1. ГРУПА

1. Решити диференцијалну једначину

$$xy' = 2\sqrt{y}(x^2 + 2\sqrt{y})\,.$$

Решење: Дата једначина је еквивалентна са Бернулијевом једначином $y' - \dfrac{4}{x}y = 2xy^{1/2}$. За $y \neq 0$, сменом $z = y^{1/2}$, тј. $y = z^2$, Бернулијева једначина се своди на линеарну диференцијалну једначину $z' - \dfrac{2}{x}z = x$. Из $z = e^{\int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x}(C + \int x e^{-\int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x)$ добијамо решење линеарне једначине, $z = x^2(C + \ln|x|)$. Враћањем смене $z = y^{1/2}$ добијамо опште решење полазне диференцијалне једначине, $y = x^4 \ln^2|C_1 x|$. Није тешко приметити да је $y = 0$ њено сингуларно решење.

2. Одредити опште решење система диференцијалних једначина

$$\begin{aligned} x' &= x + y \\ y' &= -y + z \\ z' &= -4x - 6y + 2z \end{aligned}\,.$$

Решење: Из карактеристичне једначине $\det(A - \lambda I) = 0$, тј. $-\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 5) = 0$, добијамо сопствене вредности матрице A: $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$. За $\lambda_1 = 0$, из система $\begin{aligned} a + b &= 0 \\ -b + c &= 0 \\ -4a - 6b + 2c &= 0 \end{aligned}$ налазимо сопствени вектор $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = b\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, одакле је $X_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. За $\lambda_2 = 1 + 2i$, из система $\begin{aligned} -2ia + b &= 0 \\ (-2-2i)b + c &= 0 \\ -4a - 6b + (1-2i)c &= 0 \end{aligned}$ добијамо $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 2i \\ 4(i-1) \end{bmatrix}$, одакле је $X_{kom} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \\ 4(i-1) \end{bmatrix} e^{\lambda_2 t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \\ 4(i-1) \end{bmatrix} e^t(\cos 2t + i\sin 2t)$. Након срећивања добијамо $X_{kom} = \begin{bmatrix} \cos 2t \\ -2\sin 2t \\ -4(\cos 2t + \sin 2t) \end{bmatrix} e^t + i\begin{bmatrix} \sin 2t \\ 2\cos 2t \\ 4(\cos 2t - \sin 2t) \end{bmatrix} e^t$, па је $X_2 = \begin{bmatrix} \cos 2t \\ -2\sin 2t \\ -4(\cos 2t + \sin 2t) \end{bmatrix} e^t$ и $X_3 = \begin{bmatrix} \sin 2t \\ 2\cos 2t \\ 4(\cos 2t - \sin 2t) \end{bmatrix} e^t$. На крају, опште решење је $X = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3$, односно $\begin{aligned} x &= -C_1 + [C_2\cos 2t + C_3\sin 2t]e^t \\ y &= C_1 + 2[C_3\cos 2t - C_2\sin 2t]e^t \\ z &= C_1 + 4[C_3(\cos 2t - \sin 2t) - C_2(\cos 2t + \sin 2t)]e^t \end{aligned}$.

3. Израчунати $\displaystyle\int_{C^+} \frac{1}{\operatorname{sh} z}\,\mathrm{d}z$, ако је $C = \{z\colon |z| = 5\}$.

Решење: Функција $f(z) = \dfrac{1}{\operatorname{sh} z}$ није дефинисана у $z \in \mathbb{C}$ ако и само ако је $\operatorname{sh} z = 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^z - e^{-z}}{2} = 0 \Leftrightarrow e^{2z} = 1 \Leftrightarrow 2z = \operatorname{Ln} 1 \Leftrightarrow 2z = 2k\pi i \Leftrightarrow z = k\pi i$. То значи да су $z = 0$ и $z = \pm\pi i$ сингуларне тачке ф-је $f(z)$ које припадају области коју ограничава контура C. Како је $\lim\limits_{z\to 0} zf(z) = \lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z}{\operatorname{sh} z} \overset{\text{л.п.}}{=\!=} \lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1}{\operatorname{ch} z} = \dfrac{1}{\operatorname{ch} 0} = 1$, $z = 0$ је пол 1. реда и $\operatorname*{Res}\limits_{z=0} f(z) = 1$. За $z = \pi i$ имамо $\lim\limits_{z\to\pi i}(z - \pi i)f(z) = \lim\limits_{z\to\pi i}\dfrac{z - \pi i}{\operatorname{sh} z} \overset{\text{л.п.}}{=\!=} \lim\limits_{z\to\pi i}\dfrac{1}{\operatorname{ch} z} = \dfrac{1}{\operatorname{ch}\pi i} = -1$, па је $z = \pi i$ такође пол 1. реда и $\operatorname*{Res}_{z=\pi i} f(z) = -1$. На сличан начин се добија да је и $z = -\pi i$ пол 1. реда и $\operatorname*{Res}_{z=-\pi i} f(z) = -1$. Следи $\int\limits_{C^+} \frac{1}{\operatorname{sh} z}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\pi i} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=-\pi i} f(z) \right) = 2\pi i(1-1-1) = -2\pi i$.

4. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y'' + y' = 4\sin^2 t \,,$$

ако је $y(0) = y'(0) = 1$.

Решење: Нека је $y(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} Y(s)$. Тада је $y'' \xrightarrow{\mathcal{L}} s^2Y(s) - s\,y(0) - y'(0) = s^2Y(s) - s - 1$ и $y' \xrightarrow{\mathcal{L}} s\,Y(s) - y(0) = s\,Y(s) - 1$. Такође је $4\sin^2 t = 4 \cdot \frac{1-\cos 2t}{2} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{2}{s} - \frac{2s}{s^2+2^2}$. Након деловања Лапласове трансформације на дату диференцијалну једначину, добијамо алгебарску једначину $(s^2Y(s)-s-1)+(s\,Y(s)-1) = \frac{8}{s(s^2+2^2)}$, чије решење је $Y(s) = \frac{s^4+2s^3+4s^2+8s+8}{s^2(s+1)(s^2+4)}$. Методом неодређених коефицијената добија се $Y(s) = \frac{2}{s^2} + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{s+1} + \frac{2}{5}\cdot\frac{s-1}{s^2+4}$.
Тражена функција $y(t)$ је инверзна Лапласова трансформација функције $Y(s)$. Коришћењем табличних Лапласових трансформација добија се $y(t) = 2t + \frac{3}{5}e^{-t} + \frac{2}{5}\cos 2t - \frac{1}{5}\sin 2t$.

2. ГРУПА

1. Решити диференцијалну једначину

$$y'(4\sin^3 y + x\operatorname{ctg} y) = 1 \,.$$

Решење: Узимајући да је $x = x(y)$ и $y'(x) = \frac{1}{x'(y)}$, дата једначина се своди на линеарну диференцијалну једначину $x' - x\operatorname{ctg} y = 4\sin^3 y$. Из $x = e^{\int \operatorname{ctg} y\,\mathrm{d}y}(C + \int 4\sin^3 y\, e^{-\int \operatorname{ctg} y\,\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y)$, решавањем интеграла $\int \operatorname{ctg} y\,\mathrm{d}y = \ln|siny|$ и $\int \sin^2 y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}\sin 2y,$ долазимо до општег решења полазне диференцијалне једначине: $x = \sin y(C + 2y - \sin 2y)$.

2. Одредити опште решење парцијалне диференцијалне једначине

$$xyz'_x + (x^2 - xy + y^2)z'_y = (x+y)^2 \,.$$

Решење: Придружени систем дате парцијалне једначине је $\frac{\mathrm{d}x}{xy} = \frac{\mathrm{d}y}{x^2-xy+y^2} = \frac{\mathrm{d}z}{(x+y)^2}$. Из једнакости $\frac{\mathrm{d}x}{xy} = \frac{\mathrm{d}y}{x^2-xy+y^2}$, тј. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x^2-xy+y^2}{xy}$, добијамо хомогену диференцијалну једначину $y'(x) = \frac{x}{y} - 1 + \frac{y}{x}$. Коришћењем смене $u = \frac{y}{x}$, хомогена једначина се своди на једначину са раздвојеним променљивима $\frac{u\,\mathrm{d}u}{1-u} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$, чије решење је $u + \ln|x(u-1)| = C_1$.

Након враћања смене добијамо први интеграл придруженог система $\dfrac{y}{x} + \ln|y-x| = C_1$.

Из $\dfrac{3\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y}{3xy + (x^2 - xy + y^2)} = \dfrac{\mathrm{d}z}{x^2 + 2xy + y^2}$, односно $\mathrm{d}(3x+y) = \mathrm{d}z$, налазимо још један први интеграл придруженог система $3x + y - z = C_2$. Како су добијени први интеграли независни (проверити!), решење дате парцијалне једначине је облика $3x + y - z = F\left(\dfrac{y}{x} + \ln|y-x|\right)$, тј. $z = 3x + y - F\left(\dfrac{y}{x} + \ln|y-x|\right)$, где је $F(\ )$ произвољна диференцијабилна функција.

3. Одредити аналитичку ф-ју $f : x + iy \to u(x,y) + iv(x,y)$, ако је $f(0) = 1 + i$ и

$$u(x,y) = \operatorname{ch} 2y \cdot \cos 2x .$$

<u>Решење</u>: Из Коши-Риманових услова добијамо $v'_y(x,y) = u'_x(x,y) = -2\operatorname{ch} 2y \cdot \sin 2x$ и $v'_x(x,y) = -u'_y(x,y) = -2\operatorname{sh} 2y \cdot \cos 2x$. Из $v(x,y) = \displaystyle\int v'_x(x,y)\,\mathrm{d}x + \int \left(v'_y(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int v'_x(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\right)\mathrm{d}y$, $\displaystyle\int v'_x(x,y)\,\mathrm{d}x = -2\operatorname{sh} 2y \int \cos 2x\,\mathrm{d}x = -\operatorname{sh} 2y \cdot \sin 2x$ и $\displaystyle\frac{\partial}{\partial y}\left(\int v'_x(x,y)\,\mathrm{d}x\right) = -2\operatorname{ch} 2y \cdot \sin 2x = v'_y(x,y)$ добијамо $v(x,y) = -\operatorname{sh} 2y \cdot \sin 2x + C$. Заменом у полазну функцију добијамо:

$$\begin{aligned} f(x+iy) &= \operatorname{ch} 2y \cdot \cos 2x - i \operatorname{sh} 2y \cdot \sin 2x + iC = \frac{e^{2y} + e^{-2y}}{2}\cos 2x - i\frac{e^{2y} - e^{-2y}}{2}\sin 2x + iC \\ &= \frac{e^{2y}(\cos 2x - i\sin 2x) + e^{-2y}(\cos 2x + i\sin 2x)}{2} + iC = \frac{e^{2y}e^{-i2x} + e^{-2y}e^{i2x}}{2} + iC \\ &= \frac{e^{-i2(x+iy)} + e^{i2(x+iy)}}{2} + iC , \quad \text{тј.} \quad f(z) = \frac{e^{-i2z} + e^{i2z}}{2} + iC = \cos 2z + iC . \end{aligned}$$

Из $f(0) = \cos 0 + iC = 1 + i$ следи $C = 1$, па је тражена аналитичка ф-ја $f(z) = \cos 2z + i$.

4. Применом Лапласове трансформације одредити опште решење једначине

$$y'' + y = te^t + 4\sin t .$$

<u>Решење</u>: Нека је $y(0) = A$, $y'(0) = B$ и $y(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} Y(s)$. Тада је $y'' \xrightarrow{\mathcal{L}} s^2Y(s) - As - B$. Након деловања Лапласове трансформације на дату диференцијалну једначину, добијамо алгебарску ј-ну $s^2Y(s) - As - B + Y(s) = \dfrac{1}{(s-1)^2} + \dfrac{4}{s^2+1}$, чије решење је $Y(s) = \dfrac{1}{(s-1)^2(s^2+1)} + \dfrac{4}{(s^2+1)^2} + \dfrac{As+B}{s^2+1}$.

Методом неодређених коефицијената добија се $\dfrac{1}{(s-1)^2(s^2+1)} = -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{s-1} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{(s-1)^2} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{s}{s^2+1}$, па је $Y(s) = -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{s-1} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{(s-1)^2} + (A + \dfrac{1}{2})\cdot\dfrac{s}{s^2+1} + B\cdot\dfrac{1}{s^2+1} + \dfrac{4}{(s^2+1)^2}$.

Тражена функција $y(t)$ је инверзна Лапласова трансформација функције $Y(s)$. Коришћењем табличних Лапласових транс. и $\dfrac{4}{(s^2+1)^2} = 2\left(\dfrac{s^2+1}{(s^2+1)^2} - \dfrac{s^2-1}{(s^2+1)^2}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} 2(\sin t - t\cos t)$, добија се $y(t) = -\dfrac{1}{2}e^t + \dfrac{1}{2}te^t + (A + \dfrac{1}{2})\cos t + B\sin t + 2(\sin t - t\cos t)$. У компактнијем запису $y(t) = \dfrac{1}{2}(t-1)e^t + (C_1 - 2t)\cos t + C_2\sin t$, где је $C_1 = A + \dfrac{1}{2}$ и $C_2 = B + 2$.

<u>Напомена</u>: Инверзна Лапласова трансформација функције $\dfrac{4}{(s^2+1)^2}$ може се добити и коришћењем особине конволуције или Мелинове формуле.