

### 3. ГРУПА

#### 1. Решити диференцијалну једначину

$$y'(x^2 \sin^3 y + x \cos y) + \sin y = 0.$$

Решење: Узимајући да је  $x = x(y)$  добијамо Бернулијеву д.ј.  $x' + x \operatorname{ctg} y = -x^2 \sin^2 y$ . Сменом  $z = x^{-1}$ ;  $x \neq 0$  Бернулијева д.ј. се своди на линеарну д.ј.  $z' + z \operatorname{ctg} y = \sin^2 y$ . Из  $z = e^{-\int \operatorname{ctg} y \, dy} \left( C + \int \sin^2 y e^{\int \operatorname{ctg} y \, dy} dy \right)$  добијамо решење линеарне ј-не:  $z = \sin y (C - \cos y)$ .

Враћањем смене  $z = x^{-1}$  долазимо до општег решења полазне ј-не:  $x = \frac{1}{\sin y (C - \cos y)}$ .

Напомена: Бернулијева д.ј. се може решити и методом неодређених ф-ја.

#### 2. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y'' + 4y' + 4y = 4e^{-2x} \sin^2 x.$$

Решење: Решења карактеристичне ј-не  $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$  су  $\lambda_{1,2} = -2$  па је решење одговарајуће хомогене ј-не  $y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$ . Како је  $4e^{-2x} \sin^2 x = 4e^{-2x} \frac{1 - \cos 2x}{2} = 2e^{-2x} - 2e^{-2x} \cos 2x$ , задатак можемо решити методом неодређених коефицијената. Партикуларно решење нехомогене ј-не  $y'' + 4y' + 4y = 2e^{-2x}$  је облика  $y_{p_1} = x^2 e^{-2x} A$ . Заменом у ј-ну налазимо да је  $A = 1$ , тј.  $y_{p_1} = x^2 e^{-2x}$ . Слично, партикуларно решење нехомогене ј-не  $y'' + 4y' + 4y = -2e^{-2x} \cos 2x$  је облика  $y_{p_2} = e^{-2x} (A \cos 2x + B \sin 2x)$ . Заменом у ј-ну налазимо да је  $A = \frac{1}{2}$  и  $B = 0$ , тј.  $y_{p_2} = \frac{1}{2} e^{-2x} \cos 2x$ . Опште решење полазне диференцијалне једначине је  $y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = (C_1 + C_2 x + x^2 + \frac{1}{2} \cos 2x) e^{-2x}$ .

Напомена: Задатак се може решити и методом варијације константи. Лобија се  $y = C_1(x) e^{-2x} + C_2(x) x e^{-2x}$ , где је  $C_1(x) = C_1 - x^2 + x \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x$  и  $C_2(x) = C_2 + 2x - \sin 2x$ .

#### 3. Одредити опште решење система диференцијалних једначина

$$\begin{aligned} x' &= -x + y + 3z \\ y' &= -4x + 3y + z \\ z' &= -2x + y - z \end{aligned}$$

Решење: Из карактеристичне једначине  $\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda)(\lambda^2 + 4) = 0$  добијамо сопствене вредности матрице  $A$ :  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_{2,3} = \pm 2i$ . За  $\lambda_1 = 1$ , из система

$$\begin{aligned} -2a + b + 3c &= 0 \\ -4a + 2b + c &= 0 \\ -2a + b - 2c &= 0 \end{aligned}$$

налазимо сопств. вектор  $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ , па је  $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} e^t$ . За  $\lambda_2 = 2i$ , из система

$$\begin{aligned} -(1 + 2i)a + b + 3c &= 0 \\ -4a + (3 - 2i)b + c &= 0 \\ -2a + b - (1 + 2i)c &= 0 \end{aligned} \quad \text{налазимо сопствени вектор} \quad \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \frac{a}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 + i \\ i \end{bmatrix}, \quad \text{па}$$

је  $X_{kom} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 + i \\ i \end{bmatrix} e^{2it} = \dots = \begin{bmatrix} 2 \cos 2t \\ 2 \cos 2t - \sin 2t \\ -\sin 2t \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 2 \sin 2t \\ \cos 2t + 2 \sin 2t \\ \cos 2t \end{bmatrix} = X_2 + iX_3$ . На крају, опште реш-

ење је  $X = C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3$ , тј.

$$\begin{aligned} x &= C_1 e^t + 2C_2 \cos 2t + 2C_3 \sin 2t \\ y &= 2C_1 e^t + C_2 (2 \cos 2t - \sin 2t) + C_3 (\cos 2t + 2 \sin 2t) \\ z &= -C_2 \sin 2t + C_3 \cos 2t \end{aligned}$$

Напомена: За сопств. вектор, који одговара сопств. вр.  $\lambda_2 = 2i$ , може се добити  $c \begin{bmatrix} -2i \\ 1 - 2i \\ 1 \end{bmatrix}$ .