1.

$$(x-1)\frac{\partial u}{\partial x}+(2y+z)\frac{\partial u}{\partial y}+(y+2z)\frac{\partial u}{\partial z}=0\,.$$

Горњој парцијалној диференцијалној једначини придружимо одговарајући систем диференцијалних једначина у симетричном облику:

$$\frac{dx}{x-1}=\frac{dy}{2y+z}=\frac{dz}{y+2z}$$

$$\frac{dx}{x-1}=\frac{dy-dz}{2y+z-y-2z}$$

$$\frac{dx}{x-1}=\frac{d(y-z)}{y-z}\Big/\int$$

$$\ln|x-1|=\ln|y-z|+c$$

$$\ln\left|\frac{x-1}{y-z}\right|=c$$

па је један први интеграл система:

$$\frac{x-1}{y-z}=c_1$$

$$\frac{dy}{2y+z}=\frac{dz}{y+2z}$$

$$\frac{dz}{dy}=\frac{y+2z}{2y+z}$$

$$\frac{dz}{dy}=\frac{y(1+2\frac{z}{y})}{y(2+\frac{z}{y})}$$

$$\frac{dz}{dy}=\frac{(1+2\frac{z}{y})}{(2+\frac{z}{y})}$$ хомогена једначина

За решавање ове једначине

$$\frac{dz}{dy}=\frac{(1+2\frac{z}{y})}{(2+\frac{z}{y})}$$ искористимо смену $$\frac{z}{y}=w \qquad \frac{dz}{dy}=\frac{dw}{dy}y+w$$

$$\frac{dw}{dy}y+w=\frac{(1+2w)}{(2+w)}$$

$$\frac{y}{dy}dw=\frac{(1+2w)}{(2+w)}-w$$

$$\frac{y}{dy}dw=\frac{1-w^2}{(2+w)}$$

$$\frac{2+w}{1-w^2}dw=\frac{dy}{y}$$

$$\int\frac{2+w}{1-w^2}dw=\int\frac{dy}{y}$$

$$\frac{3}{2}\int\frac{dw}{1-w}+\frac{1}{2}\int\frac{dw}{1+w}=\int\frac{dy}{y}$$

$$-\frac{3}{2}\ln|1-w|+\frac{1}{2}\ln|1+w|=\ln|y|+c$$

$$\ln\left|(1-w)^3/(1+w)\right|=2\ln|y|+2c$$

$$\ln\left|\frac{(1+w)}{(1-w)^3y^2}\right|=2c$$

$$\frac{(1+w)}{(1-w)^3y^2}=c_2$$

$$\frac{(1+\frac{z}{y})}{(1-\frac{z}{y})^3y^2}=c_2$$

а други први интеграл је:

$$\frac{(y+z)}{(y-z)^3}=c_2$$

Дакле решење горе наведеног симетричног система су следећи независни први интеграли

$$\frac{x-1}{y-z}=c_1,\ \frac{(y+z)}{(y-z)^3}=c_2$$

А тражена функција је $u=F(\frac{x-1}{y-z},\frac{(y+z)}{(y-z)^3})$

2.

$$f: x+iy \to u(x,y)+i\cdot v(x,y)$$
$$u(x,y)=\sin y\cdot chx \text{ и } f(0)=i$$

$$\text{CR: } u'_x = v'_y \text{ и } u'_y = -v'_x$$

Коришћењем прве везе добијамо следеће:
$$u'_x = \sin y \cdot shx = v'_y$$
$$v = \int \sin y \cdot shx \cdot dy$$
$$v = shx\int \sin y dy = shx(-\cos y)+\varphi(x)$$
$$v = -shx\cos y + \varphi(x)$$

Коришћењем прве везе добијамо следеће:
$$u'_y = \cos y \cdot chx = -v'_x$$
$$v'_x = -\cos y\cdot chx$$
односно
$$v = -shx\cos y+\varphi(x)$$
$$v'_x = -chx\cdot\cos y+\varphi'(x)$$

$$v'_x = -chx\cdot\cos y+\varphi'(x) = -chx\cdot\cos y$$
дакле $\varphi'(x)=0$
$$\varphi(x)=c$$

па је $v=-shx\cos y + c$

па је
$$f(x+iy)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$$
$$f(x+iy)=\sin y\cdot chx + i(c-\cos y\cdot shx)$$

И на послетку да искористимо и услов
$$f(0)=i$$
$$f(0+0\cdot i)=\sin 0\cdot ch0 + i(c-\cos 0\cdot sh0)=i$$
$$0\cdot 1 + i(c-1\cdot 0)=i$$
$$i\cdot c = i$$
$$c=1$$

$$f(x+iy)=\sin y\cdot chx + i(1-\cos y\cdot shx)$$

3.

$$\begin{aligned} x' &= 2x+4y+\cos t \\ y' &= -x-2y+\sin t \end{aligned} \quad \text{и} \quad \begin{aligned} x(0) &= -1 \\ y(0) &= 2 \end{aligned}$$

$$L[x'] = L[2x+4y+\cos t]$$
$$L[y'] = L[-x-2y+\sin t]$$

$$L[x'] = 2L[x]+L[4y]+L[\cos t]$$
$$L[y'] = -L[x]-2L[y]+L[\sin t]$$

$$sX(s)-x(0)=2X(s)+4Y(s)+\frac{s}{s^2+1}$$
$$sY(s)-y(0)=-X(s)-2Y(s)+\frac{1}{s^2+1}$$

$$(s-2)X(s)-4Y(s)=\frac{s}{s^2+1}-1$$
$$X(s)+(s+2)Y(s)=\frac{1}{s^2+1}+2$$

$$(s-2)X(s)-4Y(s)=\frac{s-s^2-1}{s^2+1}$$
$$X(s)+(s+2)Y(s)=\frac{2s^2+3}{s^2+1}$$

Решимо систем коришћењем Крамеровог правила:

$$\Delta=\begin{vmatrix} s-2 & -4 \\ 1 & s+2 \end{vmatrix}=s^2$$

$$\Delta_X=\begin{vmatrix} \frac{s-s^2-1}{s^2+1} & -4 \\ \frac{2s^2+3}{s^2+1} & s+2 \end{vmatrix}=\ldots=\frac{-s^3+7s^2+s+10}{s^2+1}$$

$$\Delta_Y=\begin{vmatrix} s-2 & \frac{s-s^2-1}{s^2+1} \\ 1 & \frac{2s^2+3}{s^2+1} \end{vmatrix}=\ldots=\frac{2s^3-3s^2+2s-5}{s^2+1}$$

па је решење система:

$$X(s)=\frac{\Delta_X}{\Delta}=\frac{-s^3+7s^2+s+10}{s^2(s^2+1)}$$
$$Y(s)=\frac{\Delta_Y}{\Delta}=\frac{2s^3-3s^2+2s-5}{s^2(s^2+1)}$$

односно

$$X(s)=\frac{-s^3+7s^2+s+10}{s^2(s^2+1)}=\frac{A_1}{s}+\frac{B_1}{s^2}+\frac{C_1s+D_1}{s^2+1}=\ldots=\frac{1}{s}+\frac{10}{s^2}+\frac{-2s-3}{s^2+1}$$
$$Y(s)=\frac{2s^3-3s^2+2s-5}{s^2(s^2+1)}=\frac{A_2}{s}+\frac{B_2}{s^2}+\frac{C_2s+D_2}{s^2+1}=\ldots=\frac{2}{s}+\frac{-5}{s^2}+\frac{0\cdot s+2}{s^2+1}$$

па применом инверрsне Лапласове трансформације на горње везе добијамо и решење полазног система:

$$L^{-1}[X(s)]=L^{-1}[\frac{1}{s}+\frac{10}{s^2}+\frac{-2s-3}{s^2+1}]$$
$$=L^{-1}[\frac{1}{s}]+10L^{-1}[\frac{1}{s^2}]-2L^{-1}[\frac{s}{s^2+1}]-3L^{-1}[\frac{1}{s^2+1}]$$
$$x(t)=1+10t-2\cos t-3\sin t$$

$$L^{-1}[Y(s)]=L^{-1}[\frac{2}{s}+\frac{-5}{s^2}+\frac{0\cdot s+2}{s^2+1}]$$
$$=2L^{-1}[\frac{1}{s}]-5L^{-1}[\frac{1}{s^2}]+2L^{-1}[\frac{1}{s^2+1}]$$
$$y(t)=2-5t+2\sin t$$