2. ГРУПА 15.01.2010.

II КОЛОКВИЈУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 3

Презиме и име:____, број индекса:___________

1. Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$(y^2+z^2)u'_x+(z-xy-yz^2)u'_y+(y+xz-y^2z)u'_z=0\,.$$

2. Одредити функцију $f: x+iy \to u(x,y)+iv(x,y)$, аналитичку за $z\neq 2i$ $(z=x+iy)$, ако је

$$v(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2-4y+4} \quad \text{и} \quad f(0)=-\frac{1}{2}.$$

3. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y'+y+\int_0^t e^{x-t}y(x)\,dx=\sin t,$$

ако је $y(0)=1$.

$\boxed{1}$ $\dfrac{dx}{y^2+z^2}=\dfrac{dy}{z-xy-yz^2}=\dfrac{dz}{y+xz-y^2z}$

I: $\dfrac{z\,dy+y\,dz}{z^2-yz^3+y^2-y^3z}=\dfrac{d(yz)}{(y^2+z^2)(1-yz)}=\dfrac{dx}{y^2+z^2} \Rightarrow \int\dfrac{d(yz)}{1-yz}=\int dx \Rightarrow \ldots \Rightarrow x+\ln|yz-1|=C_1$ 15б.

II: $\dfrac{y\,dy-z\,dz}{-xy^2-xz^2}=\dfrac{\frac12 d(y^2-z^2)}{-x(y^2+z^2)}=\dfrac{dx}{y^2+z^2} \Rightarrow \int d(z^2-y^2)=\int 2x\,dx \Rightarrow \ldots \Rightarrow z^2-x^2-y^2=C_2$ 15б.

$\Rightarrow u(x,y)=F(x+\ln|yz-1|,\ z^2-x^2-y^2)$, F произв. диф. ф-ја 3б.

$\boxed{2}$ $u'_x=v'_y=\dfrac{-2x(y-2)}{(x^2+(y-2)^2)^2}=P$

$u'_y=-v'_x=-\dfrac{(y-2)^2-x^2}{(x^2+(y-2)^2)^2}=Q$

$\Rightarrow u(x,y)=\int P\,dx+\int\left[Q-\frac{\partial}{\partial y}\int P\,dx\right]dy$

$\vdots$

$u(x,y)=\dfrac{y-2}{x^2+(y-2)^2}+\int 0\,dy \Rightarrow u(x,y)=\dfrac{y-2}{x^2+(y-2)^2}+C$

$\Rightarrow f(x+iy)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)=\dfrac{y-2+ix}{x^2+(y-2)^2}+C=\ldots=\dfrac{i}{x+iy-2i}+C \Rightarrow f(z)=\dfrac{i}{z-2i}+C$ 25б. 3б.

$\Rightarrow f(0)=\dfrac{i}{-2i}+C \Rightarrow C=0 \Rightarrow f(z)=\dfrac{i}{z-2i}$ 5б.

$\boxed{3}$ $\mathcal{L}\left(\int_0^t e^{-(t-x)}y(x)\,dx\right)=\mathcal{L}(e^{-t}*y(t))=\mathcal{L}(e^{-t})\cdot\mathcal{L}(y(t))=\dfrac{1}{s+1}\cdot Y(s)$

$\Rightarrow (s\cdot Y(s)-1)+Y(s)+\dfrac{1}{s+1}\cdot Y(s)=\dfrac{1}{s^2+1} \Rightarrow \dfrac{(s+1)^2+1}{s+1}\cdot Y(s)=\dfrac{1}{s^2+1}+1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow Y(s)=\dfrac{s^3+s^2+2s+2}{(s^2+1)(s^2+2s+2)}$ 16б.

$\Rightarrow Y(s)=\dfrac{As+B}{s^2+1}+\dfrac{Cs+D}{s^2+2s+2} \Rightarrow \ldots \Rightarrow A=-\frac15,\ B=\frac35,\ C=\frac65,\ D=\frac45$

$\Rightarrow Y(s)=\dfrac{-\frac15 s+\frac35}{s^2+1}+\dfrac{\frac65 s+\frac45}{s^2+2s+2}=\dfrac{-\frac15 s+\frac35}{s^2+1}+\dfrac{\frac65(s+1)-\frac25}{(s+1)^2+1}=-\frac15\dfrac{s}{s^2+1}+\frac35\dfrac{1}{s^2+1}+\frac65\dfrac{s+1}{(s+1)^2+1}-\frac25\dfrac{1}{(s+1)^2+1}$

$\Rightarrow y(t)=\frac15\cos t+\frac35\sin t+\frac65 e^{-t}\cos t-\frac25 e^{-t}\sin t$

18б.

4. ГРУПА 15.01.2010.

II КОЛОКВИЈУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 3

Презиме и име:____, број индекса:__________

1. Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$2xz\,z'_x + (z-x)^3 z'_y = x^2 + z^2 .$$

2. Израчунати $\int\limits_{C^-} \frac{\operatorname{tg} z}{z^3}\,dz$, ако је $C = \left\{ z \,\middle|\, |z-1| = \sqrt{2} \right\}$.

3. Применом Лапласове трансформације решити једначину $y''' - y' = 10\,e^t \cos t$, ако је $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$.

$\boxed{1}$ $\frac{dx}{2xz} = \frac{dy}{(z-x)^3} = \frac{dz}{x^2+z^2}$

$\text{I}: \frac{dz-dx}{(z-x)^2} = \frac{dy}{(z-x)^3} \Rightarrow \int (z-x)\cdot d(z-x) = \int dy \Rightarrow \ldots \Rightarrow \underline{(z-x)^2 - 2y = C_1}$ 14

$\text{II}: \frac{dz}{dx} = \frac{x^2+z^2}{2xz} \Leftrightarrow z'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right)$ - хомогена $\Rightarrow \ldots \Rightarrow \underline{\frac{z^2-x^2}{x} = C_2}$ 14

$\Rightarrow z(x,y): \; F\left((z-x)^2 - 2y, \frac{z^2-x^2}{x}\right) = 0$, $F(\cdot,\cdot)$ произв. диф. ф-ја 5

$\boxed{2}$ $f(z) = \frac{\sin z}{z^3 \cos z} \Rightarrow z=0$ и $z = \frac{\pi}{2} + k\pi; k\in\mathbb{Z}$ су сингуларитети 5

$z_1 = 0$ је пол 2. реда јер је: $\lim\limits_{z\to 0} z^2 f(z) = \lim\limits_{z\to 0} \frac{\sin z}{z}\cdot\frac{1}{\cos z} = 1\cdot 1 \neq 0$ 5

$z_2 = \frac{\pi}{2}$ је пол 1. реда јер: $\lim\limits_{z\to\frac{\pi}{2}} (z-\frac{\pi}{2}) f(z) = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{(\frac{\pi}{2})^3}\cdot \lim\limits_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{z-\pi/2}{\cos z} = \frac{1}{\frac{\pi^3}{8}}\cdot\lim\limits_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{-\sin z} = \ldots = -\frac{8}{\pi^3}$ 5

$\operatorname*{Res}\limits_{z_1=0} f(z) = \lim\limits_{z\to 0} (z^2 f(z))' = \lim\limits_{z\to 0}\left(\frac{\sin z}{z\cos z}\right)' = \lim\limits_{z\to 0} \frac{z\cos^2 z - (\cos z - z\sin z)\sin z}{z^2\cos^2 z} = \ldots = \lim\limits_{z\to 0}\frac{z - \frac{1}{2}\sin 2z}{z^2} = \lim\limits_{z\to 0}\frac{1-\cos 2z}{2z} =$

$= \lim\limits_{z\to 0}\frac{\cancel{2}\sin 2z}{\cancel{2}} = \underline{0}$ 12

$\operatorname*{Res}\limits_{z_2=\frac{\pi}{2}} f(z) = \lim\limits_{z\to\frac{\pi}{2}} (z-\frac{\pi}{2}) f(z) = \underline{-\frac{8}{\pi^3}}$ 2

$\Rightarrow \int\limits_{C^-} f(z)\,dz = -2\pi i\left(-\frac{8}{\pi^3} + 0\right) = \underline{\frac{16i}{\pi^2}}$ 5

$\boxed{3}$ $(s^3 Y - s^2 - s - \cancel{1}) - (sY - \cancel{1}) = 10\cdot\frac{s-1}{(s-1)^2+1} \Rightarrow (s^3 - s)\cdot Y = \frac{10(s-1)}{s^2-2s+2} + s^2 + s \Rightarrow$ 5 2 3

$\Rightarrow Y = \frac{10\cancel{(s-1)}}{s\cancel{(s-1)}(s+1)(s^2-2s+2)} + \frac{\cancel{s(s+1)}}{\cancel{s}(s-1)\cancel{(s+1)}} \Rightarrow \underline{Y = \frac{10}{s(s+1)(s^2-2s+2)} + \frac{1}{s-1}}$

$\frac{10}{s(s+1)(s^2-2s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{Cs+D}{s^2-2s+2} = \ldots = \frac{5}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{-3s+4}{s^2-2s+2} = \frac{5}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{-3(s-1)+1}{(s-1)^2+1}$ 5

$\Rightarrow Y = \frac{5}{s} + \frac{1}{s-1} - \frac{2}{s+1} - \frac{3(s-1)}{(s-1)^2+1} + \frac{1}{(s-1)^2+1}$ 8

$\Rightarrow \underline{y(t) = 5 + e^t - 2e^{-t} - 3e^t\cos t + e^t\sin t}$ 10