1. ПРИМЕР 2. КОЛОКВИЈУМА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 3

Презиме и име : ____ , број индекса : __________

1. Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$xy\,u'_x + \sqrt{y^2-1}\,u'_y + y(x^2-z)\,u'_z = 0\,.$$

Решење:
(стр.   )

2. Одредити све аналитичке ф-је $f : x+iy \to u(x,y)+iv(x,y)$ ако је

$$v(x,y) = y\sin x\,\mathrm{ch}\,y + x\cos x\,\mathrm{sh}\,y\,.$$

Решење:
(стр.   )

3. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y'' + 2y' + 5y = 4te^{-t}, \quad \text{ако је} \quad y(0) = y'(0) = 2\,.$$

Решење:
(стр.   )

2. ПРИМЕР 2. КОЛОКВИЈУМА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 3

Презиме и име : ______________________________ , број индекса : __________

1. Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$z(x+y)\,u'_x + z(x-y)\,u'_y + (y^2 - 2xy - x^2)\,u'_z = 0\,.$$

Решење:
(стр.)

2. Израчунати $\displaystyle\int\limits_{C^-} \frac{\mathrm{d}z}{z^5 - 2z^4 + 2z^3}$, ако је $C = \{\, z\colon |z-i| = \sqrt{2}\,\}$.

Решење:
(стр.)

3. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y''(t) = e^{2t} - \int_0^t y'(x)\, e^{2t-2x}\, \mathrm{d}x, \quad \text{ако је} \quad y(0) = 1 \ , \ y'(0) = -1 \, .$$

Решење:
(стр.)

ПРИМЕР РЕШЕНОГ 2. КОЛОКВИЈУМА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 3

Презиме и име : ________________________________ , број индекса : ____________

1. Решити парцијалну диференцијалну једначину
$$(-x^2 + xz^2)\, z'_x + (xy - yz^2 - 2z^2)\, z'_y = xz\,.$$

Решење:
(стр.5,6)

Придружени систем дате парцијалне j-не је $\quad \dfrac{\mathrm{d}x}{-x^2 + xz^2} = \dfrac{\mathrm{d}y}{xy - yz^2 - 2z^2} = \dfrac{\mathrm{d}z}{xz}\,.$

Из $\quad \dfrac{\mathrm{d}x}{-x^2 + xz^2} = \dfrac{\mathrm{d}z}{xz} \quad$ добијамо линеарну д.ј. $\quad x' + \dfrac{1}{z}x = z\,,$
чије решење $\quad z(3x - z^2) = C_1 \quad$ представља први интеграл придруженог система.

Из $\quad \dfrac{y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{-2xz^2} = \dfrac{\mathrm{d}z}{xz} \quad$ добијамо j-ну $\quad \mathrm{d}(xy) = -2z\,\mathrm{d}z\,,$
чије решење $\quad xy + z^2 = C_2 \quad$ представља још један први интеграл придруженог система.

Како су добијени први интеграли очигледно независни,
решење полазне парцијалне j-не $\quad z(x,y) \quad$ дефинисано је са $\quad F\big(z(3x - z^2), xy + z^2\big) = 0\,,$
где је $\quad F(\ ,\ ) \quad$ произвољна диференцијабилна ф-ја.

2. Одредити све аналитичке ф-је $\quad f : x + iy \to u(x,y) + iv(x,y) \quad$ ако је
$$v(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2 + 2y + 1}\,.$$

Решење:
(стр.3,4)

Из К-Р услова добијамо $\quad u'_x(x,y) = v'_y(x,y) = \dfrac{-2x(y+1)}{[x^2 + (y+1)^2]^2}$
и $\quad u'_y(x,y) = -v'_x(x,y) = \dfrac{x^2 - (y+1)^2}{[x^2 + (y+1)^2]^2}\,.$

Из $\quad u(x,y) = \displaystyle\int u'_x(x,y)\ \mathrm{d}x + \int \left[u'_y(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int u'_x(x,y)\ \mathrm{d}x\right)\right] \mathrm{d}y\,,$
$\displaystyle\int u'_x(x,y)\ \mathrm{d}x = \int \frac{-2x(y+1)}{[x^2 + (y+1)^2]^2}\ \mathrm{d}x = \frac{y+1}{x^2 + (y+1)^2} \quad$ и $\quad \displaystyle\frac{\partial}{\partial y}\left(\int u'_x(x,y)\ \mathrm{d}x\right) = \frac{x^2 - (y+1)^2}{[x^2 + (y+1)^2]^2}\,,$
добијамо $\quad u(x,y) = \dfrac{y+1}{x^2 + (y+1)^2} + C\,.$

На крају је
$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) = \dfrac{(y+1) + ix}{x^2 + (y+1)^2} + C = \dfrac{(y+1) + ix}{[(y+1) + ix][(y+1) - ix]} + C = \ \ldots$
$\ldots\ = \dfrac{i}{x + iy + i} + C\,, \quad$ односно $\quad f(z) = \dfrac{i}{z + i} + C\,.$

3. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y''(t) + \int_0^t (y''(x) + y(x))\ \sin(t-x)\ \mathrm{d}x = 2\cos t\,, \quad \text{ако је} \quad y(0) = 0\ ,\ y'(0) = -2\,.$$

Решење:

(стр.1,2)

Нека је $y(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} Y(s)$. Тада је $y''(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s^2Y(s) - s\,y(0) - y'(0) = s^2Y(s) + 2$ и

$$\int_0^t (y''(x) + y(x))\ \sin(t-x)\ \mathrm{d}x = (y''(t) + y(t)) * \sin t \xrightarrow{\mathcal{L}} (s^2Y(s) + 2 + Y(s))\frac{1}{s^2+1} = Y(s) + \frac{2}{s^2+1}\,.$$

Након деловања Лапласове тр. на дату диференцијално-интегралну ј-ну

добијамо алгебарску ј-ну $s^2Y(s) + 2 + Y(s) + \dfrac{2}{s^2+1} = \dfrac{2s}{s^2+1}$,

чије решење је $Y(s) = -\dfrac{2}{s^2+1} + \dfrac{2s}{(s^2+1)^2} - \dfrac{2}{(s^2+1)^2}$.

Тражена ф-ја $y(t)$ је инверзна Лапласова транс. ф-је $Y(s)$ и може се добити из

табличних Лапласових тр. $\sin t \xrightarrow{\mathcal{L}} \dfrac{1}{s^2+1}$, $t\sin t \xrightarrow{\mathcal{L}} \dfrac{2s}{(s^2+1)^2}$ и $t\cos t \xrightarrow{\mathcal{L}} \dfrac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$.

Добија се $y(t) = -2\sin t + t\sin t - (\sin t - t\cos t) = -3\sin t + t(\sin t + \cos t)$.