

1. ГРУПА

1. Решити диференцијалну једначину

$$1 + xy'(x \sin^2 y + \operatorname{ctg} y) = 0.$$

Решење: Узимајући да је $x = x(y)$ добијамо Бернулијеву д.ј. $x' + x \operatorname{ctg} y = -x^2 \sin^2 y$. Сменом $z = x^{-1}$; $x \neq 0$ Бернулијева д.ј. се своди на линеарну д.ј. $z' + z \operatorname{ctg} y = \sin^2 y$. Из $z = e^{-\int \operatorname{ctg} y \, dy} \left(C + \int \sin^2 y e^{\int \operatorname{ctg} y \, dy} dy \right)$ добијамо решење линеарне ј-не: $z = \sin y (C - \cos y)$.

Браћањем смене $z = x^{-1}$ долазимо до општег решења полазне ј-не: $x = \frac{1}{\sin y (C - \cos y)}$.

Напомена: Бернулијева д.ј. се може решити и методом неодређених ф-ја.

2. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y'' + 4y' + 4y = 4e^{-2x} \cos^2 x.$$

Решење: Решења карактеристичне ј-не $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ су $\lambda_{1,2} = -2$ па је решење одговарајуће хомогене ј-не $y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$. Како је $4e^{-2x} \cos^2 x = 4e^{-2x} \frac{1 + \cos 2x}{2} = 2e^{-2x} + 2e^{-2x} \cos 2x$, задатак можемо решити методом неодређених коефицијената. Партикуларно решење нехомогене ј-не $y'' + 4y' + 4y = 2e^{-2x}$ је облика $y_{p_1} = x^2 e^{-2x} A$. Заменом у ј-ну налазимо да је $A = 1$, тј. $y_{p_1} = x^2 e^{-2x}$. Слично, партикуларно решење нехомогене ј-не $y'' + 4y' + 4y = 2e^{-2x} \cos 2x$ је облика $y_{p_2} = e^{-2x} (A \cos 2x + B \sin 2x)$. Заменом у ј-ну налазимо да је $A = -\frac{1}{2}$ и $B = 0$, тј. $y_{p_2} = -\frac{1}{2} e^{-2x} \cos 2x$. Опште решење полазне диференцијалне једначине је $y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = (C_1 + C_2 x + x^2 - \frac{1}{2} \cos 2x) e^{-2x}$.

Напомена: Задатак се може решити и методом варијације константи. Добија се $y = C_1(x) e^{-2x} + C_2(x) x e^{-2x}$, где је $C_1(x) = C_1 - x^2 - x \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x$ и $C_2(x) = C_2 + 2x + \sin 2x$.

3. Одредити опште решење система диференцијалних једначина

$$\begin{aligned} x' &= -x + y - 2z \\ y' &= x + 3y - 4z \\ z' &= 3x + y - z \end{aligned}$$

Решење: Из карактеристичне једначине $\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda)(\lambda^2 + 4) = 0$ добијамо сопствене вредности матрице A : $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = \pm 2i$. За $\lambda_1 = 1$, из система

$$\begin{aligned} -2a + b - 2c &= 0 \\ a + 2b - 4c &= 0 \\ 3a + b - 2c &= 0 \end{aligned}$$

налазимо сопств. вектор $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, па је $X_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^t$. За $\lambda_2 = 2i$, из система

$$\begin{aligned} -(1 + 2i)a + b - 2c &= 0 \\ a + (3 - 2i)b - 4c &= 0 \\ 3a + b - (1 + 2i)c &= 0 \end{aligned} \quad \text{налазимо сопствени вектор} \quad \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \frac{c}{2} \begin{bmatrix} i \\ 2 + i \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \text{па}$$

је $X_{kom} = \begin{bmatrix} i \\ 2 + i \\ 2 \end{bmatrix} e^{2it} = \dots = \begin{bmatrix} -\sin 2t \\ 2 \cos 2t - \sin 2t \\ 2 \cos 2t \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + 2 \sin 2t \\ 2 \sin 2t \end{bmatrix} = X_2 + iX_3$. На крају, опште реш-

ење је $X = C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3$, тј.

$$\begin{aligned} x &= -C_2 \sin 2t + C_3 \cos 2t \\ y &= 2C_1 e^t + C_2 (2 \cos 2t - \sin 2t) + C_3 (\cos 2t + 2 \sin 2t) \\ z &= C_1 e^t + 2C_2 \cos 2t + 2C_3 \sin 2t \end{aligned}$$

Напомена: За сопств. вектор, који одговара сопств. вр. $\lambda_2 = 2i$, може се добити $a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 - 2i \\ -2i \end{bmatrix}$.