1. ГРУПА 15.01.2007.

II КОЛОКВИЈУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 3

Презиме и име:____, број индекса:_________

1. Матричном методом решити систем диференцијалних једначина

$$\begin{aligned} x' &= x + y - z \\ y' &= -x + 3y - z\,. \\ z' &= -x + y + z \end{aligned}$$

2. Израчунати $\displaystyle\int_{C^-} \frac{2\cos\frac{\pi z}{2}}{z^2(2z^2+5z+2)}dz$, ако је $C = \{z \mid |z| = 1\}$.

3. Применом Лапласове трансформације одредити опште решење једначине

$$y'' + y = f(t),$$

ако је $f(t) = \begin{cases} t & , \ 0 \le t < 1 \\ 1 & , \ 1 \le t \end{cases}$.

4. Ако је функција $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ диференцијабилна у тачки $z_0 = x_0 + i\,y_0$ тада важи $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$. Доказати.

2. ГРУПА 15.01.2007.

II КОЛОКВИЈУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 3

Презиме и име:____, број индекса:_________

1. Матричном методом решити систем диференцијалних једначина

$$\begin{aligned} x' &= x + y + 2z \\ y' &= -x + 3y + 2z\,. \\ z' &= x - 2y \end{aligned}$$

2. Одредити функцију $f : x + i\,y \to u(x,y) + i\,v(x,y)$, аналитичку за $z \ne -2$ $(z = x + iy)$, ако је

$$u(x,y) = \frac{y}{x^2 + y^2 + 4x + 4} \quad \text{и} \quad f(0) = i\,.$$

3. Применом Лапласове трансформације одредити опште решење једначине

$$\int_0^t y''(x)\cos(t-x)\,dx = t^2\,.$$

4. Рачунање резидума у случају када је z_0 пол реда n $(n \ge 1)$, функције $f(z)$.

3. ГРУПА 15.01.2007.

II КОЛОКВИЈУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 3

Презиме и име:____, број индекса:__________

1. Матричном методом решити систем диференцијалних једначина

$$\begin{aligned} x' &= 2x + y - z \\ y' &= x + y \\ z' &= 2x - y + 2z \end{aligned} .$$

2. Израчунати $\int\limits_{C^+} \frac{z^2+1}{z^2(1-\overline{z})(4-\overline{z})} dz$, ако је $C = \{ z \mid |z| = 2 \}$.

3. Применом Лапласове трансформације решити систем једначина

$$\begin{aligned} x'' + 3x - 4y &= 3 \\ y'' - y + x &= 1 \end{aligned},$$

ако је $x(0) = x'(0) = 0$ и $y(0) = y'(0) = 0$.

4. Метода варијације константи за систем диференцијалних једначина $\frac{dX}{dt} = A(t)X + b(t)$.

1. ГРУПА

1

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}(1-\lambda) & 1 & -1\\ -1 & (3-\lambda) & -1\\ -1 & 1 & (1-\lambda)\end{vmatrix}=\dots=(1-\lambda)(2-\lambda)^2 \Rightarrow \underline{\lambda_1=1,\ \lambda_{2,3}=2}$$

$$\lambda_1=1:\ (A-\lambda_1E)\cdot M=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}0&1&-1\\-1&2&-1\\-1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\dots\Rightarrow M=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\Rightarrow \underline{X_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}e^{1\cdot t}}$$

$$\lambda_{2,3}=2:\ \left.\begin{matrix}(A-\lambda_{2,3}E)\cdot M_2=0\\(A-\lambda_{2,3}E)\cdot M_1=M_2\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\begin{bmatrix}-1&1&-1\\-1&1&-1\\-1&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}-1&1&-1\\-1&1&-1\\-1&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{bmatrix}\end{matrix}\right.\Rightarrow\dots\Rightarrow M_1=\begin{bmatrix}a_1\\a_1+c_1\\c_1\end{bmatrix},\ M_2=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$a_1=1,\ c_1=0 \rightarrow \underline{X_2=(M_1+M_2t)e^{\lambda_{2,3}t}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}e^{2t}}$$

$$a_1=0,\ c_1=1 \rightarrow \underline{X_3=(M_1+M_2t)e^{\lambda_{2,3}t}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}e^{2t}}$$

$$\Rightarrow X=C_1X_1+C_2X_2+C_3X_3=\dots$$

2 $z_1=0$ пол 2. реда, $z_2=-\frac{1}{2}$ пол 1. реда $\left(f(z)=\dfrac{\cancel{2}\cos\frac{\pi}{2}z}{z^2\cdot\cancel{2}(z+\frac{1}{2})(z+2)}\right)$

$$\operatorname{Rez}(f(z),z_1=0)=\lim_{z\to0}\left(z^2f(z)\right)'=\lim_{z\to0}\left(\frac{\cos\frac{\pi}{2}z}{z^2+\frac{5}{2}z+1}\right)'=\lim_{z\to0}\frac{-\frac{\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{2}z)\cdot(z^2+\frac{5}{2}z+1)-(2z+\frac{5}{2})\cdot\cos\frac{\pi}{2}z}{(z^2+\frac{5}{2}z+1)^2}=\underline{\underline{-\frac{5}{2}}}$$

$$\operatorname{Rez}(f(z),z_2=-\tfrac{1}{2})=\lim_{z\to-\frac{1}{2}}(z+\tfrac{1}{2})f(z)=\lim_{z\to-\frac{1}{2}}\frac{\cos\frac{\pi}{2}z}{z^2(z+2)}=\frac{\cos-\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}}=\underline{\underline{\frac{4}{3}\sqrt{2}}}$$

$$\Rightarrow \oint_C f(z)dz=-2\pi i\left(-\frac{5}{2}+\frac{4}{3}\sqrt{2}\right)=\boxed{\left(5-\frac{8\sqrt{2}}{3}\right)\pi i}$$

3 $f(t)=t(u(t)-u(t-1))+u(t-1)=tu(t)-(t-1)u(t-1)\xrightarrow{\mathcal{L}}\frac{1}{s^2}-e^{-s}\frac{1}{s^2}$

$\mathcal{L}(y'')+\mathcal{L}(y)=\mathcal{L}(f(t))$ $\quad C_1=y(0),\ C_2=y'(0)$

$$\Rightarrow (s^2Y-C_1s-C_2)+Y=\frac{1}{s^2}-e^{-s}\frac{1}{s^2}\Rightarrow(s^2+1)Y=C_1s+C_2+\frac{1}{s^2}-e^{-s}\frac{1}{s^2}$$

$$\Rightarrow \underline{Y=C_1\frac{s}{s^2+1}+C_2\frac{1}{s^2+1}+\frac{1}{s^2(s^2+1)}-e^{-s}\frac{1}{s^2(s^2+1)}}$$

$$\Rightarrow Y=C_1\frac{s}{s^2+1}+C_2\frac{1}{s^2+1}+\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+1}\right)-e^{-s}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+1}\right)$$

$$\Rightarrow \underline{y(t)=C_1\cos t+C_2\sin t+(t-\sin t)-u(t-1)(t-1-\sin(t-1))}$$

2 ГРУПА

1 $\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 2\\ -1 & 3-\lambda & 2\\ 1 & -2 & -\lambda\end{vmatrix}=\ldots=(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda+2) \Rightarrow \underline{\lambda_1=2,\ \lambda_{2,3}=1\pm i}$

$\lambda_1=2:\ (A-\lambda_1E)\cdot M=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 2\\ 1 & -2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow \ldots \Rightarrow M=\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix} \Rightarrow \underline{X_1=\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}e^{2t}}$

$\lambda_2=1+i:\ (A-\lambda_2E)\cdot M=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}-i & 1 & 2\\ -1 & 2-i & 2\\ 1 & -2 & -(1+i)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow \ldots \Rightarrow M=\begin{bmatrix}2\\ 2\\ i-1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow X_{\text{кон}}=\begin{bmatrix}2\\ 2\\ i-1\end{bmatrix}e^{(1+i)t}=\ldots=\underbrace{\begin{bmatrix}2\cos t\\ 2\cos t\\ -(\sin t+\cos t)\end{bmatrix}}_{X_2}+i\underbrace{\begin{bmatrix}2\sin t\\ 2\sin t\\ \cos t-\sin t\end{bmatrix}}_{X_3} \Rightarrow X=C_1X_1+C_2X_2+C_3X_3$

2 $u'_x=v'_y=\dfrac{-y(2x+4)}{(x^2+y^2+4x+4)^2} \Rightarrow v=-(2x+4)\displaystyle\int\frac{y\,dy}{(x^2+y^2+4x+4)^2}=-(x+2)\int\frac{dt}{t^2}=(x+2)\cdot\frac{1}{t}+\varphi(x),\ t=x^2+y^2+4x+4$

$u'_y=-v'_x=\dfrac{x^2-y^2+4x+4}{(x^2+y^2+4x+4)^2}$ $\Rightarrow v=\dfrac{x+2}{x^2+y^2+4x+4}+\varphi(x)$

$\Rightarrow v'_x=-\dfrac{x^2-y^2+4x+4}{x^2+y^2+4x+4}+\varphi'(x)$

$\varphi'(x)=0$

$\varphi(x)=C \Rightarrow \underline{v=\dfrac{x+2}{x^2+y^2+4x+4}+C}$

$\Rightarrow f(x+iy)=u+iv=\dfrac{y+i(x+2)}{x^2+y^2+4x+4}+iC=\dfrac{y+i(x+2)}{(x+2)^2+y^2}+iC=\dfrac{\cancel{y+i(x+2)}}{\cancel{(y+i(x+2))}(y-i(x+2))}+iC$

$f(x+iy)=\dfrac{1}{y-ix-2i}+iC=\dfrac{i}{iy+x+2}+iC\ ,\ z=x+iy$

$\Rightarrow \underline{f(z)=\dfrac{i}{z+2}+iC}\ ,\ f(0)=\dfrac{i}{2}+iC=i \Rightarrow iC=\dfrac{i}{2} \Rightarrow \underline{f(z)=\dfrac{i}{z+2}+\dfrac{i}{2}}$

3 $\displaystyle\int_0^t y''(x)\cdot\cos(t-x)\,dx=y''(t)*\cos t$ ← КОНВОЛУЦИЈА

$\Rightarrow \mathcal{L}(y''(t)*\cos t)=\mathcal{L}(t^2)$

$\Rightarrow \mathcal{L}(y''(t))\cdot\mathcal{L}(\cos t)=\mathcal{L}(t^2)$

$\Rightarrow (s^2Y-C_1s-C_2)\cdot\dfrac{s}{s^2+1}=\dfrac{2}{s^3}\ ,\ C_1=y(0),\ C_2=y'(0)$

$\Rightarrow s^2Y-C_1s-C_2=\dfrac{2(s^2+1)}{s^4}=\dfrac{2}{s^2}+\dfrac{2}{s^4}$

$\Rightarrow s^2Y=C_1s+C_2+\dfrac{2}{s^2}+\dfrac{2}{s^4}$

$\Rightarrow \underline{Y=C_1\cdot\dfrac{1}{s}+C_2\dfrac{1}{s^2}+\dfrac{2}{s^4}+\dfrac{2}{s^6}} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \underline{y(t)=C_1+C_2t+\dfrac{t^3}{3}+\dfrac{t^5}{60}}$

$\dfrac{t^n}{n!}\xrightarrow{\mathcal{L}}\dfrac{1}{s^{n+1}}$

3. ГРУПА

$\boxed{1}$ $\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}2-\lambda & 1 & -1\\ 1 & 1-\lambda & 0\\ 2 & -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=\ldots=(1-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+5) \Rightarrow \lambda_1=1,\ \lambda_{2,3}=2\pm i$

$\lambda_1=1: (A-\lambda_1 E)\cdot M=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow \ldots \Rightarrow M=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix} \Rightarrow \underline{X_1=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}e^t}$

$\lambda_2=2+i: (A-\lambda_2 E)\cdot M=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}-i & 1 & -1\\ 1 & -(1+i) & 0\\ 2 & -1 & -i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow \ldots \Rightarrow M=\begin{bmatrix}1+i\\ 1\\ 2-i\end{bmatrix}$

$\Rightarrow X_{KOM}=\begin{bmatrix}1+i\\ 1\\ 2-i\end{bmatrix}e^{(2+i)t}=\ldots=\underbrace{\begin{bmatrix}\cos t-\sin t\\ \cos t\\ 2\cos t+\sin t\end{bmatrix}e^{2t}}_{X_2}+i\underbrace{\begin{bmatrix}\sin t+\cos t\\ \sin t\\ 2\sin t-\cos t\end{bmatrix}e^{2t}}_{X_3}$

$\Rightarrow X=C_1X_1+C_2X_2+C_3X_3=\ldots$

$\boxed{2}$ $\oint_{C^+}\frac{(z^2+1)\,dz}{(z-2\bar z)(4z-2\bar z)}=\oint_{C^+}\frac{(z^2+1)\,dz}{(z-|z|^2)(4z-|z|^2)}=\oint_{C^+}\frac{z^2+1}{(z-4)\cdot 4(z-1)}dz \Rightarrow z_1=1$ пол 1. реда

$\operatorname{Rez}(f(z), z_1=1)=\lim_{z\to1}(z-1)f(z)=\lim_{z\to1}\frac{z^2+1}{4(z-4)}=\frac{1+1}{4(1-4)}=-\frac{1}{6}$

$\Rightarrow \oint_{C^+}f(z)\,dz=2\pi i\left(-\frac{1}{6}\right)=\boxed{-\frac{\pi i}{3}}$

$\boxed{3}$ $\left.\begin{aligned}&\mathcal{L}(x'')+3\mathcal{L}(x)-4\mathcal{L}(y)=\mathcal{L}(3)\\ &\mathcal{L}(y'')-\mathcal{L}(y)+\mathcal{L}(x)=\mathcal{L}(1)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}&(s^2+3)\cdot X-4\cdot Y=\frac{3}{s}\\ &1\cdot X+(s^2-1)\cdot Y=\frac{1}{s}\end{aligned}\right\} \Leftarrow D=(s^2+1)^2,\ D_x=\frac{3s^2+1}{s},\ D_y=s$

$\Downarrow$

$\underline{X=\frac{D_x}{D}=\frac{3s^2+1}{s(s^2+1)^2},\ Y=\frac{s}{(s^2+1)^2}}$

$X(s)=\ldots=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}+\frac{2s}{(s^2+1)^2} \Rightarrow \boxed{x(t)=1-\cos t+t\sin t}$

$Y(s)=\frac{s}{(s^2+1)^2} \Rightarrow \boxed{y(t)=\frac{1}{2}t\sin t}$