

4. ГРУПА

1. За диференцијалну једначину

$$y \, dx + (\sin x - 3y^2 \cos x) \cos x \, dy = 0$$

одредити интеграциони фактор облика $\lambda(x)$, а затим решити једначину.

Решење: Из услова $\frac{\partial}{\partial y}[\lambda(x)y] = \frac{\partial}{\partial x}[\lambda(x)(\sin x - 3y^2 \cos x) \cos x]$ добијамо диференцијалну ј-ну $\lambda'(x)(3y^2 \cos x - \sin x) \cos x = \lambda(x)(3y^2 \cos x - \sin x)2 \sin x$, тј. $\lambda'(x) \cos x = \lambda(x)2 \sin x$ чије решење је $\lambda(x) = \cos^{-2} x$. Након множења полазне ј-не са $\lambda(x)$ добијамо ј-ну са тоталним диференцијалом $\frac{y}{\cos^2 x} dx + (\operatorname{tg} x - 3y^2) dy = 0$. Решавањем интеграла $\int \frac{y}{\cos^2 x} dx = y \operatorname{tg} x + C$ и $\int [(\operatorname{tg} x - 3y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(y \operatorname{tg} x)] dy = -y^3 + C$ добијамо $u(x, y) = y \operatorname{tg} x - y^3$, тј. решење $y \operatorname{tg} x - y^3 = C$.

2. Одредити решење диференцијалне једначине

$$(1 + y^2)y'' = 2yy'^2 + (1 + y^2)^2 y',$$

за које важи $y(0) = 1$ и $y'(0) = 2$.

Решење: С обзиром да у датој једначини не фигурише променљива x , можемо снизити ред једначине сменом $y' = z, y'' = z'z$, где је $z = z(y)$. Добија се линеарна д.ј. $z' - \frac{2y}{1 + y^2} z = 1 + y^2$, чије решење је $z = y' = (1 + y^2)(C_1 + y)$. Заменом вредности $y = 1, y' = 2$ добијамо да је $C_1 = 0$, тј. једначину $y' = (1 + y^2)y$. Решење последње ј-не је $x = \frac{1}{2} \ln \frac{y^2}{1 + y^2} + C_2$. Заменом вредности $x = 0, y = 1$ добијамо да је $C_2 = \frac{1}{2} \ln 2$, односно $x = \frac{1}{2} \ln \frac{2y^2}{1 + y^2}$.

3. Одредити опште решење система диференцијалних једначина

$$\begin{aligned} x' &= 5y - 3z \\ y' &= 2x + 3y - 3z \\ z' &= x + 2y - z \end{aligned}$$

Решење: Из карактеристичне једначине $\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow -(\lambda + 2)(\lambda - 2)^2 = 0$ добијамо сопствене вредности матрице A : $\lambda_1 = -2, \lambda_{2,3} = 2$. За $\lambda_1 = -2$, из система $\begin{aligned} 2a + 5b - 3c &= 0 \\ 2a + 5b - 3c &= 0 \\ a + 2b + c &= 0 \end{aligned}$

налазимо сопств. вектор $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} -11 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$, па је $X_1 = \begin{bmatrix} -11 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t}$. За $\lambda_{2,3} = 2$, из сис-

тема $\begin{aligned} -2a_2 + 5b_2 - 3c_2 &= 0 & -2a_1 + 5b_1 - 3c_1 &= a_2 \\ 2a_2 + b_2 - 3c_2 &= 0 & 2a_1 + b_1 - 3c_1 &= b_2 \\ a_2 + 2b_2 - 3c_2 &= 0 & a_1 + 2b_1 - 3c_1 &= c_2 \end{aligned}$ налазимо сопствене век-

торе $\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_1 \\ a_1 - \frac{1}{3}a_2 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_2 \\ a_2 \end{bmatrix}$. Из $X_{2,3} = \left(\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} t \right) e^{\lambda_{2,3}t}$, за $a_1 = 1, a_2 =$

0 добијамо $X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}$ и за $a_1 = 0, a_2 = 1$ добијамо $X_3 = \begin{bmatrix} t \\ t \\ -\frac{1}{3} + t \end{bmatrix} e^{2t}$. На крају, опште

решење је $X = C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3$, тј. $\begin{aligned} x &= -11C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t} + C_3 t e^{2t} \\ y &= 5C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t} + C_3 t e^{2t} \\ z &= C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t} + C_3 \left(-\frac{1}{3} + t\right) e^{2t} \end{aligned}$.