

2. ГРУПА

1. За диференцијалну једначину

$$(3x^2 \cos y - \sin y) \cos y \, dx - x \, dy = 0$$

одредити интеграциони фактор облика $\lambda(y)$, а затим решити једначину.

Решење: Из услова $\frac{\partial}{\partial y}[\lambda(y)(3x^2 \cos y - \sin y) \cos y] = \frac{\partial}{\partial x}[\lambda(y)(-x)]$ добијамо диференцијалну ј-ну $\lambda'(y)(3x^2 \cos y - \sin y) \cos y = \lambda(y)(3x^2 \cos y - \sin y)2 \sin y$, тј. $\lambda'(y) \cos y = \lambda(y)2 \sin y$, чије решење је $\lambda(y) = \cos^{-2} y$. Након множења полазне ј-не са $\lambda(y)$ добијамо ј-ну са тоталним диференцијалом $(3x^2 - \operatorname{tg} y) \, dx - \frac{x}{\cos^2 y} \, dy = 0$. Решавањем интеграла $\int (3x^2 - \operatorname{tg} y) \, dx = x^3 - x \operatorname{tg} y + C$ и $\int [-\frac{x}{\cos^2 y} - \frac{\partial}{\partial y}(x^3 - x \operatorname{tg} y)] \, dy = C$ добијамо $u(x, y) = x^3 - x \operatorname{tg} y$, тј. решење $x^3 - x \operatorname{tg} y = C$.

2. Одредити решење диференцијалне једначине

$$y'' = \frac{2y}{1+y^2} y'^2 + (1+y^2)y',$$

за које важи $y(0) = -1$ и $y'(0) = -2$.

Решење: С обзиром да у датој једначини не фигурише променљива x , можемо снизити ред једначине сменом $y' = z, y'' = z'z$, где је $z = z(y)$. Добија се линеарна д.ј. $z' - \frac{2y}{1+y^2} z = 1+y^2$, чије решење је $z = y' = (1+y^2)(C_1 + y)$. Заменом вредности $y = -1, y' = -2$ добијамо да је $C_1 = 0$, тј. једначину $y' = (1+y^2)y$. Решење последње ј-не је $x = \frac{1}{2} \ln \frac{y^2}{1+y^2} + C_2$. Заменом вредности $x = 0, y = -1$ добијамо да је $C_2 = \frac{1}{2} \ln 2$, односно $x = \frac{1}{2} \ln \frac{2y^2}{1+y^2}$.

3. Одредити опште решење система диференцијалних једначина

$$\begin{aligned} x' &= -x + 2y + z \\ y' &= -3x + 3y + 2z \\ z' &= -3x + 5y \end{aligned}$$

Решење: Из карактеристичне једначине $\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow -(\lambda+2)(\lambda-2)^2 = 0$ добијамо сопствене

вредности матрице A : $\lambda_1 = -2, \lambda_{2,3} = 2$. За $\lambda_1 = -2$, из система $\begin{aligned} a + 2b + c &= 0 \\ -3a + 5b + 2c &= 0 \\ -3a + 5b + 2c &= 0 \end{aligned}$

налазимо сопств. вектор $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -11 \end{bmatrix}$, па је $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -11 \end{bmatrix} e^{-2t}$. За $\lambda_{2,3} = 2$, из сис-

тема $\begin{aligned} -3a_2 + 2b_2 + c_2 &= 0 & -3a_1 + 2b_1 + c_1 &= a_2 \\ -3a_2 + b_2 + 2c_2 &= 0 & -3a_1 + b_1 + 2c_1 &= b_2 \\ -3a_2 + 5b_2 - 2c_2 &= 0 & -3a_1 + 5b_1 - 2c_1 &= c_2 \end{aligned}$ налазимо сопствене век-

торе $\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 - \frac{1}{3}c_2 \\ c_1 \\ c_1 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 \\ c_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$. Из $X_{2,3} = \left(\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} t \right) e^{\lambda_{2,3}t}$, за $c_1 = 1, c_2 = 0$

добијамо $X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}$ и за $c_1 = 0, c_2 = 1$ добијамо $X_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} + t \\ t \\ t \end{bmatrix} e^{2t}$. На крају, опште

решење је $X = C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3$, тј. $\begin{aligned} x &= C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t} + C_3(-\frac{1}{3} + t)e^{2t} \\ y &= 5C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t} + C_3 t e^{2t} \\ z &= -11C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t} + C_3 t e^{2t} \end{aligned}$.