1. ГРУПА 22.01.2007.

МАТЕМАТИКА 3 - МАТЕМАТИКА II

Презиме и име:____, број индекса:__________

1. Решити диференцијалну једначину

$$y' = \frac{2xy}{y - x^2 + 2y\ln y} .$$

2. Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$z^2 y z'_x + z^2 x z'_y = (x-y)^2 .$$

3. Одредити аналитичку функцију $f: x + iy \to u(x,y) + iv(x,y)$ такву да је $f(0)=0$ и

$$u(x,y) = x\,\mathrm{sh}x\cos y - y\,\mathrm{ch}x\sin y .$$

4. Применом Лапласове трансформације одредити опште решење система

$$\begin{aligned} x' - x + y &= \sin t \\ y' - 2x + y &= 0 \end{aligned} .$$

2. ГРУПА 22.01.2007.

МАТЕМАТИКА 3 - МАТЕМАТИКА II

Презиме и име:____, број индекса:__________

1. За диференцијалну једначину $(2x\sin y + 4\sin^2 y)\,dx = (x^2+1)\cos y\,dy$ одредити интеграциони фактор облика $\lambda(y)$, а затим решити једначину.

2. Одредити опште решење система диференцијалних једначина

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -5x + 2y \\ z' &= x \end{aligned} .$$

3. Израчунати $\displaystyle\int_{C^-} \frac{\mathrm{ch}z}{z(z+i)^2}\,dz$, ако је $C = \{z : |z| = 2\}$.

4. Применом Лапласове трансформације решити једначину $y'' - y = t\,\mathrm{sh}t$, ако је $y(0) = y'(0) = 0$.

1. ГРУПА

1 $x' = \frac{1}{y'} = \frac{y - x^2 + 2y\ln y}{2xy} \Leftrightarrow x' + \frac{1}{2y}x = \left(\frac{1}{2} + \ln y\right)x^{-1}$ – БЕРНУЛИЈЕВА $(z = x^2, z' = 2xx')$ 10б.

$\Rightarrow \ldots \Rightarrow z' + \frac{1}{y}z = 1 + 2\ln y$ – ЛИНЕАРНА 5б. $\Rightarrow z = e^{-\int \frac{1}{y}dy}\left(C + \int (1 + 2\ln y)e^{\int \frac{1}{y}dy}dy\right) \Rightarrow \ldots$

$\Rightarrow \ldots \Rightarrow z = x^2 = \frac{C}{y} + y\ln y$ 10б. (ИЛИ КАО ЈЕДНАЧИНА СА ТОТ. ДИФ. $\Rightarrow \ldots \Rightarrow x^2y - y^2\ln y = C$)

2 $\Rightarrow \frac{dx}{z^2y} = \frac{dy}{z^2x} = \frac{dz}{(x-y)^2}$

I: $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} \Rightarrow \int x\,dx = \int y\,dy \Rightarrow \ldots \Rightarrow x^2 - y^2 = C_1$ 8б. ← независни 1. интеграли

II: $\frac{d(x-y)}{-z^2(x-y)} = \frac{dz}{(x-y)^2} \Rightarrow \int (x-y)\,d(x-y) = \int -z^2 dz \Rightarrow \ldots \Rightarrow 3(x-y)^2 + 2z^3 = C_2$ 12б.

$\Rightarrow z(x,y): F(x^2 - y^2, 3(x-y)^2 + 2z^3) = 0$, F – диференцијабилна 5б.

3 $u'_x = v'_y = \text{sh}x\cdot\cos y + x\cdot\text{ch}x\cdot\cos y - y\cdot\text{sh}x\cdot\sin y$ 5б.
$u'_y = -v'_x = -x\,\text{sh}x\cdot\sin y - \text{ch}x\cdot\sin y - y\cdot\text{ch}x\cdot\cos y$

$\Rightarrow v = \int v'_y\,dy + \varphi(x)$
$= \text{sh}x\int\cos y\,dy + x\,\text{ch}x\int\cos y\,dy - \text{sh}x\int y\sin y\,dy + \varphi(x)$
$\vdots$
$= x\cdot\text{ch}x\cdot\sin y + y\cdot\text{sh}x\cdot\cos y + \varphi(x)$

$\Rightarrow v'_x = x\,\text{sh}x\,\sin y + \text{ch}x\,\sin y + y\,\text{ch}x\cos y + \varphi'(x) = x\cdot\text{sh}x\cdot\sin y + \text{ch}x\cdot\sin y + y\cdot\text{ch}x\cdot\cos y$

$\Rightarrow \varphi'(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = C$ $\Rightarrow v = x\cdot\text{ch}x\cdot\sin y + y\cdot\text{sh}x\cdot\cos y + C$ 15б.

$\Rightarrow f(x+iy) = u + iv = [x\cdot\text{sh}x\cdot\cos y - y\cdot\text{ch}x\cdot\sin y] + i[x\,\text{ch}x\,\sin y + y\cdot\text{sh}x\cdot\cos y + C] \Rightarrow \ldots \Rightarrow$ 5б.

$\Rightarrow f(z) = z\cdot\text{sh}z + iC,\ f(0) = iC = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(z) = z\cdot\text{sh}z$

4 $\mathcal{L}(x' - x + y) = \mathcal{L}(\sin t)$, $\mathcal{L}(y' - 2x + y) = 0$ $\Leftrightarrow$ $(sX - C_1) - X + Y = \frac{1}{s^2+1}$, $(sY - C_2) - 2X + Y = 0$ $\Leftrightarrow$ $(s-1)X + Y = C_1 + \frac{1}{s^2+1}$, $-2X + (s+1)Y = C_2$ $\Rightarrow \ldots$

$\Rightarrow \ldots \Rightarrow X = \frac{C_1 s}{s^2+1} + \frac{C_1 - C_2}{s^2+1} + \frac{s}{(s^2+1)^2} + \frac{1}{(s^2+1)^2} \Rightarrow x(t) = C_1\cos t + (C_1 - C_2)\sin t + \frac{1}{2}t\sin t + \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t)$

15б. $Y = \frac{C_2 s}{s^2+1} + \frac{2C_1 - C_2}{s^2+1} + \frac{2}{(s^2+1)^2} \Rightarrow y(t) = C_2\cos t + (2C_1 - C_2)\sin t + (\sin t - t\cos t)$ 10б.

2. ГРУПА

1 $\Leftrightarrow \underbrace{(2x\sin y+4\sin^2 y)}_{P}dx-\underbrace{(x^2+1)\cos y}_{Q}\,dy=0 \Rightarrow \lambda(y)P\,dx+\lambda(y)Q\,dy=0$

$\frac{\partial[\lambda(y)P]}{\partial y}=\frac{\partial[\lambda(y)Q]}{\partial x} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \lambda'(y)\cdot 2\sin y(x+2\sin y)=-2\lambda(y)\cdot 2\cos y(x+2\sin y)$

$\Leftrightarrow \lambda'(y)\sin y=-\lambda(y)\cdot 2\cos y \Leftrightarrow \int\frac{d\lambda}{\lambda}=\int -2\frac{\cos y}{\sin y}dy \Rightarrow \ln|\lambda|=-2\ln|\sin y| \Rightarrow \lambda=\sin^{-2}y=\frac{1}{\sin^2 y}$ 10б.

$\Rightarrow \underbrace{\left(\frac{2x}{\sin y}+4\right)}_{P}dx-\underbrace{\frac{(x^2+1)\cos y}{\sin^2 y}}_{Q}dy=0$ јед. са тоталним диференцијалом

$\Rightarrow u(x,y)=\int P\,dx+\int\left[Q-\frac{\partial}{\partial y}\int P\,dx\right]dy=\int\left(\frac{2x}{\sin y}+4\right)dx+\int\left[-\frac{(x^2+1)\cos y}{\sin^2 y}+\frac{\partial}{\partial y}\int P\,dx\right]dy=\dots=$

$=\left(\frac{x^2}{\sin y}+4x\right)+\int\left[\frac{(x^2+1)\cos y}{\sin^2 y}+\frac{x^2\cos y}{\sin^2 y}\right]dy=\left(\frac{x^2}{\sin y}+4x\right)+\int\left(-\frac{\cos y}{\sin^2 y}\right)dy=\dots=\frac{x^2}{\sin y}+4x+\frac{1}{\sin y}$

$\Rightarrow u(x,y)=\frac{x^2+1}{\sin y}+4x \Rightarrow \frac{x^2+1}{\sin y}+4x=C$ 15б.

2 $\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ -5 & (2-\lambda) & 0\\ 1 & 0 & -\lambda\end{vmatrix}=\dots=-\lambda(\lambda^2-2\lambda+5)$ 5б.

$\lambda_1=0,\ \lambda_{2,3}=1\pm 2i$ су сопствене вредности

$\lambda_1=0:\ (A-\lambda_1E)M=\begin{bmatrix}0&1&0\\-5&2&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}b=0\\-5a+2b=0\\a=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow_{c=1} M=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \Rightarrow X_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}e^{0t}$ 6б.

$\lambda_2=1+2i:\ (A-\lambda_2E)M=\begin{bmatrix}-(1+2i)&1&0\\-5&(1-2i)&0\\1&0&-(1+2i)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}-(1+2i)a+b=0\\-5a+(1-2i)b=0\\a-(1+2i)c=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow M=\begin{bmatrix}1+2i\\-3+4i\\1\end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow X_{kom}=\begin{bmatrix}1+2i\\-3+4i\\1\end{bmatrix}e^{(1+2i)t}=\begin{bmatrix}1+2i\\-3+4i\\1\end{bmatrix}e^t(\cos 2t+i\sin 2t)=\dots=\underbrace{\begin{bmatrix}\cos 2t-2\sin 2t\\-(3\cos 2t+4\sin 2t)\\\cos 2t\end{bmatrix}e^t}_{X_2}+i\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}2\cos 2t+\sin 2t\\4\cos 2t-3\sin 2t\\\sin 2t\end{bmatrix}e^t}_{X_3}$ 12б.

$\Rightarrow X=C_1X_1+C_2X_2+C_3X_3=\dots$ 2б.

3 $f(z)=\frac{\operatorname{ch} z}{z(z+i)^2} \Rightarrow z_1=0$ пол 1. реда, $z_2=-i$ пол 2. реда $(\operatorname{ch}0,\ \operatorname{ch}(-i)\neq 0)$ 4б.

$\operatorname{Rez}(f(z),z_1=0)=\lim_{z\to 0} z\cdot f(z)=\lim_{z\to 0} z\frac{\operatorname{ch} z}{z(z+i)^2}=\frac{\operatorname{ch}0}{i^2}=\frac{1}{-1}=-1$ 6б.

$\operatorname{Rez}(f(z),z_2=-i)=\lim_{z\to -i}\left[(z+i)^2f(z)\right]'=\lim_{z\to -i}\left[\frac{\operatorname{ch} z}{z}\right]'=\lim_{z\to -i}\frac{(\operatorname{sh} z)z-\operatorname{ch} z}{z^2}=\frac{(-i)\operatorname{sh}(-i)-\operatorname{ch}(-i)}{(-i)^2}=\dots=\cos 1+\sin 1$ 12б.

$\Rightarrow \oint_C f(z)dz=2\pi i(\operatorname{Rez}(z_1)+\operatorname{Rez}(z_2))=2\pi i(\cos 1+\sin 1-1)$ 3б.

[4] $\mathcal{L}(y'') - \mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(t\,\mathrm{sh}\,t)$

$(s^2 \cdot Y - 0 - 0) - Y = -\left(\frac{1}{s^2-1}\right)' = \frac{2s}{(s^2-1)^2} \Rightarrow (s^2-1)Y = \frac{2s}{(s^2-1)^2} \Rightarrow \underline{Y = \frac{1}{s^2-1}\cdot\frac{2s}{(s^2-1)^2}}$ 8б.

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{s^2-1} &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \mathrm{sh}\,t \\ \frac{2s}{(s^2-1)^2} &\xrightarrow{\mathcal{L}} t\,\mathrm{sh}\,t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{1}{s^2-1}\cdot\frac{2s}{(s^2-1)^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} (\mathrm{sh}\,t) * (t\,\mathrm{sh}\,t)$$

$\Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2-1}\cdot\frac{2s}{(s^2-1)^2}\right) = (\mathrm{sh}\,t) * (t\,\mathrm{sh}\,t)$

5б

$\Rightarrow y(t) = \int_0^t \mathrm{sh}(t-x)\cdot x\,\mathrm{sh}\,x \cdot dx = \int_0^t \frac{e^{t-x} - e^{x-t}}{2}\cdot x \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,dx = \int_0^t \frac{(e^t + e^{-t}) - (e^{2x-t} + e^{t-2x})}{4}\cdot x\,dx =$

$= \int_0^t \frac{\mathrm{ch}\,t - \mathrm{ch}(2x-t)}{2}\,x\,dx = \frac{\mathrm{ch}\,t}{2}\int_0^t x\,dx - \frac{1}{2}\int_0^t x\,\mathrm{ch}(2x-t)\,dx = \left[\begin{aligned} u &= x \Rightarrow du = dx \\ dv &= \mathrm{ch}(2x-t)dx \Rightarrow v = \frac{\mathrm{sh}(2x-t)}{2} \end{aligned}\right]$

$= \frac{\mathrm{ch}\,t}{2}\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^t - \frac{1}{2}\left(\frac{x\cdot\mathrm{sh}(2x-t)}{2}\Big|_0^t - \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{sh}(2x-t)\,dx\right) = \frac{t^2\,\mathrm{ch}\,t}{4} - \frac{t\cdot\mathrm{sh}\,t}{4} + \frac{1}{4}\,\frac{\mathrm{ch}(2x-t)}{2}\Big|_0^t = 0$

$\Rightarrow \underline{y(t) = \frac{t}{4}(t\cdot\mathrm{ch}\,t - \mathrm{sh}\,t)}$ 12б.