(t, x_1, \dots, x_n) \in D$ važiće, specijalno, i u tačkama oblika $(t, x_1(t), \dots, x_n(t))$, a kako je $x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t)$ rešenje polaznog sistema iz ovog uslova dobijamo:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} x_1' + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} x_n' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\varphi(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) = 0, \quad t \in I$$

odakle sledi da se $\varphi(t, x_1(t), \dots, x_n(t))$ na intervalu I svodi na konstantu, te je drugi deo dokaza završen.

-Jednakost $\varphi(t, x_1, \dots, x_n) = C$ gde je $\varphi(t, x_1, \dots, x_n)$ integral sistema, a C proizvoljna konstanta, naziva se prvi integral sistema.

-Prvi integrali: $\varphi_1(t, x_1, \dots, x_n) = C_1, \dots, \varphi_k(t, x_1, \dots, x_n) = C_k$, nazivaju se ***nezavisnim*** na oblasti D akko ni za jedno $i = 1, \dots, k$ ne postoji neprekidno diferencijabilna f-ja ϕ i oblast $D' \subseteq D$ tako da je:

$$\varphi_i = \phi(\varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}, \varphi_{i+1} \dots, \varphi_n), \quad (t, x_1, \dots, x_n) \in D'$$

U suprotnom se kaže da su dati prvi integrali ***zavisni***.

(5) *NALAŽENJE OPŠTEG I KOŠIJEVOG REŠENJA SISTEMA POMOĊU PRVIH INTEGRALA.*

-Neka je dat sistem diferencijalnih jednačina:

$$
\begin{gathered}
x_1{}' = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\
\vdots \\
x_n{}' = f_n(t, x_1, \dots, x_n)
\end{gathered}
$$

Ako je poznato n nezavisnih prvih integrala datog sistema, sistem se smatra u potpunosti rešenim.

-Zaista, neka su:

$$
\begin{gathered}
\varphi_1(t, x_1, \dots, x_n) = C_1 \\
\vdots \\
\varphi_n(t, x_1, \dots, x_n) = C_n
\end{gathered}
$$

nezavisni prvi integrali ovog sistema i neka je D oblast na kojoj je:

$$
\begin{vmatrix}
\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \\
\vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}
\end{vmatrix} \neq 0
$$

Tada se za svako $(t, x_1{}^0, \dots, x_n{}^0) \in D$ problem nalaženja onog rešenja sistema koje zadovoljava uslov $x_1(t_0) = x_1{}^0, \dots, x_n(t_0) = x_n{}^0$, svodi na rešavanje sistema nelinearnih algebarskih jednačina:

$$
\begin{gathered}
\varphi_1(t, x_1, \dots, x_n) = \varphi_1(t, x_1{}^0, \dots, x_n{}^0) \\
\vdots \\
\varphi_n(t, x_1, \dots, x_n) = \varphi_n(t, x_1{}^0, \dots, x_n{}^0)
\end{gathered}
$$

-Ukoliko je poznato k nezavisnih prvih integrala sistema, u pojedinim slučajevima je red sistema moguće sniziti za k. Ako se sistem nelinearnih jednačina može rešiti po, npr. $x_1, \dots, x_k$, dobija se:

$$
\begin{gathered}
x_1 = \psi_1(t, x_{k+1}, \dots, x_n, C_1, \dots, C_k) \\
\vdots \\
x_k = \psi_k(t, x_{k+1}, \dots, x_n, C_1, \dots, C_k)
\end{gathered} \qquad (*)
$$

Uvrštavanjem dobijenih vrednosti u poslednjih $n - k$ jednačina polaznog sistema dobija se sistem sa $n - k$ jednačina sa $n - k$ nepoznatih funkcija:

$$
\begin{gathered}
x_{k+1}{}' = f_{k+1}(t, \psi_1, \dots, \psi_k, x_1 \dots, x_n) \\
\vdots \\
x_n{}' = f_n(t, \psi_1, \dots, \psi_k, x_1 \dots, x_n)
\end{gathered}
$$

Ako je:

$$
\begin{gathered}
x_{k+1} = x_{k+1}(t, C_1, \dots, C_n) \\
\vdots \\
x_n = x_n(t, C_1, \dots, C_n)
\end{gathered}
$$

opšte rešenje gornjeg sistema, uvrštavanjem u $(*)$ dobijamo $x_1, \dots, x_k$ izraženo u funkciji od $t, C_1, \dots, C_n$ i na taj način dolazimo do opšteg rešenja polaznog sistema.

(6) *SISTEMI DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA VIŠEG REDA. SNIŽAVANJE REDA.*

-Opšti oblik sistema diferencijalnih jednačina višeg reda je sledeći:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{F_1(t, x_1, x_1', \dots, x_1^{(k_1)}, \dots, x_n, x_n', \dots, x_n^{(k_n)} = 0}\\ \vdots \\ \boldsymbol{F_n(t, x_1, x_1', \dots, x_1^{(k_1)}, \dots, x_n, x_n', \dots, x_n^{(k_n)} = 0}\end{gathered}$$

Ako se sistem može rešiti po najvišim izvodima dobija se normalni oblik sistema višeg reda:

$$\begin{gathered}x_1^{(k_1)} = f_1(t, x_1, x_1', \dots, x_1^{(k_1-1)}, \dots, x_n, x_n', \dots, x_n^{(k_n-1)})\\ \vdots \\ x_n^{(k_n)} = f_n(t, x_1, x_1', \dots, x_1^{(k_1-1)}, \dots, x_n, x_n', \dots, x_n^{(k_n-1)})\end{gathered} \qquad (*)$$

-Ovakav sistem se uvek može svesti na sistem od $k_1 + \cdots + k_n$ jednačina prvog reda. Uvodimo smene:

$$\begin{array}{ccc} x_{1,1} = x_1 & \cdots & x_{1,n} = x_n \\ x_{2,1} = x_1' & & x_{2,n} = x_n' \\ \vdots & & \vdots \\ x_{k_1-1,1} = x_1^{(k_1-2)} & \cdots & x_{k_n-1,n} = x_n^{(k_1-2)} \\ x_{k_1,1} = x_1^{(k_1-1)} & & x_{k_n,1} = x_n^{(k_1-1)} \end{array}$$

Iz navedenih smena sledi:

$$\begin{array}{ccc} x_{1,1}' = x_{2,1} & \cdots & x_{1,n}' = x_{2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{k_1-1,1}' = x_{k_1,1} & \cdots & x_{k_1-1,n}' = x_{k_1,n} \end{array}$$

što predstavlja $(k_1 - 1) + \cdots + (k_n - 1) = k_1 + \cdots + k_n - n$ diferencijalnih jednačina. Pored toga, na osnovu ovih smena i sistema $(*)$ dobijamo još n diferencijalnih jednačina:

$$\begin{gathered}x_{k_1,1}' = f_1(t, x_{1,1}, \dots, x_{k_1,1}, \dots, x_{1,n}, \dots, x_{k_n,n})\\ \vdots \\ x_{k_1,n}' = f_n(t, x_{1,1}, \dots, x_{k_1,1}, \dots, x_{1,n}, \dots, x_{k_n,n})\end{gathered}$$

Sada je sa poslednjim smenama i ovim izrazom dat sistem od $k_1 + \cdots + k_n$ diferencijalnih jednačina prvog reda sa $k_1 + \cdots + k_n$ nepoznatih funkcija.

-Košijev problem za sistem $(*)$ glasi: među svim rešenjima sistema naći ono koje zadovoljava uslove:

$$\begin{array}{ccc} x_1(t_0) = x_{10} & \cdots & x_n(t_0) = x_{n0} \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{(k_1-1)}(t_0) = x_{10}^{(k_1-1)} & \cdots & x_n^{(k_n-1)}(t_0) = x_{n0}^{(k_n-1)} \end{array}$$

Odgovarajući košijev problem za naredna dva sistema glasi:

$$\begin{array}{ccc} x_{1,1}(t_0) = x_{10} & \cdots & x_{1,n}(t_0) = x_{n0} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{k_1,1}^{(k_1-1)}(t_0) = x_{10}^{(k_1-1)} & \cdots & x_{k_n,n}^{(k_n-1)}(t_0) = x_{n0}^{(k_n-1)} \end{array}$$

Ako je: $x_{1,1} = x_{1,1}(t), \dots, x_{k_1,1} = x_{k_1,1}(t), \dots, x_{1,n} = x_{1,n}(t), \dots, x_{k_n,n} = x_{k_n,n}(t)$ rešenje poslednjeg Košijevog problema, onda je: $x_1 = x_{1,1}(t), \dots, x_n = x_{1,n}(t)$ rešenmje polaznog Košijevog problema.

III. SISTEMI LINEARNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

(1) ***SISTEMI LINEARNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA. EGZISTENCIJA I JEDINSTVENOST REŠENJA.***

-Sistem linearnih diferencijalnih jednačina prvog reda je sistem oblika:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{x_1{}' = a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t)}\\ \vdots \\ \boldsymbol{x_n{}' = a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t)}\end{gathered}$$

-Ako bar jedna od f-ja $b_i(t)$ nije identički jednaka nuli, ovaj sistem se naziva ***nehomogeni sistem***. U suprotnom svodi se na:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{x_1{}' = a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n = 0}\\ \vdots \\ \boldsymbol{x_n{}' = a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n = 0}\end{gathered}$$

i naziva se ***homogeni sistem***. Košijev problem za ovakav sistem se sastoji u nalaženju rešenja: $x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t)$ koje zadovoljava uslov: $x_1(t_0) = x_1{}^0, \dots x_n(t_0) = x_n{}^0$ gde su: $t_0, x_1{}^0, \dots x_n{}^0$ dati brojevi.

-**Vektorski oblik sistema** – Neka je:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} x_1{}' \\ \vdots \\ x_n{}' \end{bmatrix}, B(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}, A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

tada se nehomogeni sistem može zapisati u vektorskom obliku:

$$\boldsymbol{\frac{dX}{dt} = A(t)X + B(t)}$$

a homogeni u obliku:

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X$$

-Košijev problem za sistem u vektorskom obliku se može napisati: naći $X(t)$ koje zadovoljava uslov:

$$X(t_0) = X_0, \quad X_0 = \begin{bmatrix} x_1{}^0 \\ \vdots \\ x_n{}^0 \end{bmatrix}$$

-***Teorema (Pikarova, globalna):*** Neka su f-je $a_{ij}(t), b_i(t),\ i = 1 \dots n,\ j = 1 \dots n,$ neprekidne na (a, b), neka $t_0 \in (a, b)$ i neka su $x_1{}^0, \dots, x_n{}^0$ proizvoljni realni brojevi. Tada sistem ima jedno i samo jedno rešenje $x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t)$ koje zadovoljava uslov: $x_1(t_0) = x_1{}^0, \dots x_n(t_0) = x_n{}^0$ i ono je definisano na celom intervalu (a, b).

(2) ***HOMOGENI SISTEMI DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA. OSNOVNA SVOJSTVA. OPŠTE REŠENJE HOMOGENOG SISTEMA.***

-Homogeni sistem diferencijalnih jednačina je oblika:

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X$$

(gde je A(t) matrica reda nxn čiji su elementi neprekidne f-je.

-**Teorema**: Ako su:

$$X_1(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{bmatrix}, \dots, X_m(t) = \begin{bmatrix} x_{1m}(t) \\ \vdots \\ x_{nm}(t) \end{bmatrix}$$

rešenja sistema na (a, b) i $C_1, \dots, C_m$ su proizvoljne konstante tada je i ovaj izraz rešenje sistema:

$$X(t) = C_1 X_1(t) + \cdots + C_m X_m(t) = \begin{bmatrix} C_1 x_{11}(t) + \cdots + C_m x_{1m}(t) \\ \vdots \\ C_1 x_{n1}(t) + \cdots + C_m x_{nm}(t) \end{bmatrix}$$

-**Dokaz**: Kako su $X_1(t), \dots, X_m(t)$ rešenja sistema imamo da je:

$$\frac{dX(t)}{dt} = C_1 \frac{dX_1(t)}{dt} + \cdots + C_m \frac{dX_m(t)}{dt} = C_1 A(t) X_1(t) + \cdots + C_m A(t) X_m(t) = A(t)X(t)$$

-Rešenja $X_1(t), \dots, X_m(t)$ su linearno zavisna na (a, b) akko postoje konstante $C_1, \dots, C_m$ od kojih je bar jedna različita od nule, tako da je: $C_1 X_1(t) + \cdots + C_m X_m(t) = 0$. U suprotnom kažemo da su linearno nezavisna na (a, b).

-**Teorema**: Neka su $X_1(t), \dots, X_n(t)$ linearno nezavisna rešenja sistema. Tada opšte rešenje

$$X_h = C_1 X_1(t) + \cdots + C_n X_n(t)$$

sadrži sva rešenja tog sistema.

-**Dokaz**: Neka je $X(t)$ proizvoljno rešenje, a $t_0 \in (a, b)$ fiksirano. Tražimo $C_1, \dots C_n$:

$$C_1 X_1(t_0) + \cdots + C_n X_n(t_0) = X(t_0) \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} C_1 x_{11}(t_0) + \cdots + C_n x_{1n}(t_0) = x_1(t_0) \\ \vdots \\ C_1 x_{n1}(t_0) + \cdots + C_n x_{nn}(t_0) = x_n(t_0) \end{matrix}$$

Nehomogeni je sistem, tj. $W(t_0) \neq 0$, odakle sledi da postoji jedinstveno rešenje ${C_1}^0, \dots, {C_n}^0$. Rešenja $X(t)$ i ${C_1}^0 X_1(t) + \cdots + {C_n}^0 X_n(t)$ zadovoljavaju isti početni uslov u t_0, i odatle, na osnovu Pikarove teoreme, sledi: $X(t) = {C_1}^0 X_1(t) + \cdots + {C_n}^0 X_n(t); \quad t \in (a, b)$.

-Načini zapisa opšteg rešenja:

$$X_h = \Phi(t)C \qquad \textbf{matrični} \text{ zapis}$$

$$X_h = C_1 X_1 + \cdots + C_n X_n \qquad \textbf{vektorski} \text{ zapis}$$

$$\left.\begin{matrix} C_1 x_{11} + \cdots + C_n x_{1n} \\ \vdots \\ C_1 x_{n1} + \cdots + C_n x_{nn} \end{matrix}\right\} \qquad \textbf{skalarni} \text{ zapis}$$

(3) ***FUNDAMENTALNE MATRICE HOMOGENOG SISTEMA DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA. POTREBAN I DOVOLJAN USLOV. OPŠTE REŠENJE SISTEMA IZRAŽENO PREKO FUNDAM-ENTALNE MATRICE.***

-Matrica $\Phi(t)$ reda nxn naziva se ***fundamentalna matrica sistema*** akko su kolone te matrice linearno nezavisna rešenja sistema:

$$\boldsymbol{\Phi(t)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_{11}(t)} & \cdots & \boldsymbol{x_{1n}(t)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{x_{n1}(t)} & \cdots & \boldsymbol{x_{nn}(t)} \end{bmatrix}$$

Napomena: kolone matrice $\Phi(t)$ su rešenja sistema akko $\Phi(t)$ zadovoljava pridruženu matričnu jedn.:

$$\frac{d\Phi}{dt} = A(t)\Phi$$

-**Teorema**: Ako je $\Phi(t)$ fundamentalna matrica, a P nesingularna matrica, onda je $\Psi(t) = \Phi(t)P$ fundamentalna matrica.

-**Dokaz**:

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{d\Phi}{dt}P = A(t)\Phi P = A(t)\Psi; \quad det\Psi = det\Phi \cdot detP \neq 0$$

-Matrični zapis opšteg rešenja sistema: $\boldsymbol{X_h} = \boldsymbol{\Phi(t)C}$

-**Teorema**: Neka su $X_1(t), \dots, X_m(t)$ rešenja sistema. Potreban i dovoljan uslov za linearnu nezavisnost tih rešenja na intervalu (a, b) dat je sa:

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} \neq 0; \;\; t \in (a, b)$$

-**Dokaz**: Neka su $X_1(t), \dots, X_n(t)$ linearno nezavisna rešenja sistema. Pretpostavimo suprotno trvrđenju teoreme, da postoji : $t_0 \in (a, b)$ takvo da je $W(t) = 0$. Tada sistem:

$$\begin{gathered} C_1 x_{11}(t_0) + \cdots + C_m x_{1m}(t_0) = 0 \\ \vdots \\ C_1 x_{n1}(t_0) + \cdots + C_m x_{nm}(t_0) = 0 \end{gathered}$$

osim trivijalnog ima i netrivijalno rešenje $\overline{C_1}, \dots, \overline{C_n}$. Tada je: $X(t) = \overline{C_1}X_1(t) + \cdots + \overline{C_n}X_n(t)$ rešenje sistema koje zadovoljava uslov $X(t_0) = 0$. Isti početni uslov zadovoljava i rešenje $X = 0$. Iz Pikarove teoreme sledi: $\overline{C_1}X_1(t) + \cdots + \overline{C_n}X_n(t) = 0$, što je u kontradikciji sa linearnom nezavisnošću, te je pretpostavka $W(t) = 0$ neodrživa.

-Pokažimo da je uslov dovoljan: Neka je $W(t) \neq 0$. Pretpostavimo da je:

$$C_1 X_1(t) + \cdots + C_n X_n(t) = 0$$

Tada je, za fiksirano $t = t_0$:

$$C_1 X_1(t_0) + \cdots + C_n X_n(t_0) = \begin{bmatrix} C_1 x_{11}(t_0) + \cdots + C_n x_{1n}(t_0) \\ \vdots \\ C_1 x_{n1}(t_0) + \cdots + C_n x_{nn}(t_0) \end{bmatrix} = 0$$

iz čega sledi da konstante $C_1, \dots C_n$ zadovoljavaju homogeni sistem linearnih algebarskih jednačina. Ovde je $W(t_0) \neq 0$ tj, sistem ima samo trivijalna rešenja, što znači da su $C_i = 0$, dakle, rešenja $X_1(t), \dots, X_n(t)$ su, po definiciji, linearno nezavisna.

(4) *NEHOMOGENI SISTEMI. OPŠTE REŠENJE NEHOMOGENOG SISTEMA.*

-Vektorski zapis nehomogenog sistema linearnih diferencijalnih jednačina je:

$$\boldsymbol{\frac{dX}{dt}} = \boldsymbol{A(t)X + B(t)}$$

Ovom sistemu pridružujemo homogeni sistem:

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X$$

-**Teorema**: Neka su $X_1(t), \dots, X_n(t)$ linearno nezavisna rešenja homogenog sistema i neka je $X_p(t)$ jedno partikularno rešenje nehomogenog sistema. Tada opšte rešenje:

$$\boldsymbol{X(t) = C_1X_1(t) + \cdots + C_nX_n(t) + X_p(t)}$$

sadrži sva rešenja nehomogenog sistema.

-**Dokaz**:

$$\frac{dX}{dt} = C_1\frac{dX_1}{dt} + \cdots + C_n\frac{dX_n}{dt} + \frac{dX_p}{dt} = C_1AX_1 + \cdots + C_nAX_1 + AX_p + B$$
$$= A\left(C_1X_1 + \cdots + C_nX_1 + X_p\right) + B = AX + B$$

Dakle, $C_1X_1(t) + \cdots + C_nX_n(t) + X_p(t)$ je rešenje nehomogenog sistema koje zadovoljava isti početni uslov kao rešenje $X(t)$. Na osnovu teoreme o jedinstvenosti rešenja imamo da je:

$$X(t) = C_1X_1(t) + \cdots + C_nX_n(t) + X_p(t)$$

(5) *METODA VARIJACIJE KONSTANATA ZA NEHOMOGENI SISTEM.*

-Neka su:

$$X_1(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{bmatrix}, \dots, X_m(t) = \begin{bmatrix} x_{1m}(t) \\ \vdots \\ x_{m1}(t) \end{bmatrix}$$

linearno nezavisna rešenja sistema. Tražimo opšte rešenje sistema u obliku:

$$X(t) = C_1X_1(t) + \cdots + C_nX_n(t)$$

$$\frac{dX}{dt} = C_1{}'X_1 + C_1X_1{}' + \cdots + C_n{}'X_n + C_nX_n{}'$$

Kako je: $X_1{}' = AX_1, \dots, X_n{}' = AX_n$, ovaj izraz postaje:

$$\frac{dX}{dt} = C_1{}'X_1 + \cdots + C_n{}'X_n + A(t)(C_1X_1 + \cdots + C_nX_n) = C_1{}'X_1 + \cdots + C_n{}'X_n + A(t)X$$

$$= A(t)X + B(t) \quad \Rightarrow \quad C_1{}'X_1 + \cdots + C_n{}'X_n = B(t) \quad \text{tj.}$$

$$C_1{}'\begin{bmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix} + \cdots + C_n{}'\begin{bmatrix} x_{1n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} C_1{}'x_{11} + \cdots + C_n{}'x_{1n} = b_1 \\ \vdots \\ C_1{}'x_{n1} + \cdots + C_n{}'x_{nn} = b_n \end{cases}$$

-Kako su $X_1(t), \dots, X_n(t)$ linearno nezavisna rešenja sistema sledi da je $W \neq 0$ pa sistem ima jedinstveno rešenje: $C_1{}' = v_1(t), \dots, C_n{}' = v_n(t)$. F-je $C_1, \dots C_n$ se određuju integracijom:

$$C_1(t) = \int v_1(t)dt + C_1, \dots, C_n(t) = \int v_n(t)dt + C_n$$

$$X = \left(\int v_1(t)dt + C_1\right)X_1 + \cdots + \left(\int v_n(t)dt + C_n\right)X_n$$

$$= C_1X_1 + \cdots + C_nX_n + \left(\int v_1(t)dt\right)X_1 + \cdots + \left(\int v_n(t)dt\right)X_n = X_h + X_p$$

što predstavlja opšte rešenje nehomogenog sistema.

-**Matrični zapis**:

$$\frac{dX}{dt} = \frac{d\Phi}{dt}C + \Phi\frac{dC}{dt} = A(t)\Phi(t)C(t) + B(t)$$

$$\Phi\frac{dC}{dt} = B(t) \;\Rightarrow\; \frac{dC}{dt} = \Phi^{-1}B(t) \;\Rightarrow\; C(t) = \int \Phi^{-1}B(t)dt + C$$

$$X = \Phi(t)\left(\int \Phi^{-1}B(t)dt + C\right) = \Phi(t)C + \Phi(t) + \Phi(t)\int \Phi^{-1}B(t)dt = X_h + X_p$$

(6) *REŠAVANJE HOMOGENOG SISTEMA SA KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA. KARAKTERISTIČNA JEDNAČINA I KARAKTERISTIČNE VREDNOSTI SISTEMA. JEDNOSTRUKI REALNI KORENI.*

-Posmatramo linearni homogeni sistem oblika:

$$\frac{dX}{dt} = AX \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} x_1{}' = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ x_n{}' = a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n \end{matrix}$$

Rešenje tražimo u obliku: $x_1{}' = A_1\lambda e^{\lambda t}, \dots, x_n{}' = A_n\lambda e^{\lambda t}$. Kada se to zameni u gornji sistem, imamo:

$$\begin{matrix} A_1\lambda e^{\lambda t} = e^{\lambda t}(a_{11}A_1 + \cdots + a_{1n}A_n) = 0 \\ \vdots \\ A_n\lambda e^{\lambda t} = e^{\lambda t}(a_{n1}A_1 + \cdots + a_{nn}A_n) = 0 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} (a_{11} - \lambda)A_1 + \cdots + a_{1n}A_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}A_1 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)A_n = 0 \end{matrix} \qquad (*)$$

-Netrivijalno rešenje poslednjeg sistema postoji akko je:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{11} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad det(A - \lambda_i) = 0$$

Ova jednačina se naziva karakteristična jednačina sistema. Ova jednačina ima n rešenja $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, koja se nazivaju karakteristične vrednosti sistema.

-<u>I slučaj ($\lambda = a$ je realan jednostruk koren)</u> – tada je, za svako $k = 1, \dots, n$ rang matrice:

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{11} - \lambda \end{bmatrix}$$

jednak $n - 1$. Stoga se za svako $k = 1, \dots, n$ sistem $(*)$ može dovesti na kvazitrougaoni oblik, sa jednom slobodnom i $n - 1$ vezanih promenljivih, a netrivijalno rešenje se može dobiti davanjem proizvoljne vrednosti ($\neq 0$) slobodnoj promenljivoj i rešavanjem po ostalima. Ako je $A_{1k}, \dots, A_{nk}$ jedno netrivijalno rešenje sistema, tom rešenju odgovara rešenje:

$$x_1 = A_{1k}\lambda e^{\lambda_k t}, \dots, x_n = A_{nk}\lambda e^{\lambda_k t}$$

-Dalje se na ovaj način dobija n rešenja sistema koja vektorski možemo da zapišemo:

$$X_1 = \begin{bmatrix} A_{11} \\ \vdots \\ A_{n1} \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t}, \dots, X_n = \begin{bmatrix} A_{1n} \\ \vdots \\ A_{nn} \end{bmatrix} e^{\lambda_n t}$$

S obzirom da su λ_i međusobno različiti, rešenja X_i su linearno nezavisna na intervalu $(-\infty, +\infty)$. Stoga fundamentalna matrica sistema glasi:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} A_{11}e^{\lambda_1 t} & \cdots & A_{1n}e^{\lambda_n t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}e^{\lambda_1 t} & \cdots & A_{nn}e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

a opšte rešenje je: $X(t) = \Phi(t)C$, gde je C konstantan vektor.

(7) ***REŠAVANJE HOMOGENOG SISTEMA SA KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA. KARAKTERISTIČNA JEDNAČINA I KARAKTERISTIČNE VREDNOSTI SISTEMA. JEDNOSTRUKI KOMPLEKSNI KORENI.***

-II slučaj ($\lambda = \alpha \pm i\beta$ je jednostruk kompleksan par) – Ako je $A_{1k} = \gamma_{1k} + i\delta_{1k}, \dots, A_{nk} = \gamma_{nk} + i\delta_{nk}$ jedno rešenje sistema $(*)$ tada je: $x_1 = A_{1k}\lambda e^{\lambda_k t}, \dots, x_n = A_{nk}\lambda e^{\lambda_k t}$ kompleksno rešenje polaznog sistema. Obzirom da je: $e^{\lambda_k t} = e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(cos\beta t + isin\beta t)$ možemo razdvojiti realni i imaginarni deo. Dobijaju se dva realna rešenja sistema $(*)$:

$$x_1 = e^{\alpha t}(\gamma_{1k}cos\beta t - \delta_{1k}sin\beta t), \dots, x_n = e^{\alpha t}(\gamma_{nk}cos\beta t - \delta_{nk}sin\beta t)$$

$$x_1 = e^{\alpha t}(\gamma_{1k}cos\beta t + \delta_{1k}sin\beta t), \dots, x_n = e^{\alpha t}(\gamma_{nk}cos\beta t + \delta_{nk}sin\beta t)$$

koja se vektorski mogu zapisati u obliku:

$$X_k = \begin{bmatrix} \gamma_{1k}cos\beta t - \delta_{1k}sin\beta t \\ \vdots \\ \gamma_{nk}cos\beta t - \delta_{nk}sin\beta t \end{bmatrix} e^{\alpha t}; \quad X_{k+1} = \begin{bmatrix} \gamma_{1k}cos\beta t + \delta_{1k}sin\beta t \\ \vdots \\ \gamma_{nk}cos\beta t + \delta_{nk}sin\beta t \end{bmatrix} e^{\alpha t}$$

(8) ***REŠAVANJE HOMOGENOG SISTEMA SA KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA. KARAKTERISTIČNA JEDNAČINA I KARAKTERISTIČNE VREDNOSTI SISTEMA. REALNI VIŠESTRUKI KORENI.***

-III slučaj ($\lambda = a$ je reani višestruki koren) – tada je rešenje sistema $(*)$:

$$x_1 = P_1(t)e^{at}, \dots, x_n = P_n(t)e^{at}$$

gde su $P_i(t)$ polinomi stepena $k-1$ sa neodređenim koeficijentima odakle ćemo dobiti homogeni sistem od $n \cdot k$ jednačina sa $n \cdot k$ nepozatih.

-Za svako $k = 1, .., n$ rang matrice:

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{11} - \lambda \end{bmatrix}$$

je jednak $nk - k$. Stoga se za svako $k = 1, \dots, n$ sistem $(*)$ može dovesti na kvazitrougaoni oblik, sa k slobodnih i $nk - k$ vezanih promenljivih. Dodeljivanjem redom po jednoj od slobodnih promenjivih vrednosti 1, a ostalim slobodnim promenljivim vrednosti 0 i rešavajući po vezanim promenljivim dobija se k različitih rešenja sistema (sa k kolona):

$$\left.\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \to \text{vezane} \to & X_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \to \text{vezane} \to & X_k \end{matrix}\right\} \text{linearno nezavisna rešenja}$$

(9) *ODREĐIVANJE FUNDAMENTALNE MATRICE POMOĆU MATRIČNOG EKSPONENTA.*

-Za niz matrica $(A_k) = (\|a_{ij}{}^k\|)$ reda mxn kaže se da ***konvergira ka matrici*** $A = \|a_{ij}{}^k\|_{mxn}$ ako je:

$$\lim_{k\to\infty} a_{ij}{}^k = a_{ij}, \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m$$

pritom se koristi oznaka:

$$\lim_{k\to\infty} A_k = A$$

-***Matrični red***:

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k$$

konvergira i suma mu je matrica A ako niz delimičnih suma

$$S_p = \sum_{k=0}^{p} A_k$$

konvergira ka A. U tom slučaju pišemo:

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} A_k$$

-Neka je $m \in N \cup \{0\}$; m-ti stepen kvadratne matrice A se definiše sa:

$$A^0 = I; \;\; A^m = A^{m-1}A; \quad m \geq 1$$

Neka je A tada kvadratna matrica. **Matrični eksponent** e^A je matrica koja se definiše sa:

$$\boldsymbol{e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots}$$

-Razmotrimo funkcionalnu matricu e^{At} gde je A data kvadratna matrica, a t realna promenljiva:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{k!} t^k$$

$$\frac{d}{dt} e^{At} = \frac{d}{dt}\left(I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots\right) = A + \frac{A^2}{2!} 2t + \frac{A^3}{3!} 3t^2 = A\left(I + At + \frac{A^2}{2!} t^2 + \cdots\right) = Ae^{At} \quad (*)$$

-Neka je dat linearni homogeni sistem sa konstantnim koeficijentima:

$$\frac{dX}{dt} = AX$$

Pokažimo da je $\Phi(t) = e^{At}$ *fundamentalna matrica* datog sistema. Na osnovu $(*)$ vidi se da matrica $\Phi(t)$ zadovoljava matričnu diferencijalnu jednačinu:

$$\frac{d\Phi}{dt} = A\Phi$$

Obzirom da je i $\det \Phi(t) \neq 0$, zaključujemo da je $\Phi(t)$ fundamentalna matrica sistema. Prema tome, opšte rešenje je dato sa: $X(t) = e^{At}C$, gde je C konstantan vektor.

-***Rešenje Košijevog problema***:

$$\frac{dX}{dt} = AX; \quad X(t_0) = X_0$$

može se takođe napisati pomoću matričnog eksponenta:

$$X(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)X_0 = e^{At}(e^{At_0})^{-1}X_0$$

Iz osobina matrica imamo:

$$(e^{At_0})^{-1} = e^{-At_0}; \quad e^{At}e^{-At_0} = e^{A(t-t_0)}$$

pa je rešenje Košijevog problema dato sa:

$$\boldsymbol{X(t) = e^{A(t-t_0)}X_0}$$

(10) *STABILNOST REŠENJA SISTEMA LINEARNIH JEDNAČINA S KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA.*

-Neka je dat sistem linearnih jednačina:

$$\begin{gathered} x_1' = a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) = 0 \\ \vdots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t) = 0 \end{gathered}$$

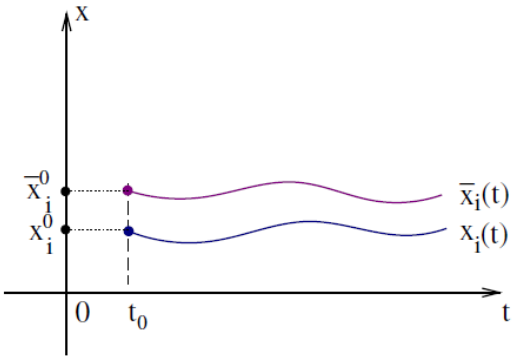
-***Predpostavke***: f-je $b_1(t), \dots, b_n(t)$ su neprekidne za $t \geq t_0$, ${x_1}^0, \dots, {x_n}^0$ su dati brojevi. Prema Pikarovoj teoremi, postoji jedinstveno rešenje sistema koje za $t = t_0$ prolazi kroz tačku ${x_1}^0, \dots, {x_n}^0$. Tada rešenje sistema zavisi od početnih uslova:

$$x_1 = x_1(t, t_0, {x_1}^0, \dots, {x_n}^0), \dots, x_n = x_n(t, t_0, {x_1}^0, \dots, {x_n}^0)$$

Neka su brojevi $\overline{{x_1}^0}, \dots, \overline{{x_n}^0}$ bliski redom brojevima ${x_1}^0, \dots, {x_n}^0$ i obeležimo sa:

$$x_1 = x_1\left(t, t_0, \overline{{x_1}^0}, \dots, \overline{{x_n}^0}\right), \dots, x_n = x_n\left(t, t_0, \overline{{x_1}^0}, \dots, \overline{{x_n}^0}\right)$$

ono rešenje sistema koje za $t = t_0$ prolazi kroz tačku: $\overline{{x_1}^0}, \dots, \overline{{x_n}^0}$.



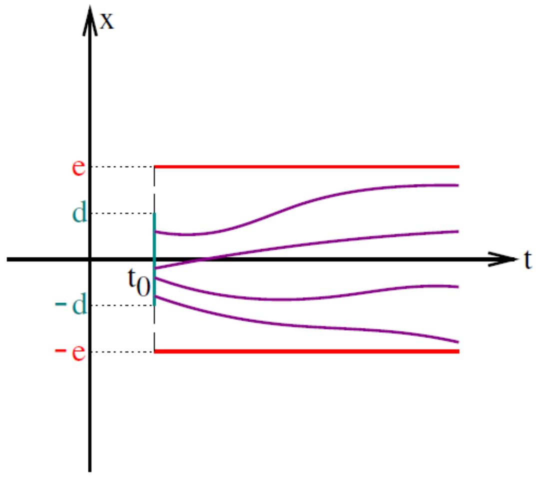
-***Pitanje***: Ako su ${x_i}^0$ i $\overline{{x_i}^0}$ bliski, da li će rešenja ostati bliska u budućnosti.

-Ispitivanje stabilnosti proizvoljnog rešenja se svodi na ispitivanje stabilnosti trivijalnog rešenja homohenog sistema:

$$x_1{}' = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0$$
$$\vdots$$
$$x_n{}' = a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = 0$$

-Trivijalno rešenje je **stabilno** ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takvo da je:

$$\left|\overline{x_\iota{}^0}\right| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\overline{x_\iota}(t)| < \varepsilon; \quad t \geq t = t_0$$

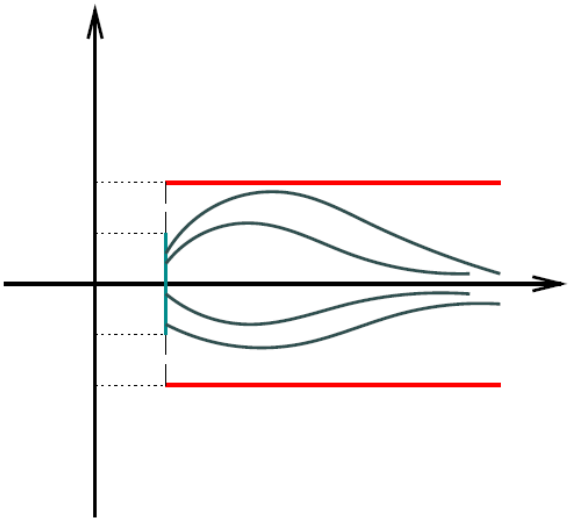


-Trivijalno rešenje je **asimptotski stabilno** ako je:

a) stabilno;

b) postoji $\delta > 0$ takvo da je:

$$\left|\overline{x_\iota{}^0}\right| < \delta \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} \overline{x_\iota}(t) = 0$$



-**Teorema**: Trivijalno rešenje je asimptotski stabilno akko svi koreni karakteristične jednačine imaju negativne realne delove.

-**Teorema**: Ako bar jedan koren ima pozitivan realan deo, onda trivijalno rešenje nije stabilno.