

UNIVERZITET U BEOGRADU
Fakultet organizacionih nauka

dr Mirjana Èangaloviæ

Diskretne matematièke strukture

(neredigovana skripta)

Beograd, 1997.

SADRŽAJ

1. UVOD.....	3
1.1. RELACIJA. OPERACIJA. FUNKCIJA	3
1.2. OSNOVNI POJMOVI LOGIKE	5
2. MATEMATIČKA LOGIKA.....	6
2.1. ISKAZNI RAČUN	6
2.1.1. Iskazna algebra	6
2.1.2. Iskazna formula i njena vrednost.....	7
2.1.3. Prekidačke mreže	9
2.1.4. Bool-ove funkcije	10
2.1.5. Izvođenje zaključaka	11
2.5. PREDIKATSKI RAČUN (KVANTIFIKATORSKI RAČUN)	12
2.5.1. Predikatske formule	12
2.5.2. Pojavljivanje promenljivih u predikatskoj formuli	13
2.5.3. Interpretacija predikatske formule	14
2.5.4. Istinitosna vrednost predikatske formule	15
3. ALGEBARSKE STRUKTURE.....	16
3.1. GRUPA	16
3.1. PRSTEN. TELO. POLJE. BOOL-OVA ALGEBRA.....	17
4. RELACIJSKE STRUKTURE.....	18
4.1 PARCIJALNO UREĐENI SKUP	18
4.2 SUPREMUM. INFIMUM. REŠETKA.....	19
5. OSNOVI TEORIJE GRAFOVA.....	20
5.1 DEFINICIJA GRAFA	20
5.2. MATRIČNA INTERPRETACIJA GRAFA	22
5.3 PUTEVI U GRAFU.....	23
5.4 NEKI SPECIJALNI GRAFOVI	24
5.5 STABLO (DRVO).....	25
6. TEORIJA KONAČNIH AUTOMATA	27
6.1 KONAČNA MAŠINA.....	27
6.2 KONAČNI AUTOMAT	30
7. FORMALNI JEZICI. GRAMATIKE	32
7.1 FORMALNI JEZICI.....	32
7.2 GRAMATIKE	32
7.3 VEZA IZMEĐU AUTOMATA I REGULARNIH GRAMATIKA.....	35

1. Uvod

1.1. Relacija. Operacija. Funkcija

Def. Uređena n-torka (x_1, x_2, \dots, x_n) je niz elemenata čiji se redosled tačno zna.

Primer: (a, b) je uređena dvojka.

Def. $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ako je $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n$.

Def. Dekartov (direktni) proizvod skupova A_1, A_2, \dots, A_n je skup

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Specijalno, $A \times A \times \dots \times A = A^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A, i = 1, 2, \dots, n\}.$

Primeri: $R^2 = \{(x, y) \mid x, y \in R\}$ - realna ravan

$R^3 = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in R\}$ - realni prostor

Def. f je binarna relacija nad skupovima A i B , ako je $f \subseteq A \times B$. Ako je $A = B$, tada je f binarna relacija nad A .

Ako $(x, y) \in f$, kažemo se " x u relaciji f sa y ", a pišemo se xfy .

Primeri: $f = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ - krug u ravni sa centrom $(0,0)$

$f = \{(x, y) \in R^2 \mid x < y\}$ - poluravan iznad prave $y = x$.

Def. f je relacija duž ine n nad skupovima A_1, A_2, \dots, A_n ako je $f \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$. Ako je $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$, tada je f relacija duž ine n nad A .

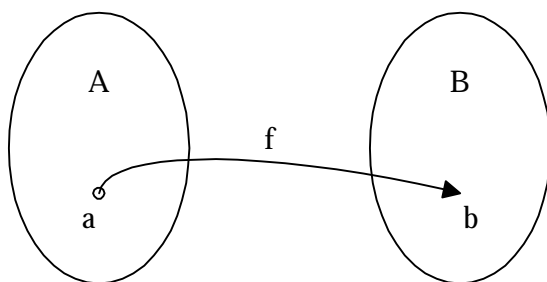
Ako je $f = \emptyset$, to je prazna relacija.

Ako je $f = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, to je univerzalna relacija.

Ako je $n = 1$ tj. $f \subseteq A$, to je unarna relacija nad A .

Def. Neka su A i B neprazni skupovi.

Ako se po nekom pravilu f svakom elementu iz A pridruži u neki element iz B , tada se kažemo da je f funkcija koja preslikava A u B .



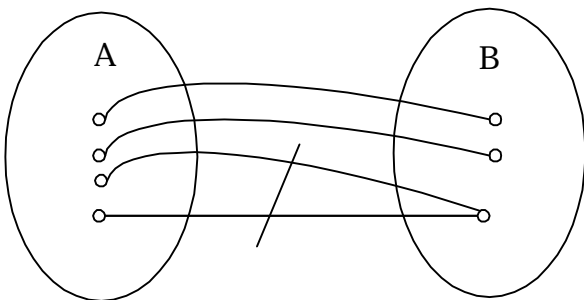
U oznaci: $f : A \rightarrow B$, $b = f(a)$, a - original, b - slika.
 A je domen, a $f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$ je kodomen.

Def. f je jednoznačna funkcija ako važi da, za svako $x \in A$ i $y, z \in B$, ako $y = f(x)$ i $z = f(x)$, onda $y = z$. Jednoznačna funkcija f se naziva preslikavanje.

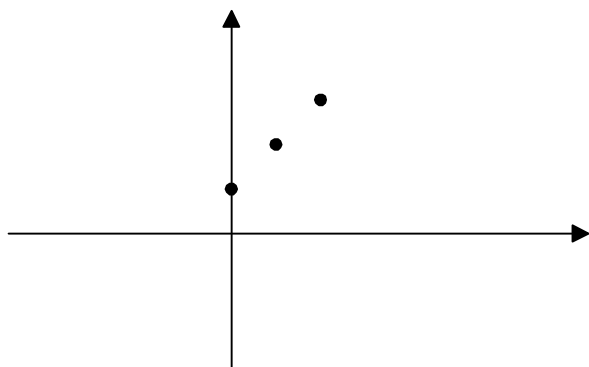
Def. Preslikavanje $f : A \rightarrow B$ je "na", ako je $f(A) = B$ tj. za svako $b \in B$ postoji $a \in A$ tako da je $f(a) = b$.

Preslikavanje $f : A \rightarrow B$ je "1-1", ako važi i: za svako $x, y \in A$, ako je $f(x) = f(y)$, onda je $x = y$.

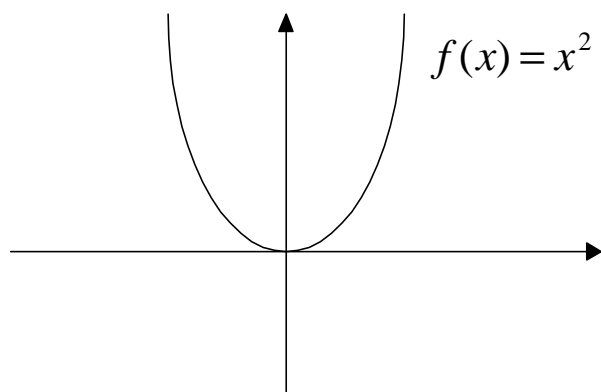
Ako je $f : A \rightarrow B$ i "na" i "1-1", naziva se bijekcija ili uzajamno jednoznačno preslikavanje.



Primeri: $f : N \rightarrow N$, $f(x) = x + 1$



- nije "na", jeste "1-1"
 Za $f : N \rightarrow N \setminus \{1\}$, jeste bijekcija



$$f(x) = x^2$$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, nije "na", nije "1-1"

$f : \mathbb{R} \rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$, jeste "na", nije "1-1"

$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, jeste "na", jeste "1-1"

Def. f je binarna operacija nad skupovima A, B, C ako je f preslikavanje $A \times B$ u skup C .
 f je operacija dužine n nad skupovima A_1, A_2, \dots, A_n, B ako je f preslikavanje $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ u B .

Za $n = 1$, f je unarna operacija.

Primeri:

$$z = x + y$$

$$+ : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$z = x \cup y$$

$$\cup : PA \times PA \rightarrow PA$$

$$z = -x$$

operacija promene znaka je unarna.

1.2. Osnovni pojmovi logike

Def. Iskaz je rečenica koja ima smisla i koja je ili istinita ili neistinita (ne može biti i jedno i drugo ili ni jedno ni drugo).

Iskaz obeležavamo sa P, Q, R, S .

Svakom iskazu pridružujemo istinitosnu vrednost, u oznaci $v(P)$,

$$v(P) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } P \text{ istinito} & (\text{ili } T) \\ 0, & \text{ako je } P \text{ lažno} & (\text{ili } \perp, L) \end{cases}$$

Primeri:

- Za svaki realni broj x , $x^2 = 9$. (iskaz koji je lažan)
- Kroz tačku A van prave p prolaze bar dve različite prave koje ne seku pravu p . (aksiom – dogovoreno tačan iskaz u geom. Lobačevskog)
- Ova rečenica je lažna (semantički paradoks – circulus vitiosus – nije iskaz)

Def. Predikat je rečenica koja ima smisla, sadrži jednu ili više promenljivih i njena istinitost zavisi od konkretnih vrednosti tih promenljivih.

Primeri:

- x i y su realni brojevi i $x^2 + y^2 \leq 1$ (predikat istinit za $x = y = 0$, a za $x = y = 1$ je laž an).
- Za svaki prirodni broj x , $x > y$ (za $y < 1$, predikat je istinit, a za $y \geq 1$ je laž no).

Od rečenica (iskaza i predikata) se formiraju slož enije rečenice upotrebom tzv. logičkih operacija. Istinitosna vrednost novih rečenica zavisi od istinitosnih vrednosti rečenica koje ih obrazuju i utvrđuju se na osnovu ovih vrednosti.

Negacija – "ne P" – negacija tačnog iskaza je netačan iskaz, i obrnuto.

Konjunkcija – "P i Q" – istinita samo ako su i P i Q istinite.

Disjunkcija – "P ili Q" – istinita ako je bar jedan od iskaza tačan.

Implikacija – "Ako P, onda Q", - laž na je ako je P istinito, a Q laž no, u svim ostalim slučajevima je istinito. "Iz P sledi Q", "P povlači Q", "P je dovoljan uslov za Q", "Q je neophodan uslov za P", itd. P je pretpostavka, premisa, Q je posledica, zaključak.

Ekvivalencija – "P ako i samo ako Q" – tačno ako su P i Q oba tačna ili oba netačna. "P je ekvivalentno sa Q", "P akko Q", "P je neophodno i dovoljno za Q".

$v(P)$	$v(Q)$	$v(\text{ne}P)$	$v(P \text{ i } Q)$	$v(P \text{ ili } Q)$	$v(\text{ako } P \text{ onda } Q)$	$v(P \text{ akko } Q)$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

2. Matematička logika

- Formalizuje postupke dobijanja slož enih rečenica od prostih, utvrđivanje istinitosne vrednosti ovih rečenica u skladu sa pravilima ispravnog logičkog zaključivanja.
- Deli se na iskazni račun i predikatski račun.

2.1. Iskazni račun

- formalizuje pravilno zapisivanje iskaza, građenje novih slož enih iskaza, kao i utvrđivanje istinitosne vrednosti ovih iskaza u zavisnosti od istinitosti iskaza koji ih čine.

Da bi se ova formalizacija uspešno izvela, uvodi se pojam iskazne algebre.

2.1.1. Iskazna algebra

Def. Dat je skup $\{0, 1\}$ i operacije $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ definisane sledećim tablicama

elmenat iz $\{0, 1\}$	\neg
1	0

0	1
---	---

elemenat iz $\{0,1\}^2$	\wedge	\vee	\Rightarrow	\Leftrightarrow
(1, 1)	1	1	1	1
(1, 0)	0	1	0	0
(0, 1)	0	1	1	0
(0, 0)	0	0	1	1

Skup $\{0,1\}$ snabdeven operacijama $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ je iskazna algebra.

Operacije iskazne algebre mogu, u opštem slučaju, biti bilo koje operacije sa prethodnim tablicama. One ovde nose oznake logičkih operacija, jer logičke operacije imaju iste tablice nad skupom {istinito, neistinito}.

Uobičajene oznake za operacije: $1 \wedge 1 = 1$, $1 \Rightarrow 0 = 0$

2.1.2. Iskazna formula i njena vrednost

Simboli iskazne algebre:

- promenljive iskazne algebre: $p, q, r, p_1, q_1, r_1, \dots, p_n, q_n, r_n, \dots$
- simboli operacija: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- pomoćni simboli: $(,)$.

Def. Iskazna formula je niz sastavljen od iskaznih slova, simbola operacija i zagrada koji je formiran prema sledećim konvencijama formalnog zapisivanja:

1. Iskazna slova su formule
2. Ako su A i B iskazne formule, tada su i $\neg A, (A \wedge B), (A \vee B), (A \Rightarrow B), (A \Leftrightarrow B)$ iskazne formule.
3. Iskazne formule se jedino obrazuju konačnom primenom 1. i 2.

Primeri:

$p, \neg p, (p \vee q), ((\neg p \Rightarrow q) \wedge \neg(r \vee q))$ - pravilno
 $p \neg,)p \vee q, p \Rightarrow \vee q$ - nepravilno

- spoljašnje zagrade mogu se izostaviti
- unutrašnje zagrade mogu se izostaviti u skladu sa sledećim prioritetima operacija: 1) \neg , 2) \vee, \wedge , 3) \Rightarrow , 4) \Leftrightarrow . Npr. $\neg(p \wedge q) \vee r \Rightarrow q$.
- $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_{n-1}) \wedge A_n = A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n = \bigwedge_{i=1}^n A_i$
- $(A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_{n-1}) \vee A_n = A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n = \bigvee_{i=1}^n A_i$

Iskazna formula za iskaznu algebru predstavlja ono što predstavlja algebarski izraz za algebru brojeva.

Vrednost iskazne formule A , $v(A)$, dobija se kada u A svaku promenljivu zamenimo sa nekom vrednošću iz $\{0, 1\}$ i izvršimo sve naznačene operacije. Kao rezultat se dobije 1 ili 0 koje predstavlja vrednost formule A za odgovarajuće vrednosti promenljivih.

Primer:

$$((\neg p \Rightarrow q) \wedge \neg(r \vee q)) \text{ za } p = q = 1, \quad r = 0$$

$$v((\neg p \Rightarrow q) \wedge \neg(r \vee q)) = ((\neg 1 \Rightarrow 1) \wedge \neg(0 \vee 1)) = (0 \Rightarrow 1) \wedge \neg 1 = 1 \wedge 0 = 0$$

Ovakva formalizacija omogućava jednoznačno izražavanje istinitosnih vrednosti složenih iskaza:

Ako sada u iskaznoj algebri promenljive p, q, r smatramo iskazima, operacije $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ označavaju odgovarajuće logičke operacije, a 0 znači “lažno” i 1 znači “istinito”, tada iskazne formule predstavljaju pravilno zapisane složene iskaze.

Istinitosna vrednost ovakvog složenog iskaza se dobija kao vrednost njemu odgovarajuće iskazne formule na sledeći način: Svaki se iskaz u formuli zameni svojom istinitosnom vrednošću pa se izračuna vrednost formule kao u iskaznoj algebri. Vrednost formule predstavlja istinitosnu vrednost iskaza. Tako se izražavanje istinitosnih vrednosti složenih iskaza svodi na izražavanje u iskaznoj algebri.

Primer:

Data su dva trougla $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$. Ako je $\alpha = \alpha_1$ i $AB = A_1B_1$, tada su trouglovi $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$ podudarni ako i samo ako je $\beta = \beta_1$.

Formalizacija:

$$p: \alpha = \alpha_1, q: AB = A_1B_1, r: \triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1, s: \beta = \beta_1$$

Odgovarajuća formula iskazne algebre: $(p \wedge q) \Rightarrow (r \Leftrightarrow s)$

$$\text{za } p = q = r = s = 1, \quad v((p \wedge q) \Rightarrow (r \Leftrightarrow s)) = (1 \wedge 1) \Rightarrow (1 \Leftrightarrow 1) = 1 \Rightarrow 1 = 1$$

$$\text{za } p = q = 1, r = 1, s = 0, \quad v((p \wedge q) \Rightarrow (r \Leftrightarrow s)) = (1 \wedge 1) \Rightarrow (1 \Leftrightarrow 0) = 1 \Rightarrow 0 = 0$$

Def. Tautologija je iskazna formula koja za sve moguće vrednosti svojih promenljivih ima vrednost 1. (Tautologija predstavlja zakone pravilnog formalnog zaključivanja.)

Neke poznate tautologije

1. $p \Rightarrow p$ (refleksivnost)
2. $p \vee \neg p$ (isključivanje trećeg)

3. $\neg(p \wedge \neg p)$ (neprotivureènost)
4. $\neg\neg p \Leftrightarrow p$ (dvojna negacija)
5. $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ (tranzitivnost za \Rightarrow)
6. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ (kontrapozicija)
7. $(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$ (tranzitivnost za \Leftrightarrow)
8. $p \vee p \Leftrightarrow p, p \wedge p \Leftrightarrow p$ (idempotencija za \vee, \wedge)
9. $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p, p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ (komutativnost za \vee, \wedge)
10. $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
 $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ (asocijativnost za \vee, \wedge)
11. $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p, p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ (apsorpcija \vee prema \wedge , tj. \wedge prema \vee)
12. $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
 $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (distributivnost)
13. $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$
14. $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
 $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ (De Morganovi obrasci)
15. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

Def. Dve iskazne formule A i B su semantièki ekvivalentne ako je $A \hat{=} B$ tautologija tj. ako A i B imaju uvek iste vrednosti za iste vrednosti promenljivih. Piš e se $A = B$.

Sada se u svim tautologijama iz 1. - 15. koje sadrž e \Leftrightarrow , znak \Leftrightarrow mož e zameniti sa $=$.

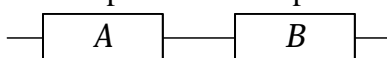
2.1.3. Prekidaèke mrež e

Samo one iskazne formule koje sadrž e \vee, \wedge i \neg , gde se \neg javlja neposredno ispred iskaznog slova, mogu se interpretirati kao tzv. prekidaèke mrež e:

Iskazna slova i njihove negacije se interpretiraju kao dvopolni prekidaèi koji mogu biti otvoreni (kada ne provode struju) i zatvoreni kada provode struju. Ako iskazno slovo ima vrednost 1, prekidaè je zatvoren, a ako je 0, on je otvoren.

Ako su A i B formule koje su veæ prikazane kao prekidaèke mrež e, tada je

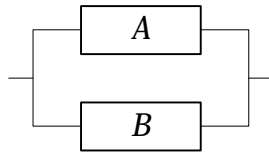
- Za $A \wedge B$, mrež a



- redna veza

- Za $A \vee B$, mrež a

- paralelna veza



Prekidačka mreža a sadrž i redno ili paralelno vezane prekidače, pri èemu su svi prekidači oznaèeni istim slovom istovremeno ukljuèeni ili iskljuèeni. Prekidač sa oznakom p je ukljuèen akko je prekidač sa $\neg p$ iskljuèen i obrnuto.

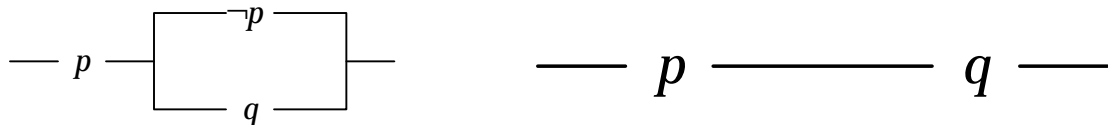
Prekidačka mreža a provodi struju akko odgovarajuća formula ima za odgovarajuće vrednosti slova (tj. stanje prekidača) vrednost 1.

Tautologijama odgovara prekidačka mreža a koja provodi uvek struju bez obzira na stanje svojih prekidača.

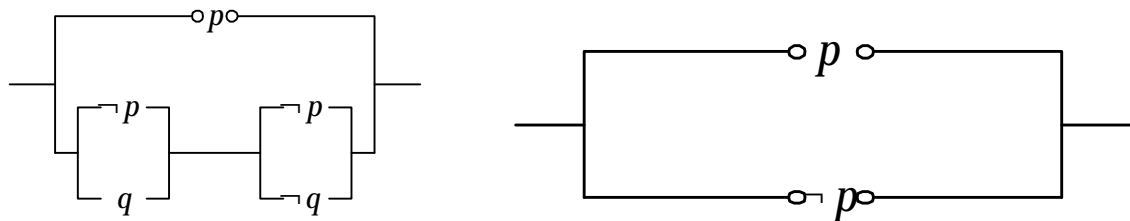
Ako je $A = B$, tada su odgovarajuće prekidačke mreže e ekvivalentne tj. za iste polož aje svojih jednako oznaèenih prekidača obe provode ili ne provode struju.

Primeri.

a) $p \wedge (\neg p \vee q) = p \wedge q$



b) $((\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)) \vee p = p \vee \neg p$ - tautologija



2.1.4. Bool-ove funkcije

Def. Svako preslikavanje $\{ 0,1 \}^n \rightarrow \{ 0,1 \}$, $n \in N$, je Bool-ova funkcija.

Svaka iskazna formula je jedna Bool-ova funkcija èiji je broj promenljivih jednak broju razlièitih iskaznih slova koje formula sadrž i, tj. svakoj iskaznoj formuli F odgovara Bool-ova funkcija f tako da je $v(F) = f(p_1, p_2, \dots, p_n)$ za sve vrednosti iskaznih slova p_1, p_2, \dots, p_n iz formule F .

Bool-ove funkcije jedne promenljive

p	α_1	α_2	α_3	α_4
-----	------------	------------	------------	------------

α_3 odgovara negaciji \neg

1	1	1	0	0
0	1	0	1	0

Bool-ove funkcije dve promenljive (ima ih $2^{2^2} = 16$)

p	q	β_1	β_2	β_5	β_{10}	β_{16}
1	1	1	1	1	0	0
1	0	1	1	0	1	0
0	1	1	1	1	1	0
0	0	1	0	1	0	0

Za svaku Bool-ovu funkciju f postoji iskazna formula F tako da je $v(F) = f(p_1, p_2, \dots, p_n)$. O tome govori sledeći stav:

Teorema. Neka je $f(p_1, p_2, \dots, p_n)$ proizvoljna Bool-ova funkcija i

$$B_1 = \{ (e_1, e_2, \dots, e_n) \in \{0, 1\}^n \mid f(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1 \}$$

$$B_2 = \{ (e_1, e_2, \dots, e_n) \in \{0, 1\}^n \mid f(e_1, e_2, \dots, e_n) = 0 \}, \text{ i } p_i^0 = \neg p_i, \text{ } p_i^1 = p_i.$$

Tada je

$$1. \text{ Za } B_1 \neq \emptyset, \quad f(p_1, p_2, \dots, p_n) = v \left(\bigvee_{(e_1, e_2, \dots, e_n) \in B_1} (p_1^{e_1} \wedge p_2^{e_2} \wedge \dots \wedge p_n^{e_n}) \right)$$

- savršena disjunktivna normalna forma

$$2. \text{ Za } B_2 \neq \emptyset, f(p_1, p_2, \dots, p_n) = v \left(\bigwedge_{(e_1, e_2, \dots, e_n) \in B_2} (p_1^{\neg e_1} \vee p_2^{\neg e_2} \vee \dots \vee p_n^{\neg e_n}) \right)$$

- savršena konjunktivna normalna forma.

Primer:

p	q	β_5
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

β_5 je implikacija

$$B_1 = \{ (1,1), (0,1), (0,0), \}$$

$$\beta_5 = (p^1 \wedge q^1) \vee (p^0 \wedge q^1) \vee (p^0 \wedge q^0)$$

$$\beta_5 = (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

$$B_2 = \{ (1,0) \}$$

$$\beta_5 = p^{-1} \vee q^{-0} = p^0 \vee q^1 = \neg p \vee q$$

Na taj način se svaka Bool-ova funkcija može predstaviti pomoću formule sa \neg, \vee, \wedge , pa i pomoću prekidačke mreže.

2.1.5. Izvođenje zaključaka

Def. Formula F je semantička posledica skupa formula \mathbf{F} ako važi: Za sve vrednosti iskaznih slova za koje je $v(H) = 1$ za svako $H \in \mathbf{F}$, važi i da je $v(F) = 1$.

Elementi skupa \mathbf{F} su hipoteze formule F , u oznaci $\mathbf{F} \models F$.

Za konačan skup $\mathbf{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$, $F_1, F_2, \dots, F_n \models F$.

Teorema. $F_1, F_2, \dots, F_n \models F$ ako i samo ako je $(F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_n) \Rightarrow F$ tautologija.

Neka pravila zaključivanja:

1. $p, p \Rightarrow q \models q$ - modus ponens (direktni dokaz)

Primer:

p : 1988 je deljivo sa 4

$p \Rightarrow q$: Ako je N deljivo sa 4, tada je godina N prestupna

$\models q$: 1988 je prestupna godina.

2. $p \Rightarrow q, q \Rightarrow r \models p \Rightarrow r$ - hipotetički silogizam

Primer:

$p \Rightarrow q$: Ako je $a = 2$, tada je $a^2 = 4$

$q \Rightarrow r$: Ako je $a^2 = 4$, tada je $a^3 = 4a$

$\models p \Rightarrow r$: Ako je $a = 2$, tada je $a^3 = 4a$

3. $p, \neg q \Rightarrow \neg p \models q$ - modus tolens (indirektni dokaz) - svođenje na apsurd

Primer:

p : U sobi ima 13 ljudi

$\neg q \Rightarrow \neg p$: Ako sve osobe imaju rođendan različitih meseci, tada u sobi ima ne više od 12 osoba

$\models q$: Dve ili više osobe imaju rođendan istog meseca

4. $p \Rightarrow q, q \Rightarrow p \models p \Leftrightarrow q$ - ekvivalencija

Primer:

Trougao je jednakostraničan akko su mu svi uglovi jednaki

2.5. Predikatski račun (kvantifikatorski račun)

– formalizuje pravilni naèin zapisivanja predikata nekog matematièkog ili drugog jezika, određivanje istinitosne vrednosti predikata. Pri tome se ulazi u sadržaj rešenica koje ulaze u sastav predikata.

2.5.1. Predikatske formule

Osnovni simboli kvantitativnog raèuna:

1. promenljive: $x, y, z, x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, \dots$
2. konstante: $a, b, c, a_1, b_1, c_1, \dots, a_n, b_n, c_n, \dots$
3. operacijski simboli: $f, g, h, f_1, g_1, h_1, \dots, f_n, g_n, h_n, \dots$
4. relacijski simboli: $\mathbf{a, b, g, a_1, b_1, g_1, \dots}$ i
5. simboli logièkih operacija i kvantifikatori: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \forall, \exists$.
6. pomoæni simboli: male zagrade i zarezi.

\forall : univerzalni kvantifikator, “bilo koji“, “svaki“, “ma koji“

\exists : egzistencijalni kvantifikator, “postoji bar jedan“, “postoji neki“.

Formalizacija pravilnog zapisivanja predikata

Def. *Izraz* je niz promenljivih, konstanti, operacijskih simbola, zagrada i zareza koji se formira prema sledeæim konvencijama:

1. Konstante i promenljive su izrazi (termi)
2. Ako su t_1, t_2, \dots, t_n izrazi, a f operacijski simbol dužine n , tada je $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ izraz
3. Izrazi se dobijaju samo pomoæu konaèno mnogo primena 1. i 2.

Primeri: $x, a, f(x), g(x, y), g(g(x, a)), f(g(x), g(h(x, y)))$

Ako je f operacijski simbol dužine 1, tada se, umesto $f(x)$, moŹe pisati fx , a ako je f operacijski simbol dužine 2, tada se, umesto $f(x, y)$, moŹe pisati xfy .

Def. Ako su t_1, t_2, \dots, t_n izrazi i \mathbf{a} relacijski simbol dužine n , tada je $\alpha(t_1, t_2, \dots, t_n)$ elementarna formula.

Ako je α relacijski simbol dužine 2, tada se, umesto $\alpha(x, y)$, moŹe pisati $x \alpha y$.

Primeri: $\alpha(x, y), \alpha(f(x, y)), \alpha(f(x, y), a), \alpha(x, y, f(x), z)$

Def. Predikatska formula se definiše prema sledeæim konvencijama:

1. Elementarna formula je predikatska formula

2. Ako su A i B predikatske formule i x promenljiva, tada su $(\neg A), (A \vee B), (A \wedge B), (A \Rightarrow B), (A \Leftrightarrow B), (\forall x)A, (\exists x)A$ predikatske formule
3. Predikatske formule se dobijaju samo pomoću konačno mnogo primena 1. i 2.

U predikatskoj formuli mogu se izostaviti spoljašnje zagrade, a i neke unutrašnje prema prioritetu logičkih operacija.

Primeri:

- (a) $(\forall x)(\forall y)(\alpha(x, y) \Rightarrow \alpha(f(x), f(y)))$
- (b) $(\forall x)\alpha(x, y) \Rightarrow (\exists y)\alpha(x, y)$
- (c) $\alpha(x, y) \Rightarrow (\exists z)\beta(y, f(x, z))$

2.5.2. Pojavljivanje promenljivih u predikatskoj formuli

Def. Pojavljivanje promenljive x u formuli F je vezano, ako je oblika $(\forall x)$ ili $(\exists x)$ ili ako se x pojavljuje u nekoj formuli A , pri čemu je $(\forall x)A$ ili $(\exists x)A$ podformula formule F . Ako pojavljivanje x nije vezano ono je slobodno.

Def. Slobodna promenljiva formule F je promenljiva koja ima bar jedno slobodno pojavljivanje u toj formuli. Vezana promenljiva formule F je promenljiva čija su sva pojavljivanja u toj formuli vezana.

Primeri:

- Sve promenljive u formuli (a) su vezane.
- x, y , iz formule (b) su slobodne promenljive.
- x, y su slobodne, a z vezana u formuli (c).

Ako su sve promenljive u jednoj formuli vezane, tada se ova formula zove zatvorena formula. Takve formule predstavljaju rešenice kojima se može direktno odrediti istinitosna vrednost, pa one, u stvari, predstavljaju iskaze.

Ako su x_1, x_2, \dots, x_n slobodne promenljive formule F , tada se piše $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

2.5.3. Interpretacija predikatske formule

Def. Uređen par (D, Φ) je interpretacija formule F , ako je

- D neprazan skup koji predstavlja oblast definisanosti svih promenljivih i konstanti iz formule F ,

a Φ preslikavanje koje:

- svakoj konstanti iz formule F dodeljuje određen element iz D ,
- svakom operacijskom simbolu dužine n dodeljuje konkretnu n -arnu operaciju nad D ,

- svakom relacijskom simbolu duž ine n dodeljuje konkretnu n -arnu relaciju u D .

D se naziva domen interpretacije formule F .

Primeri:

$$(\forall x)(\forall y)\alpha(f(x, y), f(y, x))$$

$$1. D = R, \varphi: f \rightarrow +, \alpha \rightarrow =$$

$$(\forall x)(\forall y) x + y = y + x$$

$$2. D = PA, \varphi: f \rightarrow \cup, \alpha \rightarrow =$$

$$(\forall x)(\forall y) x \cup y = y \cup x$$

$$3. D = \{ 0, 1 \}, \varphi: f \rightarrow \wedge, \alpha \rightarrow =$$

$$(\forall x)(\forall y) x \wedge y = y \wedge x$$

Predikat predstavlja predikatsku formulu koja je interpretirana.

Def. Broj slobodnih promenljivih u jednom predikatu predstavlja duž inu tog predikata.

Predikat duž ine 0 predstavlja iskaz.

2.5.4. Istinitosna vrednost predikatske formule

Istinitosna vrednost predikatske formule mož e se odrediti samo ako je ta formula interpretirana tj. istinitosna vrednost formule zavisi od njene interpretacije i vrednosti njenih slobodnih promenljivih.

Formalizovani postupak utvrđivanja istinitosne vrednosti:

1. Ako interpretirana formula ima duž inu 0, njena istinitosna vrednost se određuje direktno ulaž enjem u sadrž aj rećenice.
2. Ako je duž ina interpretirane formule veæa od 0, treba fiksirati vrednosti svih slobodnih promenljivih formule.
3. Za fiksirane vrednosti slobodnih promenljivih izraèunati vrednosti svih izraza koji ulaze u formulu (tj. izvrš iti naznaèene operacije nad konstantama iz D i dobiti kao rezultat konstantu iz D).
4. Odrediti za tako dobijene vrednosti izraza, vrednosti elementarnih formula iz formule kao:

$$v(\alpha(t_1, t_2, \dots, t_n)) = \begin{cases} 1, & (v(t_1), v(t_2), \dots, v(t_n)) \in \alpha \\ 0, & \text{drugacije} \end{cases}.$$

5. Nad vrednostima elementarnih formula (1 ili 0) izvrš iti logièke operacije $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ (u domenu iskazne algebre).
6. U sluèaju da se u podformulama javljaju kvantifikatori, tada

- $v((\forall x)A) = v(A)$, ako A ne sadrži x kao slobodnu promenljivu
- $v((\exists x)A) = v(A)$, ako A ne sadrži x kao slobodnu promenljivu
- $v((\forall x)A(x)) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } v(A) = 1 \text{ za svako } x \in D \\ 0, & \text{drugacije} \end{cases}$
- $v((\exists x)A(x)) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } v(A) = 1 \text{ za bar jedno } x \in D \\ 0, & \text{drugacije} \end{cases}$

Primeri: $\alpha(f(x, y), z) \wedge \alpha(y, f(x, z)) \Rightarrow \beta(y, z)$

Interpretacija: $f: +, \alpha: <, \beta: =$
 $x + y < z \wedge y < x + z \Rightarrow y = z$

Za $x = 1, y = 3, z = 2$: $1 + 3 < 2 \wedge 3 < 3 \Rightarrow 3 = 2$
 $v(1 + 3 < 2 \wedge 3 < 3 \Rightarrow 3 = 2) = v(4 < 2 \wedge 3 < 3 \Rightarrow 3 = 2) = 0 \wedge 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow 0 = 1$

Za $x = 1, y = 2, z = 4$: $1 + 2 < 4 \wedge 2 < 1 + 4 \Rightarrow 2 = 4$
 $v(3 < 4 \wedge 2 < 5 \Rightarrow 2 = 4) = 1 \wedge 1 \Rightarrow 0 = 1 \Rightarrow 0 = 0$

Def. Formula je tačna pri interpretaciji (d, ϕ) ako za sve vrednosti slobodnih promenljivih ima vrednost 1 pri toj interpretaciji.

Def. Formula koja je tačna pri svakoj interpretaciji je valjana formula.

1. Ako se u nekoj tautologiji svaka promenljiva zameni sa nekom predikatskom formulom (istoj promenljivoj odgovara ista formula), dobija se predikatska formula koja je valjana.

Primeri: $F \vee \neg F, F_1 \Rightarrow F_2 = \neg F_1 \vee F_2, F_1 \Rightarrow F_2 = \neg F_2 \Rightarrow \neg F_1$, itd.

2.

$\left. \begin{aligned} \neg(\forall x)A(x) &\Leftrightarrow (\exists x)\neg A(x) \\ \neg(\exists x)A(x) &\Leftrightarrow (\forall x)\neg A(x) \\ (\forall x)(\forall y)A(x, y) &\Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)A(x, y) \\ (\forall x)(A(x) \wedge B(x)) &\Leftrightarrow (\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x) \\ (\exists x)(A(x) \vee B(x)) &\Leftrightarrow (\exists x)A(x) \vee (\exists x)B(x) \end{aligned} \right\}$	valjane formule
--	-----------------

Def. Formule A i B su semantički ekvivalentne, ako je $A \Leftrightarrow B$ valjana formula

3. Algebarske strukture

Def. Binarna operacija f u skupu S je zatvorena, ako $(\forall x, y \in S) \quad xfy \in S$

Osobine zatvorene binarne operacije $*$ u skupu S :

1. $(\forall x, y \in S) \quad x * y \in S = y * x$ (komutativnost) (K)
2. $(\forall x, y, z \in S) \quad (x * y) * z = x * (y * z)$ (asocijativnost) (A)
3. $(\exists e \in S) \quad (\forall a \in S) \quad a * e = e * a$ (neutralni ili jedinični element) (N)
 $(\exists e' \in S) \quad (\forall a \in S) \quad e' * a = a$ (e' - levi neutralni element) (LN)
 $(\exists e'' \in S) \quad (\forall a \in S) \quad a * e'' = a$ (e'' - desni neutralni element) (DN)
4. $(\forall a \in S) \quad (\exists a^{-1} \in S) \quad a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (inverzni element) (I)

Def. Neprazan skup S snabdeven sa jednom ili viš e zatvorenih operacija f_1, f_2, \dots, f_n bilo koje duž ine naziva se algebarska struktura (ili algebra), u oznaci $(S, f_1, f_2, \dots, f_n)$.

3.1. Grupa

Def. Specijalno, za $n=1$, skup S snabdeven jednom binarnom zatvorenom operacijom je grupoid, u oznaci $(S, *)$.

Primeri: $(\mathbb{R}, +)$, (\mathbb{R}, \bullet) , $(\mathbb{Q}, +)$, (\mathbb{Z}, \bullet)

Def. Ako grupoid $(S, *)$ zadovoljava i uslove da je

- $*$ asocijativna, tada je $(S, *)$ polugrupa,
- $*$ je (A) i (N), tada je $(S, *)$ monoid,
- $*$ je (A), (N), (I), tada je $(S, *)$ grupa,
- $*$ je (A), (K), (N), (I), tada je $(S, *)$ Abelova grupa.

Primeri:

- $(\mathbb{N}, +)$, (\mathbb{N}, \bullet) – komutativni monoidi
- $(\mathbb{P}A, \cup)$, $(\mathbb{P}A, \cap)$ – komutativni monoidi
- $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ – Abelova grupa
- $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \bullet)$, $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \bullet)$ – Abelova grupa
- $(\{1, -1\}, \bullet)$ – Abelova grupa

Teorema. Ako je $(S, *)$ grupa, njen neutralni element je jedinstven.

Dokaz: Ako postoje dva neutralna elementa e_1, e_2 \vdash

$$(\forall x \in S) \quad (x * e_1 = e_1 * x = x \wedge x * e_2 = e_2 * x = x \Rightarrow e_1 = e_2 * e_1 = e_2 \Rightarrow \boxed{e_1 = e_2})$$

Teorema. Ako je $(S, *)$ grupa, svaki njen element ima jedinstveni inverzni element.

Dokaz: Ako postoje dva inverzna elementa a_1^{-1}, a_2^{-1} elemente a tada je

$$a * a_1^{-1} = a_1^{-1} * a = e \wedge a * a_2^{-1} = a_2^{-1} * a = e \Rightarrow$$

$$a_1^{-1} = a_1^{-1} * e = a_1^{-1} * (a * a_2^{-1}) = (a_1^{-1} * a) * a_2^{-1} = e * a_2^{-1} = a_2^{-1} \Rightarrow \boxed{a_1^{-1} = a_2^{-1}}$$

Def. Ako je $(S_1, *)$ i (S_2, \cdot) dva grupoida, tada su ovi grupoidi izomorfni, ako postoji bijekcija $f: S_1 \rightarrow S_2$ tako da važi i:

$$(\forall x, y \in S_1) \quad f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$$

Primer:

(\mathbb{R}^+, \bullet) je izomorfno sa $(\mathbb{R}, +)$, jer postoji bijekcija $\ln x: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, tako da je $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

Izomorfni grupoidi su iste strukture. Ako je jedan od njih grupa, i onaj drugi mora biti grupa.

3.1. Prsten. Telo. Polje. Bool-ova algebra

Posmatra se algebarska struktura $(S, *, \circ)$, gde su $*$ i \circ binarne zatvorene operacije na S .

Operacije \circ je distributivna u odnosu na $*$, ako važi i

$(\forall x, y, z \in S) \quad (x * y) \circ z = (x \circ z) * (y \circ z) \quad \text{-(DD) desna distributivnost}$

$(\forall x, y, z \in S) \quad x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z) \quad \text{-(LD) leva distributivnost}$

Def. $(S, *, \circ)$ je prsten, ako je

- $(S, *)$ – Abelova grupa,
- (S, \circ) – polugrupa,
- \circ je distributivna prema $*$.

Ako je \circ komutativna operacija, to je komutativan prsten.

Primeri: $(\mathbb{Z}, +, \bullet)$

Def. $(S, *, \circ)$ je telo, ako je

- $(S, *)$ – Abelova grupa,
- $(S \setminus \{0\}, \circ)$ – grupa (0 je neutralni element operacije $*$)
- \circ je distributivna prema $*$.

Def. Telo $(S, *, \circ)$ je polje, ako je $(S \setminus \{0\}, \circ)$ Abelova grupa.

Primeri: $(\mathbb{R}, +, \circ)$

Def. $(S, *, \circ)$ je Bool-ova algebra, ako je

- $*$, \circ su (A) i (K) .
- $*$ i \circ su obostrano distributivne.
- postoji neutralni lement e_1 operacije $*$ i neutralni elemnt e_2 operacije \circ .
- $(\forall x \in S) \quad (\exists x' \in S)(x * x' = e_2 \wedge x \circ x' = e_1)$

Primeri: (P, \cup, \cap) i $(\{0,1\}, \vee, \wedge)$

4. Relacijske strukture

4.1 Parcijalno uređeni skup

Osobine binarne relacije r u skupu S :

1. $(\forall x \in S) \quad xrx$ - refleksivnost
2. $(\forall x, y \in S) \quad xry \Rightarrow yrx$ - simetričnost
3. $(\forall x, y \in S) \quad xry \wedge yrx \Rightarrow x = y$
ili $x \neq y \wedge xry \Rightarrow \neg yrx$ - antisimetričnost
4. $(\forall x, y, z \in S) \quad xry \wedge yrz \Rightarrow xrz$ - tranzitivnost

ρ je relacija ekvivalencije, ako zadovoljava 1, 2, 4.

ρ je relacija poretka, ako zadovoljava 1, 3, 4.

Def. *Neprazan skup S snabdeven nekom relacijom poretka r naziva se parcijalno uređen skup, u oznaci (S, r) .*

Primeri: (\mathbb{R}, \leq) , (\mathbb{P}, \subseteq) , $(\mathbb{N}, /)$

Def. *Parcijalno uređen skup (S, r) je lanac ako su mu svaka dva elementa urediva tj. važ i.*
 $(\forall x, y \in S) \quad (xry \vee yrx)$

Primeri: (\mathbb{R}, \leq) - lanac
 $(\mathbb{N}, /)$, (\mathbb{P}, \subseteq) – nisu lanci

Def.

Najmanji element a skupa (S, r) : $(\forall y \in S) \quad a \leq y$.

Najveći element a skupa (S, r) : $(\forall y \in S) \quad y \leq a$.

Minimalni element a skupa (S, r) : $(\forall y \in S) \quad (y \leq a \Rightarrow y = a)$

Maksimalni element a skupa (S, r) : $(\forall y \in S) \quad (y \leq a \Rightarrow y = a)$.

Svaki najmanji (najveći) element je i minimalni (maksimalni). Kod lanca je svaki minimalni (maksimalni) element najmanji (najveći) element.

Primeri: $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, $A = \{1, 2, 3\}$, \emptyset je najmanji, a A najveći element.
 $(\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset, A\}, \subseteq)$ - $\{1\}, \{2\}, \{3\}$ - minimalni elementi
 $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ - maksimalni elementi

Teorema. *Ako postoje najveći ili najmanji element, oni su jedinstveni*

Dokaz: *Ako postoje dva najveća elementa a_1, a_2 , tada*

$$(\forall y \in S) \quad y \leq a_1 \wedge y \leq a_2 \Rightarrow a_2 \leq a_1 \wedge a_1 \leq a_2 \Rightarrow \boxed{a_1 = a_2}$$

4.2 Supremum. Infimum. Rešetka

Def. Neka je (S, r) parcijalno uređen skup i $S_1 \subseteq S$. Tada je $a \in S$ gornja (donja) međa skupa S_1 , ako je

$$(\forall y \in S_1) \quad y \leq a \quad \text{tj.} \quad (\forall y \in S_1) \quad a \leq y$$

Supremum skupa S_1 je najmanji element u skupu gornjih međa skupa S_1 .

Infimum skupa S_1 je najveći element u skupu donjih međa skupa S_1 .

Primeri:

$$\begin{aligned} - (R, \leq), S_1 = \{-1, 1\}: & \text{ donje međe } a \leq -1, \inf S_1 = -1 \\ & \text{ gornje međe } a \geq 1, \sup S_1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - (N, /), \text{ gde je } a \mid b &\Leftrightarrow (\exists k \in N) b = ka, \quad S_1 = \{12, 30\} \\ & \text{ gornje međe: } 60k, k=1,2,\dots, \quad \sup\{12, 30\}=60 \\ & \text{ donje međe: } 2,3,6 \quad \inf\{12, 30\}=6 \end{aligned}$$

Def. Parcijalno uređen skup (S, r) je mreža a ili rešetka ako svaka dva njegova elementa imaju supremum i infimum.

Teorema. Svaki lanac je rešetka.

Primeri:

$$\begin{aligned} \text{a) } (N, /), & \quad \sup(a, b) = \text{najmanji zajednički sadržalac } (a, b) \\ & \quad \inf(a, b) = \text{najveći zajednički delilac } (a, b) \\ \text{b) } (S, \rho) & \quad S_1 = \{0, 2, 6\}, \quad \rho = \{(0, 0), (2, 0), (6, 0), (2, 2), (2, 6), (6, 6)\} \end{aligned}$$

$$S_1 = \{0, 6\} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{donje međe : } 2, 6, & \inf S_1 = 6 \\ \text{gornja međe : } 0, & \sup S_1 = 0 \end{array} \right\}$$

$$S_1 = \{0, 2\} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{donja međe : } 2, & \inf S_1 = 2 \\ \text{gornja međe : } 0, & \sup S_1 = 0 \end{array} \right\}$$

$$S_1 = \{2, 6\} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{donja međe : } 2, & \inf S_1 = 2 \\ \text{gornja međe : } 0, 6 & \sup S_1 = 6 \end{array} \right\}$$

5. Osnovi teorije grafova

5.1 Definicija grafa

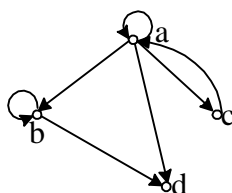
Def. Ako je X neprazan konačan skup i r binarne relacije u X , tada se uređeni par $G=(X,r)$ naziva graf.

Elementi skupa X su čvorovi, a elementi skupa r grane (ivice) grafa.

Geometrijska predstava grafa:

- čvorovi grafa iz X se prikazuju kao međusobno različite tačke ravni ili prostora. Ako $(x,y) \in r$, tada odgovarajuće tačke spajamo neprekidnom linijom koja se orijentira od x ka y . Ako $(x,y) \notin r$, odgovarajuće tačke nisu povezane linijom.





Primer: $X = \{a,b,c,d\}$, $p = \{(a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (b,b), (b,d), (c,a)\}$



Ivica koja spaja čvor sa samim sobom zove se petlja.

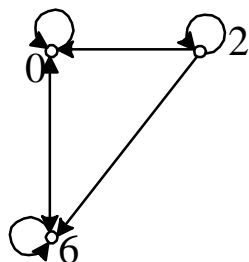
Svakoj relaciji se može pridružiti graf kao geometrijska predstava i svakom grafu kao figuri se mogu pridružiti neka binarna relacija u skupu čvorova.

Osobine binarnih relacija na grafu:

1. Refleksivnost: svaki čvor grafa ima petlju. 
2. Simetričnost: između svaka dva različita čvora gde postoji ivica, postoji i ivica u suprotnom smeru. 
3. Antisimetričnost: svaka dva različita čvora imaju najviše jednu ivicu koja ih spaja. 
4. Tranzitivnost: za svaki par nadovezanih ivica (x,y) i (y,z) , postoji ivica (x,z) koja ih zatvara. 

Primer:

$X = \{0,2,6\}$, $p = \{(0,0), (2,0), (6,0), (2,2), (2,6), (6,6)\}$



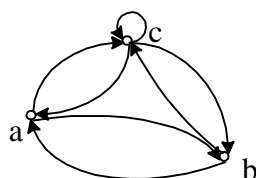
-Relacija poretka

Def. Ako je kod grafa (X, r) relacija r antisimetrična, graf je orijentisan.

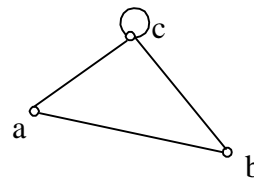
Ako je kod grafa (X, r) relacija r simetrična, graf je neorijentisan.

Kod neorijentisanog grafa se svi parovi grana koje spajaju čvorove zamenjuju jedinstvenim neorijentisanim granama.

Primer:

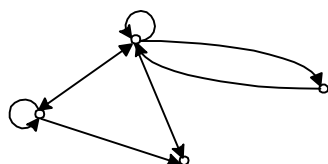


zamenjuje se



Postoje i grafovi koji nisu ni orijentisani ni neorijentisani.

Primer:



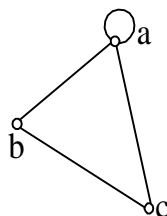
Postoje i drugačije definicije neorijentisanog grafa:

Def. Uređeni par (X, U) , gde je X neprazan skup, a $U \subseteq \{(x, y), x, y \in X\}$ i antisimetrično je, naziva se orijentisani graf.

Uređeni par (X, U) , gde je X neprazan skup, a $U \subseteq \{(x, y), x, y \in X\}$ tj. U je podskup skupa neuređenih parova iz X , je neorijentisani graf.

Primeri:

(X, U) , $X = \{a, b, c\}$, $U = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, c)\}$



- neorijentisan graf.

5.2. Matrična interpretacija grafa

Def. Neka su svi čvorovi nekog grafa (X, r) uređeni po nekom proizvoljnom poretku u niz

x_1, x_2, \dots, x_n .

Matrica $A = \|a_{ij}\|_{n \times n}$, kod koje je $a_{ij} = \begin{cases} 1, & (x_i, x_j) \in r; \\ 0, & \text{drugacije} \end{cases}$.

je matrica susedstva grafa (X, r) .

Matrica susedstva neorijentisanog grafa je simetrična tj. $a_{ij} = a_{ji}$ za svako $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

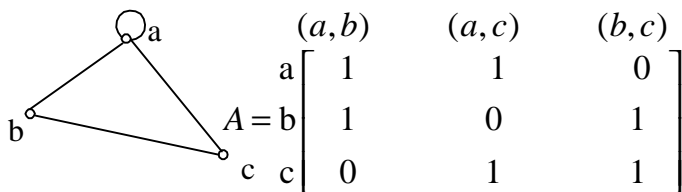
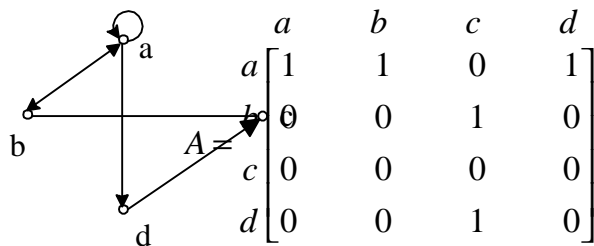
Za matricu susedstva orijentisanog grafa važi da je $(\forall i, j, i \neq j) a_{ij} = 1 \vee a_{ji} = 0$.

Za $a_{ii} = 1$, postoji petlja u čvoru x_i .

Def. Neka su svi čvorovi i ivice neorijentisanog grafa (X, r) uređeni u nizove x_1, x_2, \dots, x_n tj. i_1, i_2, \dots, i_m .

Matrica $B = \|b_{ij}\|_{m \times m}$, kod koje je $b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x_i \text{ jedna od krajnjih tacaka ivice } i_j; \\ 0, & \text{drugacije} \end{cases}$.

Primer:



5.3 Putevi u grafu

Def. Zadat je graf $G=(X, r)$. Niz ivica iz $r(x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_{n-1}, x_n)$ je put dužine n grafa G od x_1 do x_n (x_1 je početni, a x_n završni čvor).

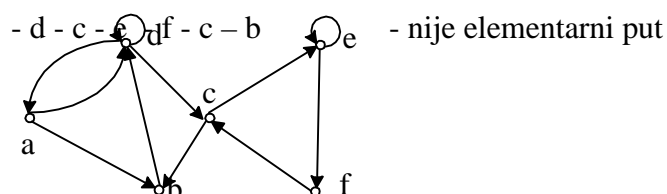
Ivice i čvorovi u putu se mogu ponavljati.

Def. Ako se svi čvorovi nekog puta različit, tada je to elementarni put (prolazi kroz svaki čvor puta samo jedan put).

Def. Ako je $x_1 = x_n$, tada se put naziva zatvoreni put.

Umesto $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_{n-1}, x_n)$ piše se x_1, x_2, \dots, x_n .

Primer:



- d - c - e - f - c - b - d - nije elementarni, ali je zatvoren
- b - d - c - e - f - otvoren i elementaran
- b - d - c - b, e - e, c - e - f - c - zatvoren i elementaran

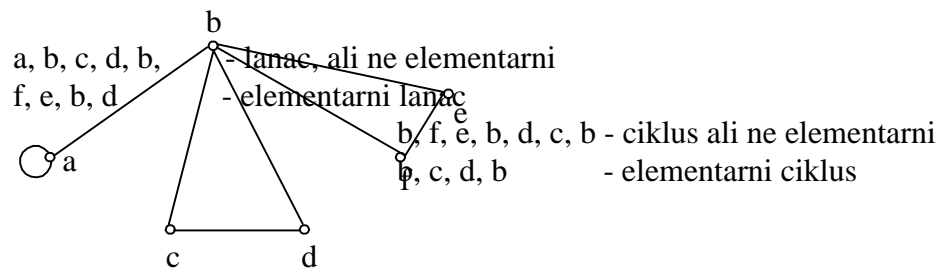
Def. Neka je $G=(X,U)$ neorijentisani graf. Niz ivica iz $U \{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \dots, \{x_{n-1}, x_n\}$ je lanac u G od x_1 do x_n . (x_1 je početni, a x_n završni čvor).

Ivice i čvorovi u putu se mogu ponavljati.

Def. Ako se svi čvorovi lanca različit, to je elementarni lanac.

Def. Ako je $x_1=x_n$, lanac se naziva ciklus.

Primer:

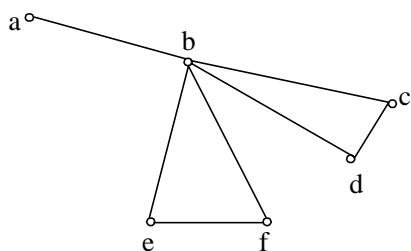


Def. Ako je (X,r) neorijentisani graf bez petlji, lanac koji prolazi tačno jedan put kroz sve ivice grafa je Euler-ov lanac (isto važi i za orijentisani graf i Eulerov put)

Def. Ako je (X, r) neorijentisani graf, lanac (ciklus) koji kroz sve čvorove prolazi tačno jedan put je Hamiltonov lanac (ciklus).

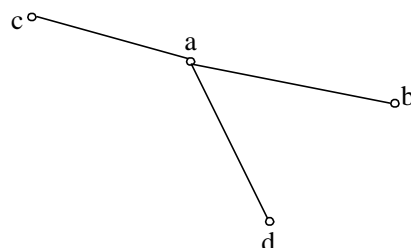
(Isto važi i za orijentisani graf, Eulerov put i Hamiltonov put).

Primeri:

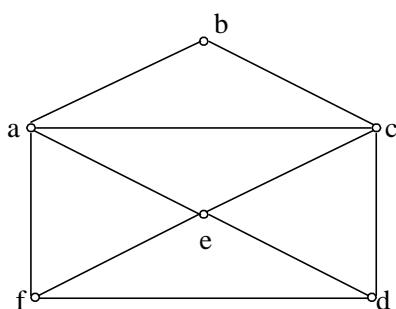


Eulerov put: a-b-c-d-b-f-e-b

Hamiltonov put: ne postoji



Nema ni Eulerov ni Hamiltonov put

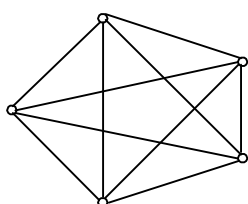


a,b,c,d,f,e,a – Hamiltonov put
d,c,b,a,c,e,d,f,e,a,f – Eulerov put

5.4 Neki specijalni grafovi

Potpun graf

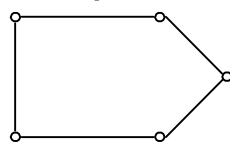
K_n



Svaka dva čvorova spojena su ivicom

Graf-ciklus

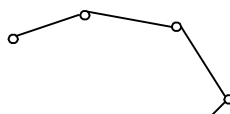
C_n



Ivice obrazuju ciklus

Graf-put

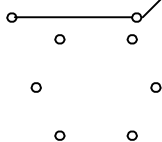
P_n



Ivice obrazuju put

Nula-graf

N_n



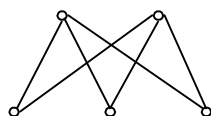
Graf sadrži i samo čvorove

Potpuni bipartitni graf

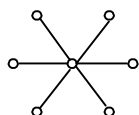
$K_{n,m}$

Skup čvorova se može podeliti na dva skupa, tako da čvorovi u istom skupu nisu spojeni, a svaka dva čvorova iz različitih skupova su spojeni

$K_{3,2}$

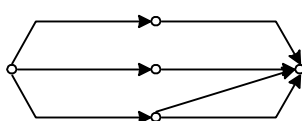


$K_{1,n}$



zvezda

Mreža

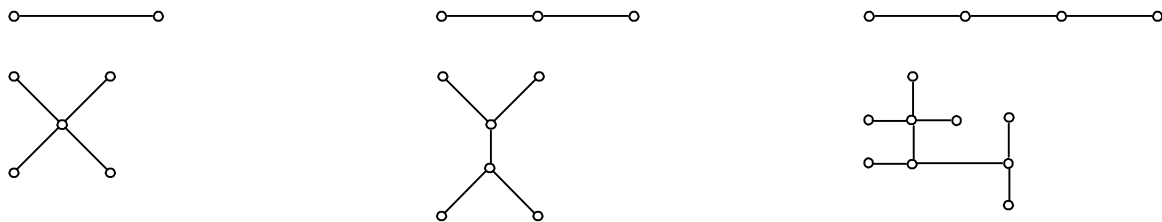


Orijentisani graf koji ne sadrži ni jedan zatvoreni put niti petlju

5.5 Stablo (drvo)

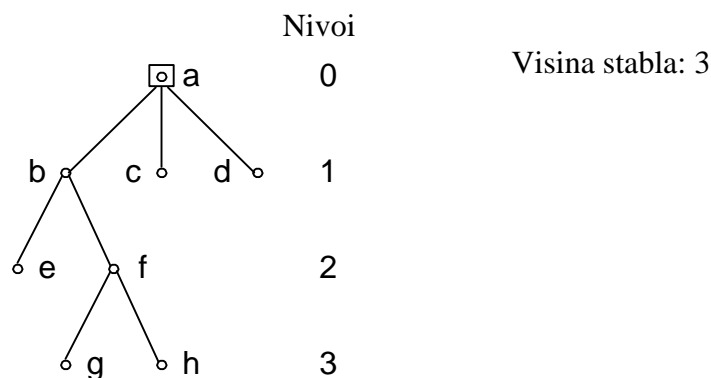
Def. Stablo je neorijentisani graf bez petlji kod koga između bilo koja dva čvora postoji jedinstveni elementarni lanac.

Primeri:



Def. Stablo sa korenom (ukorenjeno ili orijentisano stablo) je stablo kod koga postoji specijalno uođeni čvor koji predstavlja koren.

Primer:



Def. Nivo čvora x nekog stabla je dužina elementarnog lanca od korena do tog čvora (koren ima nivo 0).
Visina (dužina) stabla je najveći nivo čvora u stablu.

Terminologija u ukorenjenom stablu

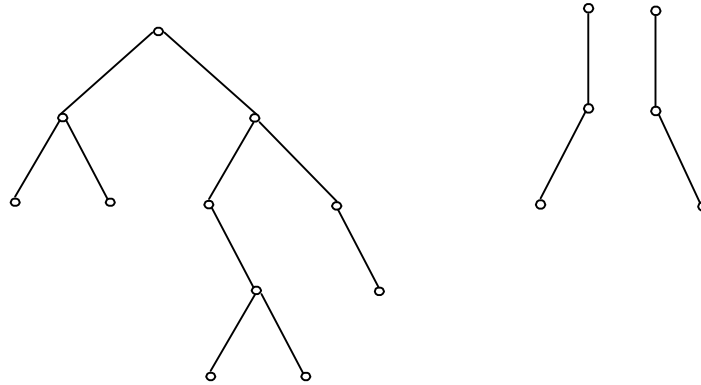
Ako je dat elementarni lanac od korena do nekog čvora, npr. a, b, f, h do h tada je

- f roditelj (otac) od h, h je dete (sin) od f,
- a, b, f su preci od h, h je potomak od a, b, f,
- g i h braća,
- ako neki čvor nema dece, zove se list. Ako neki čvor nije list, on je čvor grane.

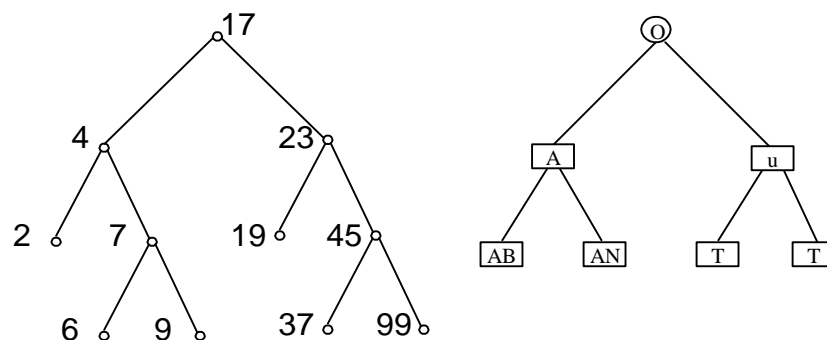
Def. Čvor x nekog stabla zajedno sa svim svojim potomcima predstavlja podstablo ovog stabla sa korenom x .

Def. Binarno stablo je ukorenjeno stablo gde svaki èvor ima najviš e dva deteta Èvor \underline{x} nekog (levo ili desno).

Primeri:

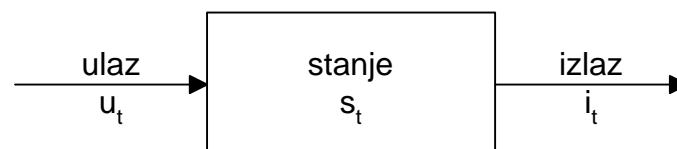


Primeri: Stablo pretraž ivanja u bazama podataka, gde se svakom èvoru stabla pridruŹ uje neki podatak, tako da je podatak u levom podstablu uvek “manji” od podataka u desnom podstablu.



6. Teorija konaènih automata

- formuliš e apstraktne modele rada sistema koji se moŹ e opisati na sledeæi naèin:



Sistem se posmatra u diskretnim vremenskim trenucima t ($t=0,1,2,\dots$) i u svakom od njih ga karakteriš e neko stanje s_t u kome se nalazi. U svakom trenutku t na ulaz u sistem dolazi neki ulazni signal u_t koji izaziva (eventualno) menjanje njegovog stanja u stanje s_t i na izlazu izlazni signal i_t . Poš to stanje s_t i izlaz i_t zavise, ne samo od ulaza u_t veæi od prethodnog stanja sistema s_{t-1} na koga ovaj ulaz nailazi, ovakav jedan sistem radi sa nekom vrstom primitivne unutraš nje memorije.

6.1 Konačna mašina

Sada se apstraktni model koji opisuje rad ovakvog sistema može definisati na sledeći način:

Def. Konačna mašina se sastoji od:

- konačnog skupa U ulaznih simbola,
- konačnog skupa I izlaznih simbola,
- konačnog skupa S stanja,
- funkcije prelaza stanja $f: S \times U \rightarrow S$,
gde $f(s, u) = s'$ znači da, ako ulaz u dođe u sistem koji je u stanju s , tada se stanje menja u s'
- funkcije izlaza $g: S \times U \rightarrow I$,
gde $g(s, u) = i$ znači da, ako ulaz u dođe u sistem koji je u stanju s , tada je izlaz i ,
- početnog stanja sistema $s^* \in S$.

Ovakva konačna mašina se označava sa $M = (U, I, S, f, g, s^*)$.

Primer: $U = \{a, b\}$, $I = \{0, 1\}$, $S = \{\sigma_0, \sigma_1\}$, $s^* = \sigma_0$

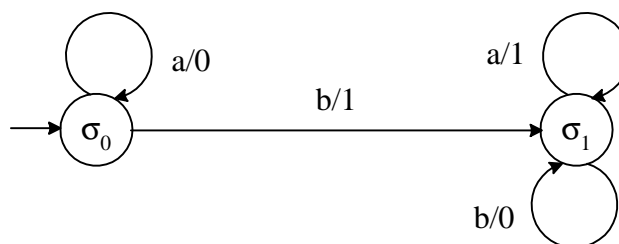
s \ u	f		g		ili	f(σ_0, a) = σ_0	g(σ_0, a) = 0
	a	b	a	b			
σ_0	σ_0	σ_1	0	1		f(σ_0, b) = σ_1	g(σ_0, b) = 1
σ_1	σ_1	σ_1	1	0		f(σ_1, a) = σ_1	g(σ_1, a) = 1
						f(σ_1, b) = σ_1	g(σ_1, b) = 0

Jedna konačna mašina se može u potpunosti definisati korišćenjem takozvanog dijagrama prelaza.

Def. U dijagramu prelaza za konačnu mašinu $M = (U, I, S, f, g, s^*)$ svako stanje s iz S se predstavlja kao neki čvor ovog dijagrama.

Od čvora s_1 do čvora s_2 postoji orijentisana ivica ako postoji ulaz u , $u \in U$, takav da važi $f(s_1, u) = s_2$. Ako je, pri tome, $g(s_1, u) = i$, ovoj ivici se dodeljuje oznaka u/i . Čvor koji predstavlja početno stanje s^* označen je strelicom.

Primer: Dijagram prelaza za konačnu mrežu iz prethodnog primera ima oblik:



Sada se rad konačne mašine M može opisati na sledeći način:

Na ulazu u mašinu se nalazi jedan niz ulaznih simbola (ulazni niz). Polazeći od početnog stanja, svaki od ovih simbola prevodi sistem iz stanja u stanje (u skladu sa funkcijom prelaza)

pri čemu se generiše odgovarajući izlazni simbol (u skladu sa funkcijom izlaza). Ovaj niz izlaznih simbola (izlazni niz) se zato može formalno definisati na sledeći način:

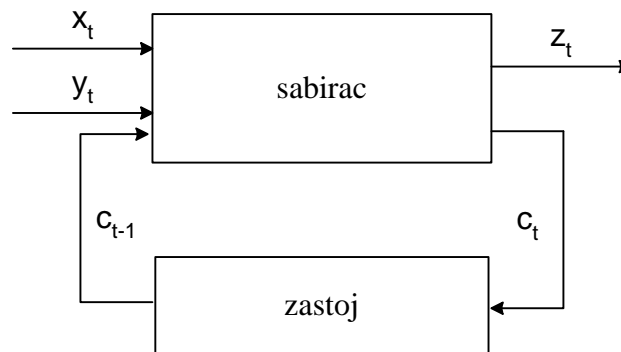
Def. Niz y_1, y_2, \dots, y_n je izlazni niz mašine M koji odgovara ulaznom nizu x_1, x_2, \dots, x_n ako postoji niz stanja s_0, s_1, \dots, s_n takav da je

$$\begin{aligned} s_0 &= s^* \\ s_i &= f(s_{i-1}, x_i), & i = \overline{1, n} \\ y_i &= g(s_{i-1}, x_i), & i = \overline{1, n} \end{aligned}$$

Primer: Ako je na ulazu konačne mašine iz primera ni $x=aababba$, odgovarajući niz stanja kroz koje mašina prolazi je $s_0, s_0, s_0, s_1, s_1, s_1, s_1, s_1$.
Odgovarajući izlazni niz je $y=0011001$.

Mnoge operacije koje se više u digitalnom računaru mogu se prikazati kao konačne mašine.

Primer:

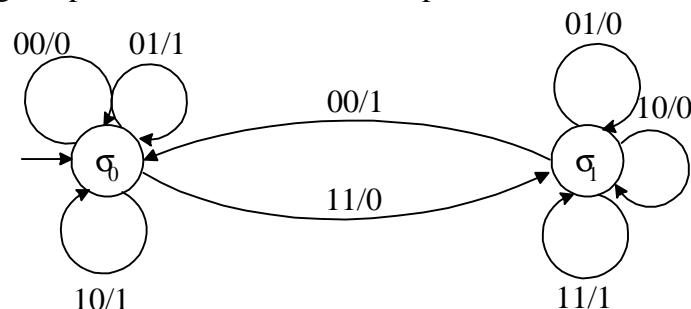


Serijski sabirač sabira dva binarna broja $x = x_n x_{n-1} \dots x_0$ i $y = y_n y_{n-1} \dots y_0$. Na ulazu se u diskretnim vremenskim trenucima $t=0, 1, \dots, n+1$ nalaze parovi $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n), (0, 0)$. Stanje sabirača u trenutku t se karakteriše prenosnim bitom c_t , tj. prenosom na sledeće cifarsko mesto pri sabiranju u trenutku t . Sabiranjem binarnih cifara x_t, y_t i prethodnog stanja c_{t-1} , dobija se kao izlaz binarna cifra z_t i menja se stanje sabirača u c_t . Rezultat sabiranja je izlazni niz $z_{n+1} z_n, \dots, z_0$.

Sabirač se može prikazati kao konačna mašina na sledeći način:

Skupovi ulaznih i izlaznih simbola su $U=\{00,01,10,11\}$ i $I=\{0,1\}$. Skup stanja je $S=\{\sigma_0, \sigma_1\}$, gde σ_0 označava da nema prenosa na sledeće cifarsko mesto, dok σ_1 označava da takav prenos postoji.

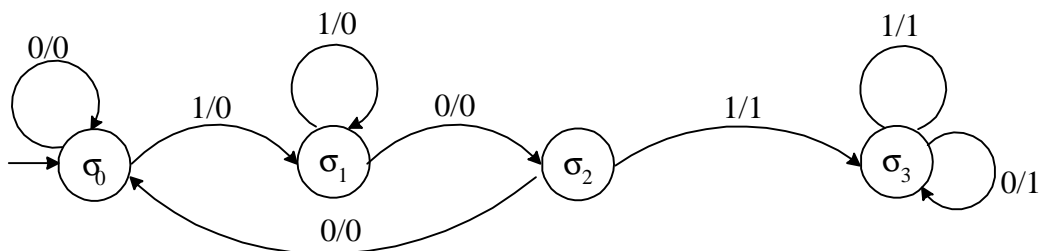
Sada se dijagram prelaza ove mašine može prikazati kao:



Ako treba sabrati dva linerna broja $x=0010$ i $y=0111$, tada ovom sabiranju odgovara ulazni niz $(0,1), (1,1), (1,0), (0,0)$, a njemu odgovarajući izlazni niz prethodno definisane konačne mašine je $z=1001$, što je i rezultat sabiranja.

Korišćenjem konačne mašine se mogu formalno prikazati mnogi postupci koji imaju za cilj da na određeni način prepoznaju unapred zadate osobine ulaznog niza.

Primer: Konačna mašina definisana dijagramom prelaza:



daje na izlazu 1 čim registruje 101 u ulaznom nizu i nadalje. U ostalim slučajevima daje 0.

Međutim, za neke osobine ulaznih nizova, ne mogu se formirati konačne mašine koje bi ih prepoznale.

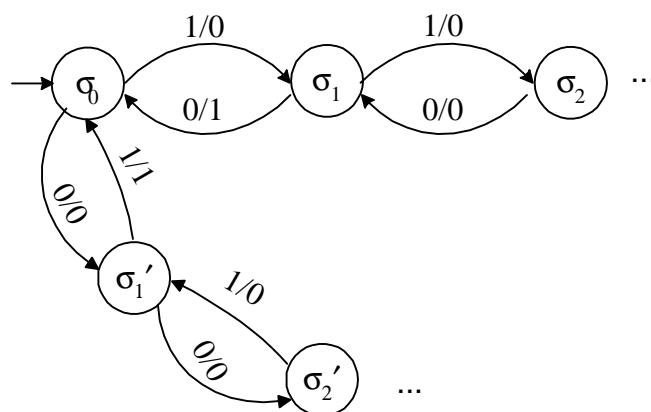
Primer:

Ne postoji konačna mašina koja na ulazu ima niz 0 i 1 i daje izlaz 1 uvek kada je broj 1 i 0 jednaki, u ostalim slučajevima daje 0.

Stvarno, stanja ovakve mašine trebalo bi da budu

σ_0 – isti broj 1 i 0	
σ_1 – broj 1 veći za 1 od broja 0	σ'_1 – broj 0 veći za 1 od broja 1
σ_2 – broj 1 veći za 2 od broja 0	σ'_2 – broj 0 veći za 2 od broja 1
○	○
○	○
○	○

Međutim, trebalo bi da bude beskonačno mnogo stanja, pa konačna mašina ne može da se formira na takvom skupu stanja.



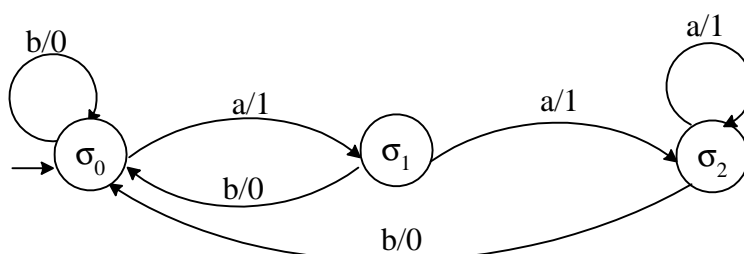
6.2 Konaèni automat

Specijalni sluèaj konaène maš ine su konaèni automati. Oni su od posebnog ineresa, jer su vezani za formalne jezike i gramatike.

Def.1 Konaèni automat $A = (U, I, S, f, g, \mathbf{s}^*)$ je takva konaèna masina kod koje je $I = \{0, 1\}$ i gde je izlaz određen sledećim stanjem maš ine.

Drugim reèima, kod konaènih automata vaŹ i da, bilo kako doš li u neko stanje, daju uvek isti izlaz tj. u njihovom dijagramu prelaza sve ivice koje ulaze u isto stanje imaju isti izlaz.

Primer:



U ovoj konaènoj maš ini za svako stanje vaŹ i da sve ivice koje ulaze u njega imaju isti izlaz. Zato ona predstavlja konaèni automat.

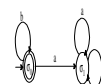
Stanja za koja vaŹ i da uvek kada je automat u njima daju izlaz 1 zovu se prihvatajuća stanja.

Sada se konaèni automat moŹ e definisati na drugaèiji naèin:

Def.2 Konaèni automat A se sastoji od:

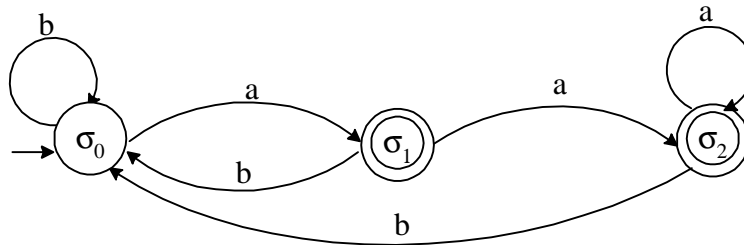
- konaènog skupa U ulaznih simbola,
- konaènog skupa S stanja,
- funkcije prelaza stanja $f: U \times S \rightarrow S$,
- podskupa $A \subseteq S$ prihvatajućih stanja,
- polaznog stanja $\mathbf{s}^* \in S$.

U oznaci $A = (U, S, f, A, \mathbf{s}^*)$.



U dijagramu prelaza konačnog automata se prihvatajuća stanja obeležavaju sa σ , a oznake izlaza se ne navode.

Primer: Konačni automat iz prethodnog primera se može prikazati kao:



Svakom ulaznom nizu konačnog automata A odgovara jedan orijentisani put koji polazi od početnog stanja σ_0 . Ako se taj put završava u nekom prihvatajućem stanju, tada A prihvata (prepoznaje) taj ulazni niz.

Pojam prihvaćenog ulaznog niza može da se definiše na sledeći način:

Def. Automat $A=(U,S,f,A,s^*)$ prihvata (prepoznaje) ulazni niz x_1, x_2, \dots, x_n , ako postoji niz stanja s_0, s_1, \dots, s_n , takvih da je

$$s_0 = s^*$$

$$f(s_{i-1}, x_i) = s_i, i = \overline{1, n}$$

$$s_n \in A.$$

Skup svih ulaznih nizova koje automat A prepoznaje označava se sa $Ac(A)$.

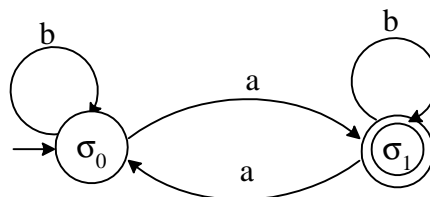
Primer:

Konačni automat iz prethodnog primera prihvata ulazni niz $aabbbba$, jer se odgovarajući niz stanja završava sa σ_1 . Ovaj automat ne prihvata $baabbabb$, jer se odgovarajući niz stanja završava u σ_0 .

Konačni automat je u suštini jedan algoritam koji odlučuje da li je ili ne zadati niz prihvatljiv. Često treba naći takav konačni automat koji prepoznaje (prihvata) sve nizove sa tačno određenim osobinama i samo njih.

Primer:

Automat koji prepoznaje sve nizove nad skupom $\{a, b\}$ koji sadrže neparan broj a može se definisati sledećim dijagramom prelaza.

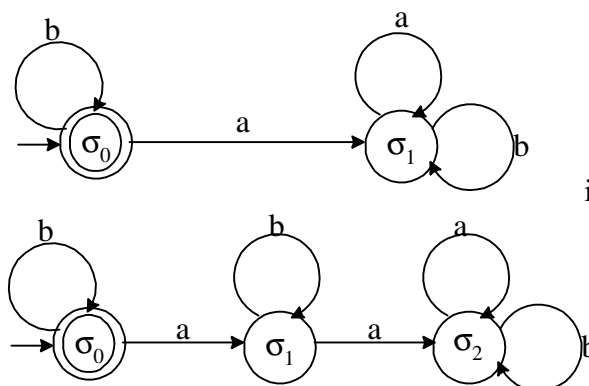


gde σ_0 označava stanje u kome je broj a paran, a σ_1 stanje u kome je broj a neparan.

Def. Dva konačna automata A i A' su ekvivalentna ako prepoznaju isti skup nizova tj. $Ac(A) = Ac(A')$

Primer:

Dva automata



su ekvivalentna, jer oba prepoznaju nizove koji se sastoje samo od b.

7. Formalni jezici. Gramatike

7.1 Formalni jezici

U opštem slučaju jezik je skup reči i metoda za njihovo kombinovanje koji se koristi i "razume" od strane određene zajednice. Pravila formiranja reči u ovakvim prirodnim jezicima su veoma kompleksna i teška za karakterizaciju.

Formalni jezici i gramatike modeliraju i formalno opisuju prirodne jezike i pravila formiranja njihovih reči, a u cilju lakše komunikacije sa računarom.

Def. Neka je A neki konačan skup. Formalni jezici L nad azbukom A je poskup od A^* , gde je A^* skup svih nizova (reči) nad A .

Primer:

Za $A = \{a, b\}$, jezik L može da sadrži skup svih nizova nad A koji imaju neparan broj a tj. $L = \{a, ab, ba, abb, bab, bba, \dots\}$

7.2 Gramatike

Def. Gramatika G se sastoji od:

- konačnog skupa N nezvršnih slova,
- konačnog skupa T završnih slova, gde $N \cap T = \emptyset$
- konačnog podskupa $P \subseteq [N^* T^*] \cup (N^*)^*$ koji se naziva skup pravila izvođenja

- polaznog slova $s^* \hat{I} N$.
- U oznaci $G=(N,T,P, s^*)$

Ako $(A,B) \in P$, tada se to često označava sa $A \rightarrow B$. $A \in (N \cup T)^* \cdot T^*$ i $B \in (N \cup T)^*$ tj. A i B su nizovi koji se sastoje od nezavrš nih i završ nih slova tako da A mora da sadrž i bar jedno nezavrš no slovo, dok B mož e da se sastoji samo od završ nih.

Polazeći od zadate gramatike G mož e se generisati neki jezik tj. koristeći pravila ove gramatike mogu se izvesti nizovi (reći) ovog jezika.

Def. Zadana je gramatika $G=(N,T,P,s^*)$.

Ako je $a @ b$ neko njeno pravilo, tj. $(a,b) \hat{I} P$, i $xay \hat{I} (N \hat{E} T)^*$, tada je xb direktno izvodivo iz xay , u oznaci $xay \xrightarrow{P} xb$.

Ako $a_i \hat{I} (N \hat{E} T)^*$ za $i=1, n$ i $a_i \Rightarrow a_{i+1}$ za $i=1, n-1$, tada je a_n izvodivo iz a_1 , u oznaci $a_1 \xRightarrow{\cdot} a_n$.

Jezik $L(G)$ generisan gramatikom G, $L(G)$ je skup svih nizova nad T izveden iz s^* .

Primer 1:

Gramatika $G=(N, T, P, s^*)$ je zadata sa $N=\{s^*, S\}$, $T=\{a, b\}$ i $P=\{s^* \rightarrow bs^*, s^* \rightarrow aS, S \rightarrow bS, S \rightarrow b\}$.

Na osnovu pravila $S \rightarrow bS$ niz $abSbb$ je direktno izvodiv iz $aSbb$ tj. $aSbb \Rightarrow abSbb$.

Takođe, $s^* \xRightarrow{\cdot} bbab$ pomoću niza izvođenja $s^* \Rightarrow bs^* \Rightarrow bbs^* \Rightarrow bbaS \Rightarrow bbab$.

Odredimo opš ti oblik reći nad T izvedene iz početnog slova s^* ove gramatike:

$s^* \Rightarrow bs^* \Rightarrow \dots \Rightarrow b^n s^* \Rightarrow b^n aS \Rightarrow b^n abS \Rightarrow \dots \Rightarrow b^n ab^m S \Rightarrow b^n ab^{m+1}$, za $m \geq 0$ i $n \geq 0$,
gde b^k označava k uzastopnih pojavljivanja slova b u reći.

To znači da jezik $L(G)$ generisan gramatikom G sadrž i sve reći ovoga oblika i samo njih tj. sadrž i sve one nizove nad $\{a,b\}$ koji sadrž e samo jedno a a završ avaju se sa b.

Napomenimo da je u opš tem slučaju za zadatu bilo kakvu gramatiku G teš ko naći oblik opš teg člana njenog jezika $L(G)$.

Osnovu jedne gramatike čine njen skup pravila izvođenja. Pomoću ovih pravila se, polazeći od početnog slova i koristeći dva disjunktna skupa slova, izvode reći jezika ove gramatike i to nad skupom završ nih slova kao njegovom azbukom. Nezavrš na slova služ e samo kao pomoćni simboli pri ovom izvođenju.

Gramatike i njena pravila mogu se kondenzovanije prikazati pomoću tzv. Backus-ove normalne forme (BNF).

Def. U Backus-ovoj normalnoj formi se prikazuju:

- nezavrš na slova između uglastih zagrada $\langle \dots \rangle$,
- pravila $S @ T$ kao $S ::= T$,
- pravila $S @ T_1, S @ T_2, \dots, S @ T_n$ kao $S ::= T_1 \mid T_2 \mid \dots \mid T_n$.

Primer:

Gramatika iz Primera 1. može se prikazati u obliku BNF kao

$$\langle \sigma^* \rangle ::= b \langle \sigma^* \rangle \mid a \langle S \rangle$$

$$\langle S \rangle ::= b \langle S \rangle \mid b$$

Mnogi poznati skupovi iz algebre brojeva mogu se prikazati kao jezici generisani određenim gramatikama koje definišu pravila formiranja elemenata ovih skupova.

Primer 2:

Ako se ceo broj shvati kao niz cifara od 0 do 9, ispred koga stoji (neobavezno) + ili -, tada se skup svih celih brojeva može smatrati jezikom generisanim sledećom gramatikom:

$$\langle \text{cifra} \rangle ::= 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9$$

$$\langle \text{ceo broj} \rangle ::= \langle \text{označen ceo broj} \rangle \mid \langle \text{neoznačen ceo broj} \rangle$$

$$\langle \text{neoznačen ceo broj} \rangle ::= \langle \text{cifra} \rangle \mid \langle \text{cifra} \rangle \langle \text{neoznačen ceo broj} \rangle$$

Polazno slovo : $\langle \text{ceo broj} \rangle$

Sada se ceo broj – 980 može izvesti iz početnog slova sledećim nizom izvođenja:

$$\begin{aligned} \langle \text{ceo broj} \rangle &\Rightarrow \langle \text{označen ceo broj} \rangle \Rightarrow \langle \text{neoznačen ceo broj} \rangle \Rightarrow \langle \text{cifra} \rangle \langle \text{neoznačen ceo} \\ \text{broj} \rangle &\Rightarrow \langle \text{cifra} \rangle \langle \text{cifra} \rangle \langle \text{neoznačen ceo broj} \rangle \Rightarrow \langle \text{cifra} \rangle \langle \text{cifra} \rangle \langle \text{cifra} \rangle \Rightarrow \\ &9 \langle \text{cifra} \rangle \langle \text{cifra} \rangle \\ &\Rightarrow 98 \langle \text{cifra} \rangle \Rightarrow 980. \end{aligned}$$

U zavisnosti od oblika pravila neke gramatike postoje tri tipa gramatike (prema klasifikaciji Ćomskog):

Def. Neka je $G=(N, T, P, s^*)$ neka gramatika i λ prazan niz (reč).

- Ako je svako pravilo izvođenja gramatike G oblika $aAb @ adb$, gde je $a, b \in (N \cup T)^*$, $A \in N$, $d \in (N \cup T)^* \setminus \{\lambda\}$ to je kontekstno zavisna gramatika.
- Ako je svako pravilo izvođenja gramatike G oblika $A @ d$ za $A \in N$, $d \in (N \cup T)^* \setminus \{\lambda\}$, to je kontekstno slobodna (nezavisna) gramatika,
- Ako je svako pravilo izvođenja gramatike G oblika $A @ a$ ili $A @ aB$, gde je $A, B \in N$, $a \in T^* \setminus \{\lambda\}$, to je regularna gramatika.

Svaka regularna gramatika je i kontekstno slobodna, a svaka kontekstno slobodna je i kontekstno zavisna.

Primer: Gramatika iz Primera 1. je regularna, a iz Primera 2. je kontekstno slobodna.

Def. Jezik L je kontekstno zavisna (slobodna, regularna) ako postoji kontekstno zavisna (slobodna, regularna) gramatika G tako da je $L=L(G)$.

Primer 3:

U Primeru 1 prikazano je da postoji jedna kontekstno slobodna gramatika koja generiše skup celih brojeva. Međutim, skup celih brojeva može se generisati i sledećom gramatikom:

$\langle \text{ceo broj} \rangle ::= + \langle \text{neoznačen ceo broj} \rangle \mid - \langle \text{neoznačen ceo broj} \rangle \mid * \langle \text{neoznačen ceo broj} \rangle$
 $\langle \text{neoznačen ceo broj} \rangle ::= 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9 \mid 0 \langle \text{neoznačen ceo broj} \rangle \mid \dots \mid 9 \langle \text{neoznačen ceo broj} \rangle$

Polazno slovo : $\langle \text{ceo broj} \rangle$,

gde je * završno slovo koje označava blanko.

Ova gramatika je regularna, pa je zato skup celih brojeva jedan regularan jezik.

Def. Gramatike G_1 i G_2 su ekvivalentne, ako je $L(G_1) = L(G_2)$.

Primer: Gramatike iz Primera 2 i 3 su ekvivalentne, jer generišu isti skup – skup celih brojeva.

7.3 Veza između automata i regularnih gramatika

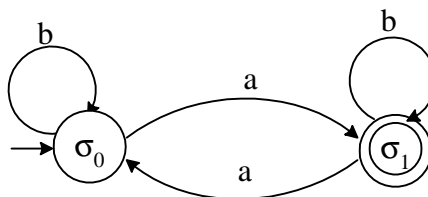
Može se pokazati da se za svaki konačan automat A može konstruisati regularna gramatika G tako da se jezik $L(G)$ poklapa sa skupom svih nizova koje taj automat prepoznaje.

Tvrđenje: Neka je $A = (U, S, f, A, s^*)$ konačni automat i $G = (N, T, P, s^*)$ gramatika kod koje je $N = S$, $T = U$, s^* početno slovo, a skup svih pravila izvođenja P definiše se na sledeći način:

- ako $f(s, x) = s' \in S$ tada $s \xrightarrow{x} s' \in P$,
- ako $f(s, x) = s' \in A$, tada $s \xrightarrow{x} s' \in P$.

Tada je skup svih nizova koje prepoznaje automat A jednak jeziku $L(G)$ generisanom gramatikom G .

Primer: Automatu A koji prepoznaje sve nizove nad $\{a, b\}$ takve da sadrže neparan broj a , zdatom dijagramom prelaza



odgovara sledeća gramatika $G = (N, T, P, s^*)$:

$N = \{\sigma_0, \sigma_1\}$, $T = \{a, b\}$, $s^* = \sigma_0$ i $P = \{\sigma_0 \xrightarrow{a} \sigma_1, \sigma_0 \xrightarrow{b} \sigma_0, \sigma_1 \xrightarrow{a} \sigma_0, \sigma_1 \xrightarrow{b} \sigma_1\}$.

Obrnuto, ako je zadata neka regularna gramatika G , onda se konstrukcija automata A takvog da je $A_c(A) = L(G)$, ne može izvesti direktno.

Regularnoj gramatici G se može, prvo, dodeliti tzv. nedeterministički konačni automat NA takav da je $A_c(NA) = L(G)$.

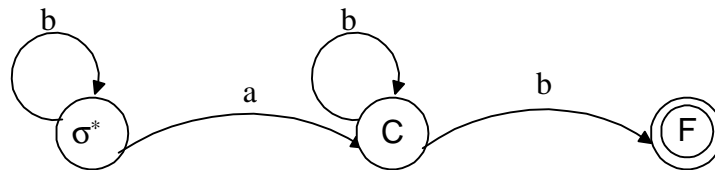
Def. *Nedeterministički konačni automat NA sastoji se od U, S, A, s^* i funkcije prelaza oblika $f: S \times U \rightarrow \mathcal{P}(S)$ tj. $f(s, u) \subseteq S$, gde je $\mathcal{P}(S)$ partitivni skup skupa stanja S .*

Znači da automat NA, delovanjem ulaza u na stanje s , prelazi u jedno od stanja iz podskupa stanja S' tj. stanje u koje će NA preći nije jednoznačno određeno. Podskup S' može biti i prazan.

Primer: $NA = (U, S, f, A, s^*)$ je određeno sa $U = \{a, b\}$, $S = \{s^*, C, F\}$, $A = \{F\}$ i funkcijom f definisanom sa

U \ S	f	
	a	b
s^*	C	s^*
C	\emptyset	{C, F}
F	\emptyset	\emptyset

ili dijagramom prelaza



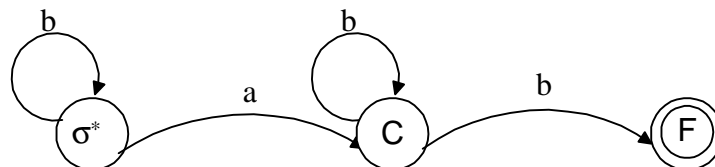
Tvrđenje: *Neka je $G = (N, T, P, s^*)$ regularna gramatika i NA nedeterministički konačni automat kod koga je $U = T$, $S = N \cup \{F\}$, gde je $F \notin N$, $A = \{F\}$ i $f(s, u) = \{s' \mid s \rightarrow us' \in P\} \cup \{F \mid s \rightarrow u \in P\}$.*

Tada je skup svih nizova koje prepoznaje NP jednak jeziku $L(G)$.

Primer:

Zadata je $G = (N, T, P, s^*)$ sa $T = \{a, b\}$, $N = \{s^*, C\}$, s^* kao početnim slovom i pravilima $P = \{s^* \rightarrow bs^*, s^* \rightarrow aC, C \rightarrow bC, C \rightarrow b\}$.

Nedeterministički automat NA koji odgovara ovoj gramatici je dat u prethodnom primeru tj. njegov dijagram prelaza je:



Svaki nedeterministički automat se može transformisati u ekvivalentni deterministički automat.

Tvrđenje: Neka je $NA=(U, S, f, A, s^*)$ nedeterministički konačni automat i neka je $S \in PS$,

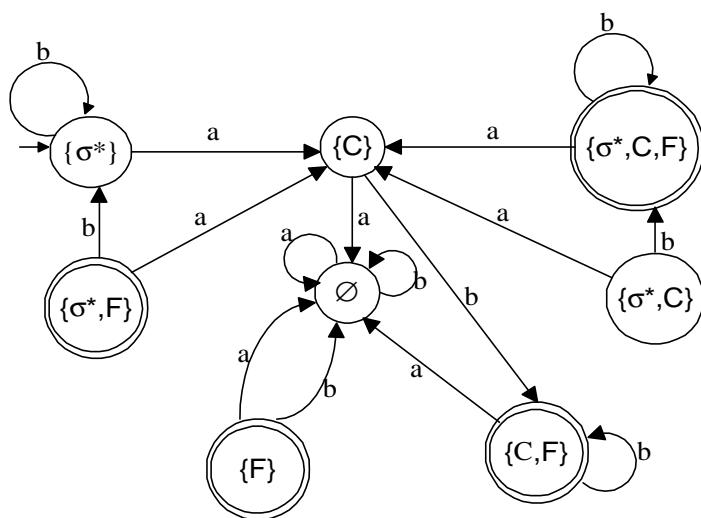
$$U \in U, s^* \in \{s^*\}, A \in \{x \mid \exists \hat{s} \in S \text{ } x \hat{s} A^{-1} \in E\} \text{ i } f(X, x) = \begin{cases} \emptyset, & \text{ako je } X = \emptyset \\ \bigcup_{s \in X} f(s, x), & \text{ako je } X \neq \emptyset \end{cases}$$

Tada je konačni automat $A'=(U', S', f', A', \sigma^*)$ ekvivalentan automatu NA .

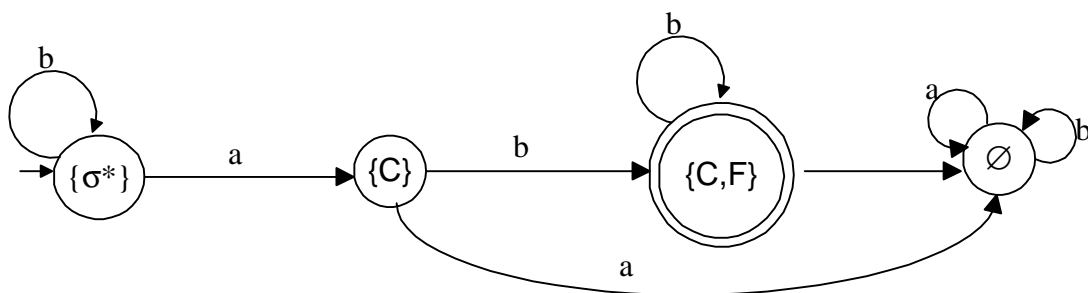
Primer: Automat $A'=(U', S', f', A', \sigma^*)$, ekvivalentan automatu NP iz prethodnog primera, može se definisati na sledeći način:

$U'=\{a,b\}$, $S'=\{\emptyset, \{\sigma^*\}, \{C\}, \{F\}, \{\sigma^*, C\}, \{\sigma^*, F\}, \{C, F\}, \{\sigma^*, C, F\}\}$,

$A'=\{\{F\}, \{\sigma^*, F\}, \{C, F\}, \{\sigma^*, C, F\}\}$, $\sigma^*=\{\sigma^*\}$, a funkcija f' se može definisati dijagramom prelaza:



Pošto, polazeći od $\{\sigma^*\}$ A' ošigledno nikada ne može doći u stanja $\{\sigma^*, F\}$, $\{\sigma^*, C\}$, $\{\sigma^*, C, F\}$ i $\{F\}$, tada se dijagram prelaza može konačno redukovati na:



Ovako konstruisani automat A' prepoznaje sve nizove koje generiše gramatika G iz prethodnog primera.