IV. PARCIJALNE JEDNAČINE PRVOG REDA

(1) LINEARNE HOMOGENE PARCIJALNE JEDNAČINE. OSNOVNE TEOREME. OPŠTE REŠENJE.

-***Parcijalna diferencijalna jednačina*** prvog reda je jednačina oblika:

$$\boldsymbol{F\left(x_1,\dots,x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)=0}$$

gde je u nepoznata f-ja nezavisno promenljivih $x_1,\dots,x_n$.

-F-ja $u=u(x_1,\dots,x_n)$ naziva se ***rešenje jednačine na datoj oblasti D*** ako je identički zadovoljava na toj oblasti, tj. ako je za $(x_1,\dots,x_n)\in D$:

$$F\left(x_1,\dots,x_n,u(x_1,\dots,x_n),\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,\dots,x_n),\dots,\frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1,\dots,x_n)\right)=0$$

-***Linearna homogena parcijalna jedn.*** prvog reda je jedn. oblika:

$$\boldsymbol{P_1(x_1,\dots,x_n),\frac{\partial u}{\partial x_1}+\dots+P_n(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}=0}$$

-Kod linearnih jednačina, primećujemo da je $u=C$ rešenje. Da bismo došli do drugih, neočiglednih rešenja, ovoj jednačini pridružujemo sistem dif.jedn. u simetričnom obliku:

$$\frac{dx_1}{P_1(x_1,\dots,x_n)}=\dots=\frac{dx_n}{P_n(x_1,\dots,x_n)}$$

-**Teorema**: F-ja $\varphi(x_1,\dots,x_n)$, neprekidno diferencijabilna i različita od konstante na oblasti D, je rešenje jednačine akko je $\varphi(x_1,\dots,x_n)=C$ prvi integral pridruženog sistema.

-**Dokaz**: Kako je $P_n(x_1,\dots,x_n)\neq 0$, sistem se može zapisati:

$$\frac{dx_i}{dx_n}=\frac{P_i(x_1,\dots,x_n)}{P_n(x_1,\dots,x_n)},\quad i=1,\dots,n-1$$

Pretpostavimo da je $\varphi(x_1,\dots,x_n)=C$ prvi integral sistema. Na osnovu teoreme o potrebnom i dovoljnom uslovu za prvi integral sistema, je za $(x_1,\dots,x_n)\in D$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}+\frac{P_1}{P_n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+\dots+\frac{P_{n-1}}{P_n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_{n-1}}=0\quad\Leftrightarrow\quad P_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+\dots+P_n\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}=0$$

odakle se vidi da je f-ja φ zadovoljava jednačinu.

-**Teorema**: Neka su $\varphi_1=C_1,\dots,\varphi_k=C_k$ prvi integrali sistema i neka je F proizvoljna neprekidno diferencijabilna f-ja k promenljivih. Tada je f-ja $u=F(\varphi_1,\dots,\varphi_k)$ rešenje polazne jednačine.

-**Dokaz**: Na osnovu pravila diferenciranja složenih f-ja je:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=\frac{\partial F}{\partial\varphi_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}+\dots+\frac{\partial F}{\partial\varphi_k}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_1}$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial u}{\partial x_n}=\frac{\partial F}{\partial\varphi_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}+\dots+\frac{\partial F}{\partial\varphi_k}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_n}$$

odakle sledi da je:

$$P_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+\cdots+P_n\frac{\partial u}{\partial x_n}=P_1\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial F}{\partial \varphi_k}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1}\right)+\cdots+P_n\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}+\cdots+\frac{\partial F}{\partial \varphi_k}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n}\right)$$
$$=\frac{\partial F}{\partial \varphi_1}\left(P_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}+\cdots+P_n\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n}\right)+\cdots+\frac{\partial F}{\partial \varphi_k}\left(P_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}+\cdots+P_n\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n}\right)$$

Kako su $\varphi_1=C_1,\dots,\varphi_k=C_k$ prvi integrali sistema, na osnovu predhodne teoreme je:

$$P_1\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}+\cdots+P_n\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n}=0 \quad\Rightarrow\quad P_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+\cdots+P_n\frac{\partial u}{\partial x_n}=0$$

-Neka su $\varphi_1(x_1,\dots,x_n)=C_1,\dots,\varphi_{n-1}(x_1,\dots,x_n)=C_{n-1}$ nezavisni prvi integali sistema, i neka je F proizvoljna nep.dif. f-ja $n-1$ promenljivih. Tada se familija f-ja: $u=F(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})$ naziva opšte rešenje linearne homogene jednačine.

-Postupak za nalaženje opšteg rešenja:

(1) linearnoj parcijalnoj jednačini se pridruži sistem

(2) određuje se $n-1$ nezavisnih prvih integrala sistema: $\varphi_1=C_1,\dots,\varphi_{n-1}=C_{n-1}$

(3) opšte rešenje je $u=F(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})$, gde je F nep.dif. f-ja.

(2) *PROBLEM S POČETNIM USLOVOM ZA LINEARNU HOMOGENU JEDNAČINU.*

-Neka je data linearna homogena parcijalna jednačina:

$$P_1(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\cdots+P_n(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}=0$$

neka su f-je $P_1,\dots,P_n$ nep.dif. na D, i neka je npr. $P_n(x_1,\dots,x_n)\neq 0$ za $(x_1,\dots,x_n)\in D$. Pretpostavimo da $({x_1}^0,\dots,{x_n}^0)\in D$. Košijev problem za ovu jednačinu je sledeći: naći ono rešenje koja za $x_n={x_n}^0$ zadovoljava uslov: $u(x_1,\dots,x_{n-1},{x_n}^0)=\varphi(x_1,\dots,x_{n-1})$, gde je φ data nep.dif. f-ja.

-Pokažimo da pod navedenim pretpostavkama Košijev problem ima rešenja. Na osnovu njih sistem:

$$\frac{dx_1}{P_1(x_1,\dots,x_n)}=\cdots=\frac{dx_n}{P_n(x_1,\dots,x_n)}$$

ima $n-1$ nezavisnih prvih integrala definisanih u okolini tačke $({x_1}^0,\dots,{x_n}^0)$. Neka su: $\varphi_1(x_1,\dots,x_n)=C_1,\dots,\varphi_{n-1}(x_1,\dots,x_n)=C_{n-1}$ nezavisni prvi integrali. Za $x_n={x_n}^0$ dobijamo sistem:

$$\begin{matrix}\varphi_1(x_1,\dots,x_{n-1},{x_n}^0)=C_1\\ \vdots\\ \varphi_{n-1}(x_1,\dots,x_{n-1},{x_n}^0)=C_{n-1}\end{matrix}\quad.\quad\text{Neka je:}\quad\begin{matrix}x_1=\lambda_1(C_1,\dots,C_{n-1})\\ \vdots\\ x_{n-1}=\lambda_{n-1}(C_1,\dots,C_{n-1})\end{matrix}$$

rešenje sistema (zbog nezavisnosti prvih integrala rešenje postoji). Razmotrimo složenu f-ju:

$$u=\varphi\big[\lambda_1\big(\varphi_1(x_1,\dots,x_n),\dots,\varphi_{n-1}(x_1,\dots,x_n)\big),\dots,\lambda_{n-1}\big(\varphi_1(x_1,\dots,x_n),\dots,\varphi_{n-1}(x_1,\dots,x_n)\big)\big]$$

što predstavlja rešenje polazne jednačine. Osim toga, za $x_n={x_n}^0$ je:

$$u(x_1,\dots,x_{n-1},{x_n}^0)=\varphi(x_1,\dots,x_{n-1})$$

pa je sa ovim izrazom zaista dato rešenje postavljenog Košijevog problema.

(3) *KVAZILINEARNE PARCIJALNE JEDNAČINE. SVOĐENJE NA HOMOGENU JEDNAČINU.*

-Neka je data ***kvazilinearna homogena parcijalna jednačina***:

$$\boldsymbol{P_1(x_1,\dots,x_n),\frac{\partial u}{\partial x_1}+\cdots+P_n(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}=P_{n+1}(x_1,\dots,x_n,u)}$$

gde su: $P_1,\dots P_{n+1}$ definisane i nep.dif. na $n+1$ dimenzionoj oblasti D i neka je npr. $P_n(x_1,\dots,x_n)\neq 0$ za $(x_1,\dots,x_n)\in D$. Rešenje tražimo u implicitnom obliku: $v(x_1,\dots,x_n,u)=0$, gde je v nep.dif. f-ja na D i pritom je $\frac{\partial v}{\partial u}\neq 0$.

-**Teorema**: Neka je f-ja $v=v(x_1,\dots,x_n,u)$ nep.dif. na D, i neka je $\frac{\partial v}{\partial u}\neq 0$. Tada je ta f-ja rešenje pridružene linearne jednačine:

$$P_1(x_1,\dots,x_n,u)\frac{\partial v}{\partial x_1}+\cdots+P_n(x_1,\dots,x_n,u)\frac{\partial v}{\partial x_n}+P_{n+1}(x_1,\dots,x_n,u)\frac{\partial v}{\partial u}=0$$

akko je f-ja $u(x_1,\dots,x_n)$, implicitno zadata sa $v(x_1,\dots,x_n,u)$, rešenje početne jednačine.

-**Dokaz**: Imamo da je f-ja $u(x_1,\dots,x_n)$, implicitno zadata sa $v(x_1,\dots,x_n,u)$. Sledi:

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}+\frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial u}{\partial x_i}=-\frac{\frac{\partial v}{\partial x_i}}{\frac{\partial v}{\partial u}}$$

Pretpostavimo da je $v=v(x_1,\dots,x_n,u)$ rešenje pridružene linearne jednačine, tj da je:

$$P_1\frac{\partial v}{\partial x_1}+\cdots+P_n\frac{\partial v}{\partial x_n}+P_{n+1}\frac{\partial v}{\partial u}=0 \quad /:\left(-\frac{\partial v}{\partial u}\right)$$

$$P_1\left(-\frac{\frac{\partial v}{\partial x_1}}{\frac{\partial v}{\partial u}}\right)+\cdots+P_n\left(-\frac{\frac{\partial v}{\partial x_n}}{\frac{\partial v}{\partial u}}\right)-P_{n+1}=0 \quad\Leftrightarrow\quad P_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+\cdots+P_n\frac{\partial u}{\partial x_n}=P_{n+1}$$

što znači da f-ja u zadovoljava jednačinu.

-Neka je $v=F(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ opšte rešenje pridružene linearne jednačine, gde su:

$$\varphi_1(x_1,\dots,x_n,u)=C_1,\dots,\varphi_n(x_1,\dots,x_n,u)=C_n$$

nezavisni prvi integrali pridruženog sistema:

$$\frac{dx_1}{P_1}=\cdots=\frac{dx_n}{P_n}=\frac{du}{P_{n+1}}$$

Tada je sa: $F(\varphi_1(x_1,\dots,x_n,u),\dots,\varphi_n(x_1,\dots,x_n,u))=0$ implicitno zadato ***opšte rešenje*** kvazilinearne jednačine.

-Postupak za nalaženje opšteg rešenja:

(1) kvazilinearnoj parcijalnoj jednačini se pridruži sistem

(2) određuje se n nezavisnih prvih integrala sistema: $\varphi_1=C_1,\dots,\varphi_n=C_n$

(3) opšte rešenje je $u=F(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$, gde je F nep.dif. f-ja.

(4) ***PROBLEM SA POČETNIM USLOVOM ZA KVAZILINEARNU JEDNAČINU.***

-Neka je data kvazilinearna homogena parcijalna jednačina:

$$P_1(x_1,\dots,x_n),\frac{\partial u}{\partial x_1}+\dots+P_n(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}=P_{n+1}(x_1,\dots,x_n,u)$$

neka su $P_1, \dots P_{n+1}$ definisane i nep.dif. na oblasti D, i neka je npr. $P_n(x_1,\dots,x_n)\neq 0$ za $(x_1,\dots,x_n)\in D$. Košijev problem za ovu jednačinu je sledeći: naći rešenje koje za $x_n = {x_n}^0$ zadovoljava uslov:

$$u(x_1,\dots,x_{n-1},{x_n}^0)=\varphi(x_1,\dots,x_{n-1})$$

gde je φ data nep.dif. f-ja i pritom ovaj uslov važi za sve $x_1,\dots,x_{n-1}$ takve da $(x_1,\dots,x_{n-1},{x_n}^0\varphi(x_1,\dots,x_{n-1}))\in D$.

-Pokažimo da pod navedenim pretpostavkama Košijev problem ima rešenja. Na osnovu njih sistem:

$$\frac{dx_1}{P_1(x_1,\dots,x_n,u)}=\dots=\frac{dx_n}{P_n(x_1,\dots,x_n,u)}=\frac{du}{P_{n+1}(x_1,\dots,x_n,u)}$$

ima u okolini tačke $({x_1}^0,\dots,{x_n}^0)$ n nezavisnih prvih integrala: $\varphi_1(x_1,\dots,x_n)=C_1,\dots,\varphi_n(x_1,\dots,x_n)=C_n$. Za $x_n={x_n}^0$ dobijamo sistem:

$$\begin{gathered}\varphi_1(x_1,\dots,x_{n-1},{x_n}^0,u)=C_1\\ \vdots\\ \varphi_n(x_1,\dots,x_{n-1},{x_n}^0,u)=C_n\end{gathered}$$

Neka je:

$$\begin{gathered}x_1=\lambda_1(C_1,\dots,C_n)\\ \vdots\\ x_{n-1}=\lambda_{n-1}(C_1,\dots,C_n)\\ u=\lambda_n(C_1,\dots,C_n)\end{gathered}$$

rešenje sistema (zbog nezavisnosti prvih integrala rešenje postoji). Razmotrimo f-ju u implicitno definisanu sa $(*)$:

$$\begin{gathered}\lambda_n\big(\varphi_1(x_1,\dots,x_n,u),\dots,\varphi_n(x_1,\dots,x_n,u)\big)=\\ =\varphi\big[\lambda_1\big(\varphi_1(x_1,\dots,x_n,u),\dots,\varphi_n(x_1,\dots,x_n,u)\big),\dots,\lambda_{n-1}\big(\varphi_1(x_1,\dots,x_n,u),\dots,\varphi_n(x_1,\dots,x_n,u)\big)\big]\end{gathered}$$

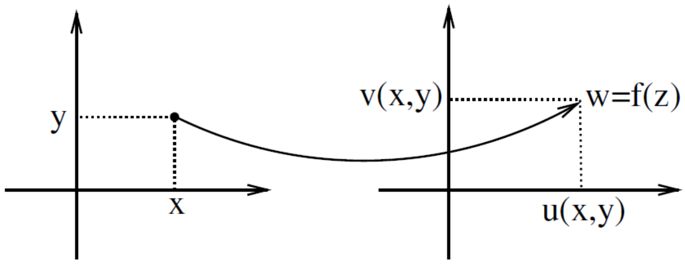
Dalje, imamo da je: $v=\lambda_n(\varphi_1,\dots,\varphi_n)-\varphi(\lambda_1(\varphi_1,\dots,\varphi_n),\dots,\lambda_{n-1}(\varphi_1,\dots,\varphi_n))$ rešenje pridružene linearne jednačine, pa, pod pretpostavkom da je u okolini tačke $({x_1}^0,\dots,{x_n}^0,u^0)$ $\frac{dv}{du}\neq 0$, sledi da je $v=0$, tj. sa $(*)$ je dato rešenje postavljenog Košijevog problema.

V. ELEMENTI TEORIJE FUNKCIJE KOMPLEKSNE PROMENLJIVE

(1) ELEMENTARNE FUNKCIJE KOMPLEKSNE PROMENLJIVE.

-Neka je dat skup $D \subset C$. Ako je zadato pravilo kojim se svakom $z \in D$ dodeljuje određeni kompleksan broj w, kažemo da je na D zadata kompleksna ***funkcija kompleksne promenljive*** i pišemo: $w = f(z)$.

-Pošto je svaki kompleksni broj određen parom realnih brojeva (realnim i imaginarnim delom), zadavanje funkcionalne veze između $w = u + iv$ i $z = x + iy$ je ekvivalentno zadavanju dve realne f-je u i v od dve realne promenljive x i y. Dakle: $w = u(x, y) - iv(x, y)$.



-Neka je F skup vrednosti f-je $w = f(z)$ kada z prolazi skupom D. F-ja f uspostavlja korespodenciju između tačaka skupa F tako što svakoj tački $z \in D$ dodeljuje tačku $w = f(z) \in D$. Samim tim uspostavljena je i ***inverzna korespodencija***, koja tačkama skupa F dodeljuje tačke skupa D. Dakle, inverzna korespodencija predstavlja:

$$f^{-1}(w) = \{z \in D \mid f(z) = w\}$$

-U opštem slučaju inverzna korespodencija može jednoj tački skupa F dodeljivati više tačaka skuipa D- Tada kažemo da je $f^{-1}(w)$ ***višeznačna inverzna korespodencija***.

-Elementarne f-je kompleksne promenljive:

(1) ***Polinom stepena n***: $w = P(z)$ definiše se sa: $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$

(2) ***Racionalna f-ja***: $w = R(z)$ definiše se sa: $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, gde su P i Q stepena n i m.

(3) ***Eksponencijalna f-ja***: $w = e^z$ definiše se sa: $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$. Važi:

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2} \quad \text{i} \quad \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}$$

(4) ***Trigonometrijske f-je***: $w = \sin z$ i $w = \cos z$ definišu se sa:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Važi i: $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$; $\sin(-z) = -\sin z$; $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$;

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2; \quad e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

(5) ***Inverzna f-ja*** f-je $z = w^n$ označava se $\sqrt[n]{z}$ i naziva se ***n-ti koren***. Kako je $\rho = |z|, \varphi = \arg z$ tada:

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right)\right), \qquad k = 1, \ldots n - 1$$

Ova f-ja je *višeznačna*. Sledeće jednoznačne f-je se nazivaju grane višeznačne f-je $\sqrt[n]{z}$:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right)\right), \qquad k = 1, \dots n-1$$

(6) ***Inverzna f-ja eksponencijalne f-je*** $z = e^w$ naziva se ***logaritamska f-ja*** i označava sa $\operatorname{Ln} z$. Ukoliko u jednačinu $z = e^w$ stavimo: $z = |z|e^{i\arg z}$, $w = u + iv$:

$$|z|e^{i\arg z} = e^{u+iv} = e^u e^{iv}; \quad \text{za } z \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad e^u = |z|, v = \arg z + 2k\pi \quad \Leftrightarrow \quad u = \ln|z|\,, v = \operatorname{Arg}|z|$$

Prema tome, imamo da je $w = \operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$ (f-ja $\operatorname{Ln} z$ je takođe višeznačna).

(7) ***Opšta stepena f-ja*** $w = z^a$, gde a može biti kompleksan broj, definiše se sa: $z^a = e^{a\operatorname{Ln} z}$.

(8) ***Opšta eksponencijalna f-ja*** $w = a^z$, ako je a kompleksan broj $\neq 0, 1, e$, definiše se: $a^z = e$

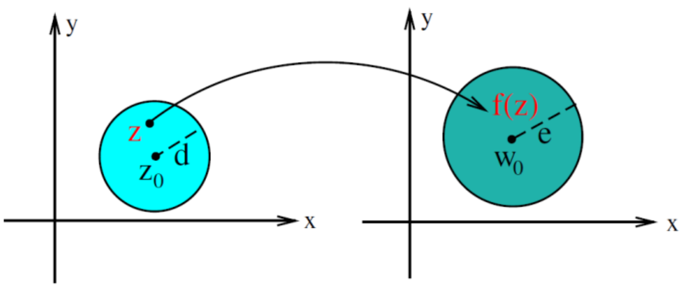
(2) *GRANIČNE VREDNOSTI I NEPREKIDNOST FUNKCIJE KOMPLEKSNE PROMENLJIVE.*

-Neka je f-ja $w = f(z)$ definisana na skupu D i neka je z_0 data tačka. Pretpostavimo da u svakoj okolini tačke z_0 postoji bar jedna tačka iz D različita od samog z_0.

-Broj w_0 je ***granična vrednost f-je*** $f(z)$ u tački z_0 akko za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta(\varepsilon) > 0$, tako da za svako $z \in D$: $|z - z_0| < \delta(\varepsilon) \implies |f(z) - w_0| < \varepsilon$. Za graničnu vrednost se koristi oznaka:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0 \end{matrix}$$

-Geometrijska interpretacija: za svaku ε okolinu tačke w_0 može se naći δ okolina tačke z_0 tako da se sve tačke iz δ okoline u kojima je f definisana preslikavaju u datu ε okolinu.



-Broj w_0 je ***granična vrednost f-je*** $f(z)$ u tački z_0 akko za svaki niz (z_n) tačaka iz D koji konvergira ka z_0 odgovarajući niz vrednosti f-je $\big(f(z_n)\big)$ konvergira ka w_0. Iz ovoga, i gornjih tvrdnji izvodi se:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) + i \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)$$

-F-ja $f(z)$ ***je neprekidna u tački*** $\boldsymbol{z_0} \in \boldsymbol{D}$ akko je:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

-Za razliku od granične vrednost, neprekidnost se definiše samo u tačkama skupa D. Ako je f-ja neprekidna u svim tačkama skupa D kaže se da je ona neprekidna na D.

-Teorema: F-ja $f(z) = f(x + iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ je neprekidna u tački z_0 akko su f-je $u(x,y)$ i $v(x,y)$ neprekidne u tački (x_0, y_0).

-Teorema: Ako su f_1 i f_2 neprekidne f-je, onda su: $f_1 \pm f_2$; $f_1 \cdot f_2$; f_1/f_2 takođe neprekidne f-je.

(3) ***IZVOD FUNKCIJE KOMPLEKSNE PROMENLJIVE. KOŠI – RIMANOVI USLOVI. POJAM ANALITIČKE FUNKCIJE.***

-F-ja $f(z)$ je ***diferencijabilna*** u tački z_0 akko postoji konačna gran. vrednost količnika kad $\Delta z \longrightarrow 0$:

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

-Ako je f-ja diferencijabilna u tački z_0 tada se odgovarajući limes naziva ***izvod f-je*** $\boldsymbol{f(z)}$ u tački z_0:

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\longrightarrow 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

-Ako postoji neka ε okolina tačke z_0 takva da je $f(z)$ diferencijabilna u svakoj tački te okoline, kažemo da je $f(z)$ ***analitička f-ja*** u z_0. Ako je $f(z)$ diferencijabilna u svakoj tački oblasti D, kažemo da je $f(z)$ analitička f-ja na D.

-**Teorema**: Ako su $f(z)$ i $g(z)$ analitičke f-je na oblasti D, onda važe ***pravila diferenciranja***:

(1) $\big(f(z)\pm g(z)\big)'=f'(z)\pm g'(z)$

(2) $\big(cf(z)\big)'=cf'(z)$

(3) $\big(f(z)g(z)\big)'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$

(4) $\left(\dfrac{f(z)}{g(z)}\right)'=\dfrac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{\big(g(z)\big)^2}$

(5) $f\big(g(z)\big)'=f'_g\big(g(z)\big)g'_z(z)$

(6) $\big(f(z)\big)'=\dfrac{1}{\big(f^{-1}(w)\big)'}$; ako je f^{-1} jednoznačna $\mathrm{f-ja}$.

-**Teorema** (*neophodni uslovi diferencijabilnosti*): Ako je $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ diferencijabilna u tački $z_0=x_0+iy_0$, tada postoje parcijalni izvodi:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0),\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0),\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0),\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)$$

i pri tome važe tzv. ***Koši-Rimanovi uslovi***:

$$\boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)}\quad i\quad \boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)=-\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)}$$

-**Dokaz:** Neka je $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$:

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\longrightarrow 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$
$$=\lim_{\Delta x+i\Delta y\longrightarrow 0}\frac{u(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)+iv(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)-iv(x_0,y_0)}{\Delta x+i\Delta y}$$

Specijalno, za $\Delta x = 0$ sledi:

$$f'(z_0) = \lim_{i\Delta y \to 0}\left(\frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{i\Delta y} + i\frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{i\Delta y}\right)$$
$$= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$$

-Takođe, za $\Delta x = 0$ imamo:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i\frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x}\right)$$
$$= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

-Izjednačavanjem realnih i imaginarnih delova ova dva izraza izvodimo Koši-Rimanove uslove.

-**Teorema** (*dovoljni uslovi diferencijabilnosti*): Ako su f-je $u(x, y)$ i $v(x, y)$ diferencijabilne u tački (x_0, y_0) i ako su u toj tački ispunjeni Koši-Rimanovi uslovi, tada je funkcija $f(z) = u + iv$ diferencijabilna u tački $z_0 = x_0 + iy_0$.

-**Dokaz:** Kako su u i v difrencijabilne u (x_0, y_0) sledi:

$$u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + \alpha_1\Delta x + \beta_1\Delta x$$

$$v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + \alpha_2\Delta x + \beta_2\Delta x$$

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} =$$

$$= \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + \alpha_1\Delta x + \beta_1\Delta x}{\Delta x + i\Delta y} + i\frac{\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + \alpha_2\Delta x + \beta_2\Delta x}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$= \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x - \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta y + \alpha_1\Delta x + \beta_1\Delta x}{\Delta x + i\Delta y} + i\frac{\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta y + \alpha_2\Delta x + \beta_2\Delta x}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)\frac{\Delta x + i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\frac{\Delta x - \frac{1}{i\Delta y}}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{\alpha_1\Delta x + \beta_1\Delta x}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{\alpha_2\Delta x + \beta_2\Delta x}{\Delta x + i\Delta y}$$

Poslednja dva izraza teže nuli kad Δx i Δy teže nuli, tako da se konačno dobija da postoji:

$$\lim_{\Delta z \to 0}\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = f'(z_0)$$

(4) ***INTEGRALI FUNKCIJE KOMPLEKSNE PROMENLJIVE. DEFINICIJA I SVOJSTVA.***

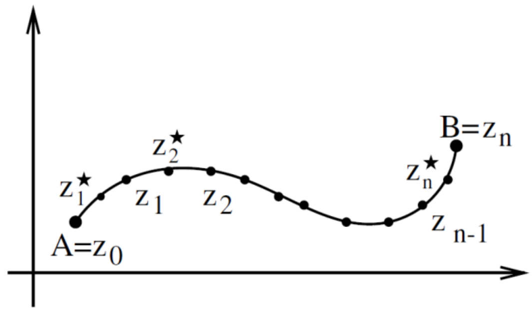
-Ako su $x(t)$ i $y(t)$ realne f-je neprekidne na $a \leq t \leq b$ tada je sa: $z(t) = x(t) + iy(t)$ definisana ***neprekidna kriva u kompleksnoj ravni*** koja spaja tačke $z(a) = A$ i $z(b) = B$. Ako je $a \neq b$, a $z(a) = z(b)$, kriva je ***zatvorena***. Kriva koja sama sama sebe ne seče naziva se ***prosta kriva***.

-Ako su $x(t)$ i $y(t)$ neprek.difer. f-je za $a \leq t \leq b$, kriva se naziva ***glatka***. Kriva koja se sastoji od konačno mnogo glatkih delova naziva se ***deo po deo glatka kriva***. Ako je C glatka kriva, tada je sa:

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t)$$

dat ***pravac tangente na krivu C*** u tački $z(t) = x(t) + iy(t)$**.** Svaku prostu, deo po deo glatku, zatvorenu krivu nazivamo **kontura**.

-Pretpostavimo da je $f(z)$ u definisana u svim tačkama C. Neka je kriva C podeljena tačkama: $z_1 = z_1(t), \ldots, z_{n-1} = z_{n-1}(t)$ na n delova i označimo A sa z_0 i b sa z_n. Na svakom od lukova krive C koji spaja tačke z_{k-1} i z_k, $k = 1 \ldots n$, izaberimo tačku $z_k{}^*$. Neka je:



$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(z_k{}^*)\,\Delta z_k$$

-Ako postoji granična vrednost sume S_n, kada $n \to \infty$ i max $|z_k| \to 0$, koja je nezavisna od načina podele krive C i izbora tačaka $z_k{}^*$, onda se ta granična vrednost naziva ***integral f-je $f(z)$ duž krive C***:

$$\int_C f(z)dz \quad \text{ili} \quad \int_{AB} f(z)dz$$

-Neka je: $f(z) = u + iv$; $z_k = x_k + iy_k$; $z_k{}^* = x_k{}^* + iy_k{}^*$; $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$; $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$ $\Rightarrow$ $\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$. Tada imamo da je:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \big(u(x_k{}^*, y_k{}^*) + iv(x_k{}^*, y_k{}^*)\big)(\Delta x_k + i\Delta y_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (u(x_k{}^*, y_k{}^*)\Delta x_k - v(x_k{}^*, y_k{}^*)\Delta y_k) + i\sum_{k=1}^{n} (v(x_k{}^*, y_k{}^*)\Delta x_k + u(x_k{}^*, y_k{}^*)\Delta y_k)$$

Realni i imaginarni deo sume S_n predstavljaju integralne sume krivolinijskog integrala druge vrste:

$$\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy$$

-Ako je data kontura C: $\begin{matrix} x = x(t) \\ y = y(t) \end{matrix}$, $a \leq t \leq b$, onda je:

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b P\big(x(t), y(t)\big)x'(t)dt + \int_a^b Q(x(t), y(t))y'(t)dt$$

-Neposredno iz definicije integrala slede sledeće **osobine**:

$$(1)\ \int_C cf(z)dz = c\int_C f(z)dz$$

$$(2)\ \int_C \big(f(z) \pm g(z)\big)dz = \int_C f(z)dz \pm \int_C g(z)dz$$

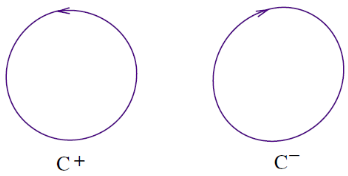
$$(3)\ \int_{AB} f(z)dz = -\int_{BA} f(z)dz$$

$$(4)\ \int_{C_1+C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$

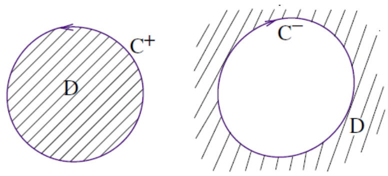
$$(5)\ \int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt\,; \quad C\colon\ z = z(t), a \le t \le b$$

(5) ***KOŠIJEVA TEOREMA ZA JEDNOSTRUKO I VIŠESTRUKO POVEZANU OBLAST.***

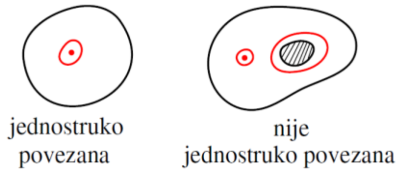
-***Pozitivan oblilazak konture***: suprotno kretanju kazaljke na satu.



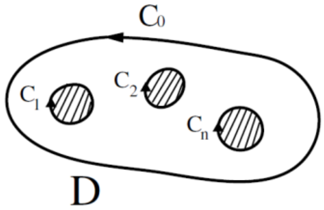
-***Pozitivan obilazak oblasti D***: oblast ostaje sa leve strane.



-***Jednostruko povezana oblast***: svaka kontura se može deformisati u tačku bez napuštanja oblasti D.



-***Višestruko povezana oblast***: ograničena spolja sa C_0, a iznutra sa $C_1, \dots, C_n$.



-**Košijeva teorema** (*za jednostruko povezanu oblast*): Neka je jednostruko povezana oblast D ograničena konurom C i neka je f-ja $f(z)$ analitička na D i na C. Tada je:

$$\int_{C^+} f(z)dz = 0$$

-Posledica 1: Ako je G proizvoljna kontura koja pripada oblasti D:

$$\int_{G^+} f(z)dz = 0$$

-Posledica 2: Ako su A i B dve proizvoljne tačke iz D. Tada je sledeći integral nezavisan od puta koji spaja tačke A i B (pod uslovom da putanja pripada oblasti D):

$$\int_{AB} f(z)dz$$

-Dokaz: Neka su G_1 i G_2 dve proste deo po deo glake krive u D koje spajaju tačke A i B sa orjentacijom od A ka B. Neka je D_1 oblast ograničena krivom G koja se sastoji od krivih G_1 i G_2. Tada je:

$$\int_{G^-} f(z)dz = \int_{G_1^-} f(z)dz + \int_{G_2} f(z)dz = 0$$

gde je sa G_1^- označena orjentacija krive G_1 od B ka A, pa je dalje:

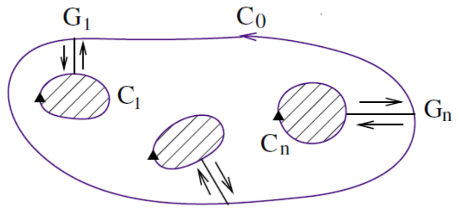
$$\int_{G_2} f(z)dz = -\int_{G_1^-} f(z)dz = \int_{G_1} f(z)dz$$

-Košijeva teorema (*za višestruko povezanu oblast*): Neka je višestruko povezana oblast D ograničena spolja konturom C_0, a iznutra sa $C_1, \dots, C_n$. Neka je f-ja $f(z)$ analitička na D i na $C_0, C_1, \dots, C_n$. Tada je:

$$\int_{C^+} f(z)dz = 0$$

gde je C granica oblasti D, koja se sastoji od kontura $C_0, C_1, \dots, C_n$.

-Dokaz: Ako se dodaju zaseci $G_1, \dots, G_n$ dobija se jednostruko povezana oblast $\overline{D}$ sa granicom $\bar{C}$.



Obzirom da se zaseci obilaze dva puta u suprotnim smerovima to je:

$$0 = \int_{C_0^+} f(z)dz + \int_{G_1^+} f(z)dz + \int_{G_1^-} f(z)dz + \dots + \int_{G_n^+} f(z)dz + \int_{G_n^-} f(z)dz +$$

$$+ \int_{C_1^-} f(z)dz + \dots + \int_{C_n^-} f(z)dz = \int_{C_0^+} f(z)dz + \int_{C_1^-} f(z)dz + \dots + \int_{C_n^-} f(z)dz = \int_{\bar{C}^+} f(z)dz$$

-Posledica: pod uslovima ove teoreme, važi:

$$\int_{C_0^+} f(z)dz = \int_{C_1^+} f(z)dz + \dots + \int_{C_n^+} f(z)dz$$

(6) ***NEODREĐENI INTEGRAL FUNKCIJE KOMPLEKSNE PROMENLJIVE I OSNOVNA SVOJSTVA.***

-Neka je $f(z)$ analitička f-ja na jednostruko povezanoj oblasti D. Neka je z_0 data tačka i neka je $z \in D$ proizvoljno. Ako označimo integral duž neke putanje koja pripada D i spaja tačke z_0 i z sa:

$$\int_{z_0}^{z} f(z)dz$$

prema posledici Košijeve teoreme, vrednost ovog integrala ne zavisi od putanje već samo od z. Dakle,

$$\int_{z_0}^{z} f(z)dz = F(z)$$

-**Teorema**: Ako je $f(z)$ analitička na jednostruko povezanoj oblasti D i ako $z_0 \in D$ tada je f-ja:

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)dz$$

analitička na oblasti D i $F'(z) = f(z)$.

-Svaku f-ju sa osobinom $F'(z) = f(z),\ z \in D$ nazivamo ***primitivna f-ja f-je*** $\boldsymbol{f(z)}$. Može se pokazati da je skup svih primitivnih f-ja date f-je $f(z)$ dat sa $F(z) + c$.

-Skup svih primitivnih f-ja date f-je $f(z)$ nazivamo ***neodređeni integral f-je*** $\boldsymbol{f(z)}$ i obeležavamo sa:

$$\int f(z)dz$$

-**Osobine neodređenog integrala**:

(1) $\displaystyle\int cf(z)dz = c\int f(z)dz$

(2) $\displaystyle\int \big(f(z) \pm g(z)\big)dz = \int f(z)dz \pm \int g(z)dz$

(3) $\displaystyle\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z)\Big|_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1) \quad \leftarrow \quad \textbf{Njutn} - \textbf{Lajbnicova formula}$

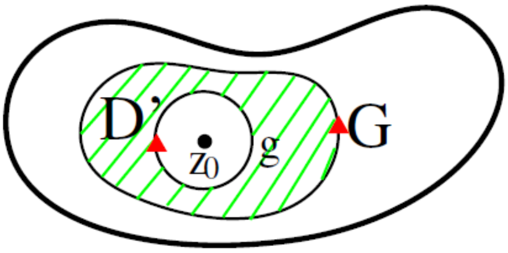
(7) ***KOŠIJEVE FORMULE ZA FUNKCIJE KOMPLEKSNE PROMENLJIVE.***

-Ako je poznata vrednost analitičke funkcije na konturi oko z_0, onda je vrednost fukcije u samoj tački z_0 jednoznačno određena.

-***Teorema***: Neka je f-ja $f(z)$ analitička na jednostruko povezanoj oblasti D. Neka je $z_0 \in D$ i neka je G proizvoljna kontura oko tačke z_0 koja pripada oblasti D. Tada je:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{G^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

-***Dokaz***: Neka je γ krug radijusa ρ oko tačke z_0, pri čemu je ρ izabrano tako da se kontura γ nalazi unutar G. Posmatramo višestruko povezanu oblast D' ograničenu spolja konturom G, a iznutra sa γ:



Tada je f-ja $\frac{f(z)}{z-z_0}$ analitička na D' i $G + \gamma$, pa je , prema posledici Košijeve teoreme:

$$\int\limits_{G^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int\limits_{\gamma^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = i \int\limits_0^{2\pi} \frac{f\left(z_0 + \rho e^{i\varphi}\right)\rho e^{i\varphi}}{\rho e^{i\varphi}} d\varphi \qquad \begin{pmatrix} z = z_0 + \rho e^{i\varphi} \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ dz = \rho i e^{i\varphi} d\varphi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{\rho \to 0} \int\limits_{G^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = i \lim_{\rho \to 0} \int\limits_0^{2\pi} f\left(z_0 + \rho e^{i\varphi}\right) d\varphi \quad \Rightarrow \quad \int\limits_{G^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = i f(z_0) \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i f(z_0)$$

-**Posledica**: Neka je f-ja $f(z)$ analitička na jednostruko povezanoj oblasti D ograničenoj konturom C i na konturi C. Tada, za proizvoljnu tačku $z_0 \in D$ važi:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \qquad (\textbf{Prva Košijeva formula})$$

-**Teorema**: Nekaje f-ja $f(z)$ analitička na jednostruko povezanoj oblasti D ograničenoj konturom C i na konturi C. Tada na D postoje svi izvodi f-je $f(z)$ i za svako $z_0 \in D$ važi:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{C^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \qquad (\textbf{Druga Košijeva formula})$$

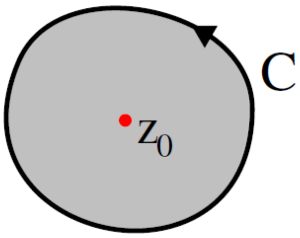
-Ova teorema (tj. Košijeve formule) se koristi za nalaženje kompleksnih integrala.

(8) ***REZIDUUM FUNKCIJE KOMPLEKSNE PROMENLJIVE.***

-Neka je $z = z_0$ izolovani singularitet f-je $f(z)$. ***Reziduum f-je*** $\boldsymbol{f(z)}$ u tački z_0 definiše se formulom:

$$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} f(z)dz$$

gde je C kontura oko z_0 koja pripada oblasti u kojoj je f-ja $f(z)$ analitička i koja u svojoj unutrašnjosti nema drugih singulariteta sem z_0.



-Postupak računanja reziduuma:

(1) ***Ako je z_0 otklonjiv singularitet*** onda je: $\mathrm{Res}[f(z), z_0] = 0$

(2) ***Ako je z_0 pol prvog reda*** – Tada, po definiciji postoji

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) \neq 0$$

Definišimo funkciju $f_1(z)$:

$$f_1(z) = \begin{cases} (z - z_0)f(z) & ; \quad z \neq z_0 \\ \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)f(z) & ; \quad z = z_0 \end{cases}$$

Ako je D oblast na kojoj osim z_0 nema drugih singulariteta f-je $f(z)$, pokazuje se da je f-ja $f_1(z)$ analitička na D. Stoga, prema prvoj Košijevoj formuli, važi:

$$f_1(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} \frac{f_1(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} \frac{(z - z_0)f(z)}{z - z_0} dz$$

Poslednji izraz predstavlja $\mathrm{Res}[f(z), z_0]$, dakle sledi:

$$\mathbf{Res}[\boldsymbol{f(z), z_0}] = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

(3) ***Ako je z_0 pol n-tog reda*** f-je $f(z)$ – Tada, po definiciji, postoji:

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) \neq 0$$

Definišimo funkciju $f_1(z)$:

$$f_1(z) = \begin{cases} (z - z_0)^n f(z) & ; \quad z \neq z_0 \\ \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) & ; \quad z = z_0 \end{cases}$$

Ako je D oblast na kojoj osim z_0 nema drugih singulariteta f-je $f(z)$, pokazuje se da je f-ja $f_1(z)$ analitička na D. Stoga, prema drugoj Košijevoj formuli, važi:

$$f_1{}^{(n-1)}(z_0) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{C^+} \frac{f_1(z)}{(z-z_0)^n} dz = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{C^+} \frac{(z-z_0)^n f(z)}{(z-z_0)^n} dz = (n-1)! \operatorname{Res}[f(z), z_0]$$

A, obzirom da je:

$$f_1{}^{(n-1)}(z_0) = \lim_{z \to z_0} ((z-z_0)^n f(z))^{(n-1)}$$

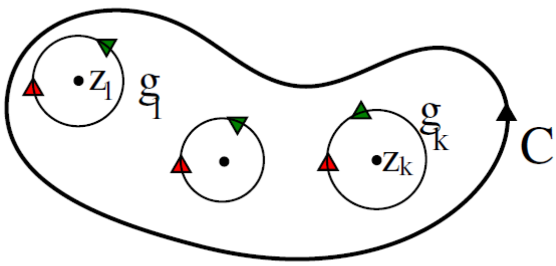
Sledi da je, konačno:

$$\mathbf{Res}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{z_0}] = \frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})!} \lim_{\boldsymbol{z} \to \boldsymbol{z_0}} ((\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z_0})^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}))^{(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})}$$

-**Teorema**: Neka je jednostruko povezana oblast D ograničena konturom C i neka je $f(z)$ analitička na D i C, osim u singularnim tačkama $z_1, \dots, z_k \in D$. Tada je:

$$\int_{C^+} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) \boldsymbol{dz} = \mathbf{2}\boldsymbol{\pi i} \sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{k}} \mathbf{Res}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{z_i}]$$

-**Dokaz**: Neka su γ_i krugovi oko z_i takvi da $\gamma_i \subset D$. Tada je $f(z)$ analitička na višestruko povezanoj oblasti D' koja je spolja ograničena konturom C, a iznutra konturama γ_i.



Prema posledici Košijeve teoreme za višestruko povezane oblasti važi:

$$\int_{C^+} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \cdots + \int_{\gamma_k} f(z)dz = 2\pi i \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(z)dz + \cdots + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} f(z)dz \right]$$
$$= 2\pi i \sum_{i=1}^{k} \operatorname{Res}[f(z), z_i]$$

VI. LAPLASOVE TRANSFORMACIJE

(1) *DEFINICIJA LAPLASOVE TRANSFORMACIJE I DOVOLJNI USLOVI ZA POSTOJANJE.*

-Neka je $f(t)$ f-ja realne promenljive. ***Laplasovom transformacijom*** $\boldsymbol{\mathcal{L}[f(t)]}$ se datoj f-ji pridružuje f-ja kompleksne promenljive $F(s)$ po formuli:

$$\boldsymbol{\mathcal{L}[f(t)] = F(S) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt}$$

-Napomena:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^{T} e^{-st} f(t)dt$$

-Skup vrednosti $s \in C$ za koje $\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$ konvergira naziva se ***oblast definisanosti f-je*** $\boldsymbol{F(S)}$**.**

-Pretpostavimo da $f(t)$ zadovoljava **sledeće uslove**:

(1) $f(t)$ je definisana na intervalu $[0,\infty)$

(2) $f(t)$ ima najviše konačno mnogo prekida prve vrste na svakom konačnom podintervalu intervala $[0,\infty)$

(3) $f(t)$ je eksponencijalnog reda rasta, tj. postoji realna konstanta a i pozitivna konstanta M, da:

$$|f(t)| \le Me^{at}, \quad \forall t \in [0,\infty)$$

-**Teorema** (*dovoljni uslovi za egzistenciju* $\mathcal{L}$): Neka f-ja $f(t)$ zadovoljava navedene uslove. Tada:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

konvergira za svako s za koje je Re $s > a$.

-**Dokaz**: Važe teoreme o nesvojstvenim integralima (ako je $0 \le f_1(x) \le f_2(x),\ x \ge a$):

$$\int_a^{\infty} f_2(x)dx \ \ konvergira \quad \Rightarrow \quad \int_a^{\infty} f_1(x)dx \ \ konvergira$$

$$\int_a^{\infty} |f_1(x)|dx \ \ konvergira \quad \Rightarrow \quad \int_a^{\infty} f_1(x)dx \ \ konvergira$$

Prema drugoj teoremi dovoljno je ispitati konvergenciju integrala $\int_0^{\infty} |e^{-st}f(t)|dt$. Kako je:

$$0 \le \underbrace{|e^{-st}f(t)|}_{f_1} \le |e^{-st}|Me^{at} = \left|e^{-(\alpha+i\beta)t}\right|Me^{at} = e^{-\alpha t}Me^{at} = \underbrace{Me^{(a-\alpha)t}}_{f_2}$$

Prema prvoj teoremi dovoljno je ispitati konvergenciju integrala $\int_0^{\infty} Me^{(a-\alpha)t}dt$. Dakle:

$$\int_0^\infty Me^{(a-\alpha)t}dt = \frac{M}{a-\alpha}e^{(a-\alpha)t}\Big|_0^\infty = \frac{M}{a-\alpha}\left[\lim_{T\to\infty} e^{(a-\alpha)t} - 1\right] = -\frac{M}{a-\alpha}$$

jer je $\lim_{T\to\infty} e^{(a-\alpha)t} = 0$ za $a-\alpha < 0$. Dakle, za $\operatorname{Re} s > a$ konvergira $\int_0^\infty Me^{(a-\alpha)t}dt$ odakle sledi da konvergira $\int_0^\infty |e^{-st}f(t)|dt$ a odatle sledi da konvergira $\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$, tj. $F(S)$ je definisana za $\operatorname{Re} s > a$.

-**Teorema**: Neka f-ja $f(t)$ zadovoljava sva tri uslova. Tada je:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

analitička funkcija u oblasti $\operatorname{Re} s > a$.

(2) ***LAPLASOVA TRANSFORMACIJA FUNKCIJE $\boldsymbol{f(t) = e^{bt}}$.***

-Eksponencionalna f-ja $\boldsymbol{f(t) = e^{bt}}$, $b \neq 0$. Imamo da je:

$$F(S) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty e^{(b-s)t}\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{b-s}e^{(b-s)t}\Big|_0^T = \frac{1}{b-s}\left(\lim_{T\to\infty} e^{(b-s)T} - 1\right)$$

Kako je:

$$e^{(b-s)T} = e^{(b-\alpha)T}e^{-i\beta T} = e^{(b-\alpha)T}(\cos\beta T - i\sin\beta T);\quad \text{gde je } \alpha = \operatorname{Re} s;\ \ \beta = \operatorname{Im} s$$

Sledi da je, kada uvrstimo to u gornji izraz:

$$F(S) = \frac{1}{b-s}\left(\lim_{T\to\infty} e^{(b-\alpha)T}\cos\beta T - i\lim_{T\to\infty} e^{(b-\alpha)T}\sin\beta T - 1\right)$$

$$\text{za } b-\alpha < 0;\ \ \operatorname{Re} s > b \quad \Longrightarrow \quad \lim_{T\to\infty} e^{(b-\alpha)T}\cos\beta T = 0;\ \ \lim_{T\to\infty} e^{(b-\alpha)T}\sin\beta T = 0$$

$$\text{odakle sledi da je, za } \operatorname{Re} s > b \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{F(S) = \frac{1}{s-b}}$$

(3) ***LAPLASOVA TRANSFORMACIJA FUNKCIJA $\boldsymbol{f_1(t) = \sin bt,\ f_2(t) = \cos bt}$.***

-Trigonometrijske f-je $\boldsymbol{\sin bt}$ i $\boldsymbol{\cos bt}$, $b \neq 0$ realan broj: Kako je:

$$\sin bt = \frac{e^{ibt} - e^{-ibt}}{2i} \quad \Longrightarrow \quad F_1(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-st}\sin bt\, dt$$

$$= \frac{1}{2i}\int_0^\infty \left(e^{(ib-s)t} - e^{(-ib-s)t}\right) dt = \frac{1}{2i}\lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{ib-s}e^{(ib-s)t} - \frac{1}{-ib-s}e^{(-ib-s)t}\right)\Big|_0^T$$

$$= \frac{1}{2i}\lim_{T\to\infty}\left(\left(\frac{1}{ib-s}e^{(ib-s)T} - \frac{1}{-ib-s}e^{(-ib-s)T}\right) - \frac{1}{ib-s} + \frac{1}{-ib-s}\right)$$

Kako je:

$$\left.\begin{array}{l} e^{(ib-s)T} = e^{-\alpha T}(\cos(b-\beta)T + i\sin(b-\beta)T) \\ e^{(-ib-s)T} = e^{-\alpha T}(\cos(b-\beta)T - i\sin(b-\beta)T) \end{array}\right\}; \quad \text{gde je } \alpha = \operatorname{Re} s; \;\; \beta = \operatorname{Im} s$$

Sledi da za $\operatorname{Re} s > 0$:

$$\lim_{T\to\infty} e^{(ib-s)T} = 0; \; b \lim_{T\to\infty} e^{-(ib-s)T} = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad F_1(s) = \frac{1}{2i}\left(-\frac{1}{ib-s} + \frac{1}{-ib-s}\right) \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{F_1(s) = \frac{b}{s^2 + b^2}}$$

Analogno se dokazuje i da je za $\operatorname{Re} s > 0$:

$$\boldsymbol{F_2(s)} = \int_0^\infty e^{-st}\cos bt\, dt = \boldsymbol{\frac{s}{s^2 + b^2}}$$

(4) ***LAPLASOVA TRANSFORMACIJA FUNKCIJE*** $\boldsymbol{f(t) = t^n}$**.**

-Stepena f-ja $\boldsymbol{t^n}$, $n = 0,1,2, \ldots$ Neka je:

$$I_n = \int_0^\infty e^{-st}\, t^n dt$$

-Za $n = 0$ imamo:

$$I_0 = \int_0^\infty e^{-st}\, dt = \lim_{T\to\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\Big|_0^T = -\frac{1}{s}\lim_{T\to\infty}(e^{-st} - 1)$$

Kako je: $e^{-sT} = e^{-\alpha T}(\cos\beta T - i\sin\beta T)$; gde je $\alpha = \operatorname{Re} s$; $\beta = \operatorname{Im} s$, sledi da je, za $\operatorname{Re} s > 0$:

$$\lim_{T\to\infty} e^{-sT} = 0$$

Pa za $\operatorname{Re} s > 0$ dobijamo da je:

$$I_0 = \frac{1}{s} \qquad \big(= \mathcal{L}(t)\big)$$

-Za $n \geq 1$, primenjujući parcijalnu integraciju ($t^n = u$; $\; e^{-st}dt = dv$), za $\operatorname{Re} s > 0$ dobijamo:

$$I_n = \int_0^\infty e^{-st}\, t^n dt = -\frac{1}{s}e^{-st}t^n\Big|_0^\infty + \frac{n}{s}\int_0^\infty e^{-st}\, t^{n-1}dt = \lim_{T\to\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-st}t^n\right)\Big|_0^T + \frac{n}{s}I_{n-1}$$
$$= -\frac{1}{s}\lim_{T\to\infty}(e^{-sT}T^n) + \frac{n}{s}I_{n-1} = \frac{n}{s}I_{n-1}$$

jer je zbog: $e^{-sT}T^n = e^{-\alpha T}T^n(\cos\beta T - i\sin\beta T)$, za $\alpha = \operatorname{Re} s > 0$ ispunjeno:

$$\lim_{T\to\infty} e^{-sT}T^n = 0$$

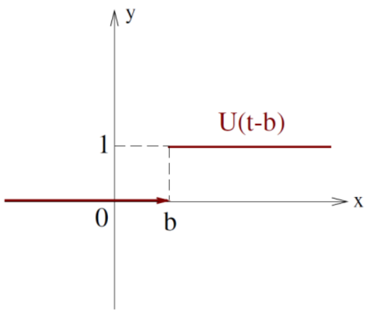
Iz date rekurentne veze sledi da je, za $\operatorname{Re} s > 0$:

$$I_n = \frac{n}{s}\cdot\frac{n-1}{s}\cdots\frac{1}{s}I_0 = \frac{n(n-1)\cdots 1}{s^n}I_0 = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}}$$

(5) ***DEFINICIJA JEDINIČNE ODSKOČNE FUNKCIJE $\boldsymbol{f(t) = U(t-b)}$. LAPLASOVA TRANSFORMACIJA FUNKCIJE $\boldsymbol{f(t)}$.***

-Neka je $b > 0$. ***Jedinična odskočna f-ja*** se definiše sa: $U(t-b) = \begin{cases} 0, & t < b \\ 1, & t \geq b \end{cases}$

-Imamo da je:



$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, U(t-b)dt = \int_0^b e^{-st}\, \underbrace{U(t-b)}_{=0}\, dt + \int_b^\infty e^{-st}\, \underbrace{U(t-b)}_{=1}\, dt$$

$$= \int_b^\infty e^{-st}\, dt = \lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{s} e^{-st}\right)\Big|_0^T$$

$$= -\frac{1}{s}\left(\lim_{T\to\infty} (e^{-sT} - e^{-sb})\right) = \frac{1}{s} e^{-sb} \quad tj{:} \quad \boldsymbol{\mathcal{L}[U(t-b)]}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{s} e^{-sb}}$$

(6) ***OSOBINA LINEARNOSTI ZA LAPLASOVU TRANSFORMACIJU. DOKAZ.***

-Neka je $f_1(t) \in E(a_1)$ i $f_2(t) \in E(a_2)$ i neka je: $\mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s)$ i $\mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(s)$. Tada važi:

$$\boldsymbol{\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)}, \quad \text{Re}\, s > \max\{a_1, a_2\}$$

-**Dokaz**: S obzirom na definiciju Laplasove transformacije i osobinu linearnosti određenih integrala, za $\text{Re}\, s > \max\{a_1, a_2\}$ važi:

$$\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = \int_0^\infty e^{-st}\, (c_1 f_1 + c_2 f_2) dt = c_1 \mathcal{L}\big(f_1(t)\big) + c_2 \mathcal{L}\big(f_2(t)\big) = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

(7) ***DOKAZATI DA ZA LAPLASOVU TRANSFORMACIJU VAŽI $\boldsymbol{\mathcal{L}\{f(bt)\} = 1/b\, F(s/b)}$, $\boldsymbol{Re\, s > ab}$, AKO JE $\boldsymbol{\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s), Re\, s > a}$.***

-Neka $f(t) \in E(a)$ i neka je $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, $\text{Re}\, s > a$. Neka je $b > 0$. Tada je:

$$\boldsymbol{\mathcal{L}[f(bt)] = \frac{1}{b} F\left(\frac{s}{b}\right)}, \quad \text{Re}\, s > ab$$

-**Dokaz**: Koristeći smenu $bt = x$ imamo:

$$\mathcal{L}[f(bt)] = \int_0^\infty e^{-st}\, f(bt) dt = \frac{1}{b} \int_0^\infty e^{-\frac{s}{b}x}\, f(x) dx = \frac{1}{b} F\left(\frac{s}{b}\right), \quad \text{Re}\, \frac{s}{b} = \frac{\text{Re}\, s}{b} > a$$

(8) ***AKO JE $\boldsymbol{\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)}$, $\boldsymbol{Re\, s > a}$, DOKAŽI DA VAŽI $\boldsymbol{\mathcal{L}\{e^{bt} f(t)\} = F(s-b)}$, $\boldsymbol{Re\, s > a + b}$.***

-Neka $f(t) \in E(a)$ i neka je $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, $\text{Re}\, s > a$. Tada je:

$$\boldsymbol{\mathcal{L}\left[e^{bt} f(t)\right] = F(s-b)}, \quad \text{Re}\, s > a + b; \;\; b \in R$$

-**Dokaz**: Imamo da je:

$$\mathcal{L}[e^{bt}f(t)] = \int_0^\infty e^{-st}\, e^{bt} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-(s-b)t} f(t)dt = F(s-b)$$

gde je $\mathrm{Re}\,(s-b) = \mathrm{Re}\, s - b > a \implies \mathrm{Re}\, s > a + b$.

(9) ***NEKA JE*** $\boldsymbol{\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)}$, $\boldsymbol{\mathrm{Re}\, s > a}$. ***TADA JE*** $\boldsymbol{\mathcal{L}\{f(t-b)U(t-b)\} = e^{-bs}F(s)}$, $\boldsymbol{\mathrm{Re}\, s > a}$, ***GDE JE*** $\boldsymbol{b > 0}$***, A*** $\boldsymbol{U(t-b)}$ ***JE JEDINIČNA ODSKOČNA FUNKCIJA.***

-Neka $f(t) \in E(a)$ i neka je $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, $\mathrm{Re}\, s > a$, a $U(t-b)$ jednična odskočna f-ja. Tada je:

$$\boldsymbol{\mathcal{L}[f(t-b)U(t-b)] = e^{-bs}F(s)}, \quad \mathrm{Re}\, s > a; \quad b > 0$$

-**Dokaz**: S obzirom na definiciju jedinične odskočne f-je, imamo:

$$\mathcal{L}[f(t-b)U(t-b)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t-b)U(t-b)dt$$

$$= \int_0^b e^{-st} f(t-b)\underbrace{U(t-b)}_{=0}dt + \int_b^\infty e^{-st} f(t-b)\underbrace{U(t-b)}_{=1}dt = \int_b^\infty e^{-st} f(t-b)dt$$

odakle, koristeći smenu: $t - b = x$, dobijamo:

$$\mathcal{L}[f(t-b)U(t-b)] = \int_0^\infty e^{-s(b+x)} f(x)dx = e^{-bs}\int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx = e^{-bs}F(s), \quad \mathrm{Re}\, s > a$$

(10) ***OSOBINA IZVODA ZA LAPLASOVU TRANSFORMACIJU.***

-Neka $f(t) \in E(a)$, $f'(t) \in E'(a)$ i neka je $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$,$\mathrm{Re}\, s > a$, $\mathcal{L}[f'(t)] = G(s)$, $\mathrm{Re}\, s > a$:

$$G(s) = sF(s) - f(0) \quad tj. \quad \boldsymbol{\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0)}, \quad \mathrm{Re}\, s > a$$

-**Dokaz**: Koristeći parcijalnu integraciju ($v = e^{-st}$, $du = f'(t)dt$) imamo da je, za $\mathrm{Re}\, s > a$:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt = e^{-st}f(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \lim_{T\to\infty} e^{-st}f(t)\Big|_0^T + s\mathcal{L}[f(t)]$$

$$= s\mathcal{L}[f(t)] - f(0)$$

jer je to zbog $|f(T)| \le Me^{aT}$ ispunjeno:

$$\lim_{T\to\infty} e^{-sT}f(T) = 0, \quad \mathrm{Re}\, s > a$$

-Višestruka primena ovog pravila dovodi do sledećeg rezultata: Ako $f(t), f'(t), \dots, f^{(n)}(t)$ pripadaju klasi $E(a)$ tada je:

$$\boldsymbol{\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right] = s^n\mathcal{L}[f(t)] - s^{n-1}f(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)}, \quad \mathrm{Re}\, s > a$$

(11) ***OSOBINA INTEGRALA ZA LAPLASOVU TRANSFORMACIJU.***

-Neka $f(t) \in E(a)$ i neka je $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, Re $s > a$. Tada je:

$$\boldsymbol{\mathcal{L}\left[\int_0^t f(x)dx\right] = \frac{\mathcal{L}[f(t)]}{s} = \frac{F(s)}{s}}, \quad \text{Re } s > a$$

-**Dokaz**: Dokažimo prvo da ovaj integral pripada $E(a)$. Zaista, zbog $|f(x)| \leq Me^{ax}$ sledi, za $a \neq 0$:

$$\left|\int_0^t f(x)dx\right| \leq \int_0^t |f(x)|dx \leq M\int_0^t e^{ax}dx = \frac{M}{a}(e^{at} - 1) \leq M_1 e^{at}$$

Koristeći parcijalnu integraciju $\left(du = e^{-st}dt;\ v = \int_0^t f(x)dx\right)$ imamo da je:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(x)dx\right] = \int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t f(x)dx\right)dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\left(\int_0^t f(x)dx\right)\Big|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

$$= -\frac{1}{s}\lim_{T\to\infty} e^{-st}\left(\int_0^t f(x)dx\right)\Big|_0^T + \frac{1}{s}\mathcal{L}[f(t)] = -\frac{1}{s}\underbrace{\lim_{T\to\infty} e^{-sT}\left(\int_0^T f(x)dx\right)}_{=0} + \frac{\mathcal{L}[f(t)]}{s}$$

$$= \frac{\mathcal{L}[f(t)]}{s} = \frac{F(s)}{s}$$

-Višestruka primena ovog pravila dovodi do sledećeg: ako je $f(t) \in E(a)$ tada je:

$$\boldsymbol{\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n = \frac{F(s)}{s^n}}, \quad \text{Re } s > a$$

(12) ***DEFINICIJA KONVOLUCIJE. KOMUTATIVNOST KONVOLUCIJE. OSOBINA KONVOLUCIJE ZA LAPLASOVU TRANSFORMACIJU.***

-***Konvolucija*** f-ja $f_1(t)$ i $f_2(t)$ je f-ja $g(t)$ definisana sa:

$$g(t) = \boldsymbol{f_1 * f_2} = \int\limits_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \boldsymbol{f_1(x)\, f_2(t-x)dx}$$

-Lako je proveriti da je konvolucija komutativna:

$$f_2 * f_1 = \int\limits_0^t f_2(x)\, f_1(t-x)dx = -\int\limits_t^0 f_2(t-x')\, f_1(x')dx' = \int\limits_0^t f_1(x')f_2(t-x')\, dx' = f_1 * f_2$$

-Neka je $f_1(t) \in E(a_1)$ i $f_2(t) \in E(a_2)$ i neka je: $\mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s)$ i $\mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(s)$. Tada važi:

$$\boldsymbol{\mathcal{L}[f_1 * f_2] = F_1(s) \cdot F_2(s)},\ \ \mathrm{Re}\, s > \max\{a_1, a_2\}$$

-**Dokaz**: Pokažimo prvo da je $g(t) = f_1 * f_2 \in E(a)$, gde je $a = \max\{a_1, a_2\}$. Zaista, zbog:

$$|f_1(t)| \le M_1 e^{a_1 t};\quad |f_2(t)| \le M_2 e^{a_2 t}$$

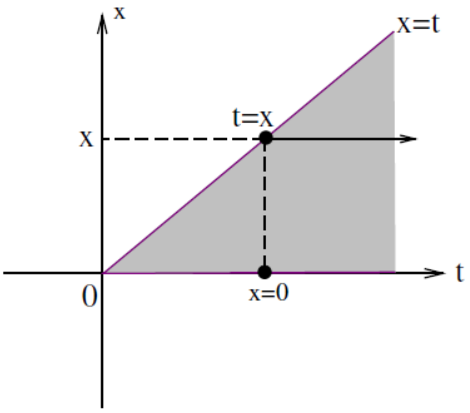
imamo da je za $a_1 \neq a_2$:

$$|g(t)| \le \int\limits_0^t |f_1(x)f_2(t-x)|dx \le M_1 M_2 \int\limits_0^t e^{a_1 x} e^{a_2(t-x)}dx = \frac{M_1 M_2}{a_1 - a_2} e^{a_1 t} e^{a_2 t} \le \frac{2M_1 M_2}{|a_1 - a_2|} e^{at} = Me^{at}$$

pa je po teoremi o egzistenciji Laplasove transformacije $g(t)$ definisana za Re $s > a$. Promenom poretka integracije ($0 \le x < t < \infty$ $-$ slika), imamo da je:

$$\mathcal{L}[g(t)] = \int\limits_0^\infty e^{-st} \left(\int\limits_0^t f_1(x)\, f_2(t-x)dx \right) dt = \int\limits_0^\infty f_1(x) \left(\int\limits_x^\infty e^{-st}\, f_2(t-x)dt \right) dx$$

odakle, smenom $t - x = t'$ u unutrašnjem integralu dobijamo:



$$\mathcal{L}[g(t)] = \int\limits_0^\infty f_1(x) \left(\int\limits_0^\infty e^{-s(t'+x)}\, f_2(t')dt' \right) dx$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{-sx} f_1(x) \left(\int\limits_0^\infty e^{-st'}\, f_2(t')dt' \right) dx$$

$$= \left(\int\limits_0^\infty e^{-sx}\, f_2(x)dx \right) \left(\int\limits_0^\infty e^{-st'}\, f_2(t')dt' \right)$$

$$= F_1(s) \cdot F_2(s), \quad \mathrm{Re}\, s > a$$

(13) ***AKO JE*** $\boldsymbol{\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)}$, ***Re*** $\boldsymbol{s > a}$***, DOKAZATI*** $\boldsymbol{\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s)}$, ***Re*** $\boldsymbol{s > a}$***.***

-Neka $f(t) \in E(a)$ i neka je $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, Re $s > a$. Tada je:

$$\boldsymbol{\mathcal{L}[tf(t)] = -F'(s)}, \quad \text{Re}\, s > a$$

-**Dokaz**: Prema drugoj teoremi iz prvog pitanja f-ja:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

je analitička u oblasti Re $s > a$. Diferenciranjem dobijamo:

$$F'(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^\infty \frac{d}{ds} e^{-st} f(t) dt = -\int_0^\infty e^{-st} t f(t) dt = -\mathcal{L}[tf(t)], \quad \text{Re}\, s > a$$

-Višestrukom primenog ovog pravila dolazimo do sledećeg rezultata:

$$\boldsymbol{\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(s)}, \quad \text{Re}\, s > a$$

(14) ***DOKAZATI DA JE*** $\boldsymbol{\mathcal{L}\{f(t)/t\} = \int_s^\infty F(p)dp}$, ***Re*** $\boldsymbol{> a}$***, AKO JE*** $\boldsymbol{L\{f(t)\} = F(s)}$, ***Re*** $\boldsymbol{s > a}$***.***

-Neka $f(t) \in E(a)$, $\frac{f(t)}{t} \in E(a)$ i neka je $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, Re $s > a$. Tada je:

$$G(s) = \boldsymbol{\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]} = \int_{\boldsymbol{s}}^\infty \boldsymbol{F(p)dp}, \quad \text{Re}\, s > a$$

-**Dokaz**: Diferenciranjem analitičke f-je:

$$G(p) = \int_s^\infty e^{-pt} \frac{f(t)}{t} dt \quad \Longrightarrow \quad G'(p) = -\int_s^\infty e^{-pt} t \frac{f(t)}{t} dt = -F(p)$$

Integracijom u granicama od S do s dolazimo do:

$$\int_S^s G'(p)dp = -\int_S^s F(p)dp \quad \Longrightarrow \quad G(s) - G(S) = \int_S^s F(p)dp$$

Prelaskom na granicu kad Re $S \to \infty$ dobijamo:

$$G(S) = \int_S^s F(p)dp$$

jer je zbog $\left|\frac{f(t)}{t}\right| \le Me^{at}$:

$$|G(S)| \le \int_s^\infty \left|e^{-pt}\frac{f(t)}{t}\right| dt \le M \int_s^\infty e^{(a-\text{Re}\, S)t} dt = \frac{M}{\text{Re}\, S - a} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{\text{Re}\, S\to\infty} G(s) = 0$$

(15) *INVERZNA LAPLASOVA TRANSFORMACIJA. JEDNOZNAČNOST.*

-Neka je $F(s)$ data f-ja kompleksne promenljive. Ako postoji f-ja realne promenljive $f(t)$ tako da je $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, f-ju $f(t)$ nazivamo ***inverznom Laplasovom transformacijom f-je*** $\boldsymbol{F(s)}$, tj:

$$\boldsymbol{f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]}$$

-**Teorema**: Ako $f(t) \in E(a)$ i $g(t) \in E(a)$ i ako je:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]; \quad g(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

tada ne postoji interval (c, d) dužine veće od nule na kome je $f(t) \neq g(t)$ za svako $t \in (c, d)$.

-**Posledica**: Ako $f(t)$ i $g(t)$ zadovoljavaju uslove teoreme i uz to su neprekidne f-je, tada je:

$$f(t) = g(t); \quad t > 0$$

U praksli se za $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ uzima obično neprekidna f-ja $f(t)$ takva da je $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, pa se inverzna transformacija može smatrati jednoznačnom. Stoga se tabela Laplasove transformacije može posmatrati istovremeno i kao tabela inverzne Laplasove transformacije.

-Pitanje je kako naći inverznu transformaciju f-je $F(s)$ koja nije obuhvaćena tabelom. Tada se, najčešće, ta f-ja može transformisati u zbir ili proizvod tabličnih f-ja.

(16) *EGZISTENCIJA INVERZNE LAPLASOVE TRANSFORMACIJE I MELINOVA FORMULA.*

-**Teorema** (***dovoljni uslovi za egzistenciju***): Neka f-ja $F(s)$ kompleksne promenljive $s = x + iy$ zadovoljava sledeće uslove:

(1) $F(s)$ je analitička funkcija u oblasti Re $s = x > a$;

(2) $\lim_{|s|\to\infty} F(s) = 0$, uniformno po arg s;

(3) za svako $s > a$ integral $\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} |F(s)| dy$ (integral realne f-je $|F(s)|$ duž prave Re $s = x$) konvergira.

Tada je f-ja $F(s)$ za Re $s > a$ Laplasova transformacija f-je $f(t)$, i pritom je, za $t > 0$:

$$\boldsymbol{f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{st} F(s) ds}, \quad x > a$$

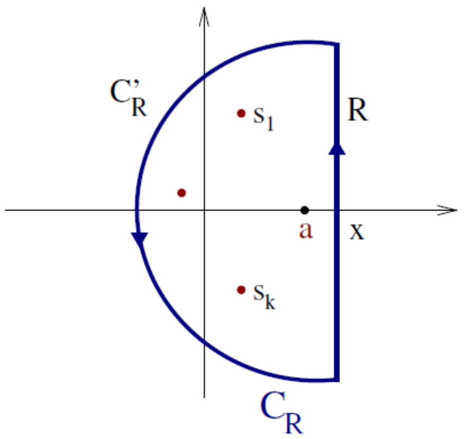
-Ova formula naziva se ***Melinova formula*** i pokazuje da je vrednost navedenog integrala nezavisna od x. Tj. integracija se može obaviti duž bilo koje prave Re $s = x$ uz uslov da je $x > a$.

-Pod određenim uslovima ovaj integral se može izračunati primenom teoreme o reziduumima.

-**Teorema**: Neka f-ja $F(s)$ zadovoljava uslove predhodne teoreme. Neka je, osim toga, f-ja $F(s)$ analitička za Re $s \leq a$, osim u konačno mnogo izolovanih singulariteta $s_1, \ldots, s_k$. Tada je, za $x > a$:

$$\boldsymbol{\frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{st} F(s) ds = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Res}[e^{st} F(s), s_i]}$$

-**Skica dokaza**: Posmatramo konturu C_R koja se sastoji od polukruga radijusa R i odsečka dužine $2R$ na pravoj $\mathrm{Re}\, s = x$. Označimo polukrug sa C_R'. Imamo da je:



$$\int_{C_R^+} e^{st}F(s)ds = \underbrace{\int_{C_R'} e^{st}F(s)ds}_{\text{polukrug}} + \underbrace{\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{st}F(s)ds}_{\text{prečnik}}$$

Za dovoljno veliko R svi singulariteti f-je $e^{st}F(s)$ nalaze se unutar konture C_R. Stoga važi:

$$\int_{C_R^+} e^{st}F(s)ds = 2\pi i \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Res}[e^{st}F(s), s_i]$$

$$\int_{C_R'} e^{st}F(s)ds + \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{st}F(s)ds = 2\pi i \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Res}[e^{st}F(s), s_i]$$

Pod određenim pretpostavkama dokazuje se da je, za $t > 0$:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R'} e^{st}F(s)ds = 0$$

pa, prelaskom na graničnu vrednost, kad $R \to \infty$ dobijamo:

$$\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{st}F(s)ds = 2\pi i \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Res}[e^{st}F(s), s_i]$$

(17) *NALAŽENJE* $\boldsymbol{\mathcal{L}^{-1}\{P(s)/Q(s)\}}$.

-Neka je $F(s) = P(s)/Q(s)$ gde su $P(s)$ i $Q(s)$ polinomi kompleksne promenljive s sa realnim koeficijentima, a stepen polinom $Q(S)$ je veći od stepena $P(S)$. Pokazuje se da se količnik $P(s)/Q(s)$ uvek može razložiti na sabirke određenog tipa. Pritom:

(1) Svakom ***jednostrukom realnom korenu*** $\boldsymbol{a}$ jednačine $Q(S) = 0$ odgovara po jedan sabirak oblika:

$$\frac{A}{s-a}$$

(2) Svakom ***višestrukom korenu*** $\boldsymbol{a}$ jednačine $Q(S) = 0$ odgovara k sabiraka oblika:

$$\frac{A_1}{(s-a)}, \frac{A_2}{(s-a)^2}, \dots, \frac{A_k}{(s-a)^k}; \quad k - \text{višestrukost korena } a$$

(3) Svakom ***paru jednostrukih konjugovano kompleksnih korena*** $\boldsymbol{\alpha \pm i\beta}$ jednačine $Q(S) = 0$ odgovara po jedan sabirak oblika:

$$\frac{As+B}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$$

(4) Svakom ***paru višestrukih konjugovano kompleksnih korena*** $\boldsymbol{\alpha \pm i\beta}$ jednačine $Q(S) = 0$ odgovara k sabiraka oblika:

$$\frac{A_1s+B_1}{(s-\alpha)^2+\beta^2}, \frac{A_ks+B_k}{((s-\alpha)^2+\beta^2)^2}, \dots, \frac{A_ks+B_k}{((s-\alpha)^2+\beta^2)^k}; \quad k - \text{višestrukost korena } \alpha \pm i\beta$$

-Konstante $A, B, \dots, A_k, B_k$ mogu se odrediti **metodom neodređenih koeficijenata**.

-***Nalaženje inverzne transformacije količnika*** $P(s)/Q(s)$ svodi se, na osnovu osobine linearnosti Laplasove transformacije, na nalaženje inverzne transformacije količnika oblika:

$$\frac{A}{s-a}$$
$$\frac{A_n}{(s-a)^n}$$
$$\frac{As+B}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$$
$$\frac{A_ns+B_n}{((s-\alpha)^2+\beta^2)^n}$$

-Pokažimo da se inverzna transformacija izraza ovih oblika uvek može naći direktno iz tabele:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{s-a}\right] = A\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] = \boldsymbol{Ae^{at}}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A_n}{(s-a)^n}\right] = \frac{A}{(n-1)!}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(n-1)!}{(s-a)^n}\right] = \boldsymbol{\frac{A}{(n-1)!}e^{at}t^{n-1}}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{As+B}{(s-\alpha)^2+\beta^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A(s-\alpha)+A\alpha+B}{(s-\alpha)^2+\beta^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A(s-\alpha)}{(s-\alpha)^2+\beta^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A\alpha+B}{(s-\alpha)^2+\beta^2}\right] =$$
$$= A\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}\right] + \frac{A\alpha+B}{\beta}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}\right] = \boldsymbol{Ae^{at}\cos\beta t + \frac{A\alpha+B}{\beta}e^{at}\sin\beta t}$$

(18) ***NALAŽENJE*** $\boldsymbol{\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\cdot G(s)\}}$**.**

-Neka je $F(s) = F_1(s) \cdot F_2(s)$, a pritom je poznato da je:

$$\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] = f_1(t); \quad \mathcal{L}^{-1}[F_2(s)] = f_2(t)$$

U tom slučaju je, a na osnovu osobine konvolucije:

$$\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)F_2(s)] = \int_0^t f_1(t)f_2(t-x)dx$$

(19) ***PRIMENA LAPLASOVE TRANSFORMACIJE NA DIFERENCIJALNE JEDNAČINE.***

-Razmatramo primenu na rešavanje Košijevog problema za linearne diferencijalne jedn. n-tog reda sa konstantnim koeficijentima.

-Neka je data jednačina i Košijev problem:

$$a_0x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + \cdots a_{n-1}x' + a_nx = f(t); \quad x(0) = x_0\,, x'(0) = x_0'\,, \ldots, x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}$$

Pretpostavimo da f-ja $f(t)$ ima eksponencijalni red rasta. Može se pokazati da tada rešenje Košijevog problema $x(t)$ takođe ima eksponencijalni red rasta. Primenom Laplasove transformacije na levu i desnu stranu diferencijalne jednačine dobijamo algebarsku jednačinu:

$$a_0\left(s^nX(s) - s^{n-1}x_0 - \cdots - sx_0^{(n-2)} - x_0^{(n-1)}\right) + a_1\left(s^{n-1}X(s) - s^{n-2}x_0 - \cdots - sx_0^{(n-3)} - x_0^{(n-2)}\right)$$
$$+ \cdots a_{n-1}(sX(s) - x_0) + a_nX(s) = F(s)$$

Rešavanjem po $X(s)$ dobijamo:

$$X(s)\,\underbrace{(a_0s^n - a_1s^{n-1} - \cdots - a_{n-1}s - a_n)}_{Q(s)} = F(s) + \underbrace{\left(a_0\left(s^{n-1}x_0 + \cdots + x_0^{(n-1)}\right) + \cdots + a_{n-1}x_0\right)}_{P(s)}$$

$$X(s)Q(s) = F(s) + P(s) \quad \Longrightarrow \quad X(s) = \frac{F(s) + P(s)}{Q(s)}$$

Primenom inverzne Laplasove transformacije, konačno dobijamo:

$$\boldsymbol{x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{F(s) + P(s)}{Q(s)}\right]}$$

(20) ***PRIMENA LAPLASOVE TRANSFORMACIJE NA SISTEME DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA.***

-Razmatramo primenu na rešavanje Košijevog problema za linearne sisteme diferencijalnih jedn. sa konstantnim koeficijentima. Ovaj postupak se može formalno opisati korišćenjem matričnog zapisa sistema. Neka je dat Košijev problem:

$$\frac{dX}{dt} = AX + b(t); \quad X(0) = X_0$$

gde je:

$$\frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}; \; A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}; \; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \; X_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{bmatrix}$$

Primenom Laplasove transformacije na dati sistem dobijamo:

$$\mathcal{L}\left[\frac{dX}{dt}\right] = s\mathcal{X}(s) - X_0 \quad \Rightarrow \quad s\mathcal{X}(s) - X_0 = A\mathcal{X}(s) + B(s); \quad \left(\mathcal{X}(s) = \mathcal{L}[X(t)] = \begin{bmatrix} \mathcal{L}[x_1] \\ \vdots \\ \mathcal{L}[x_n] \end{bmatrix}\right)$$

$$(sI - A)\mathcal{X}(s) = B(s) + X_0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{X}(s) = (sI - A)^{-1}(B(s) + X_0)$$

Primenom inverzne Laplasove transformacije dobijamo:

$$X(t) = \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{X}(s)] = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}(B(s) + X_0)]$$

$$\boldsymbol{X(t) = \int_0^t e^{A(t-x)} b(x) dx + e^{At} X_0}$$